一类 pitchfork 分支的全局相图

李时敏^{1*}, Jaume Llibre²

1. 广东财经大学统计与数学学院, 广州 510320;

2. Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona 08193, Spain

E-mail: lism1983@126.com, jllibre@mat.uab.cat

收稿日期: 2018-04-17; 接受日期: 2019-03-08; 网络出版日期: 2019-05-27; * 通信作者

广州市科技计划 (批准号: 201707010426 和 20180401350)、广东省自然科学基金 (批准号: 2017A030313010)、the Ministry of Economy and Competitiveness (批准号: MTM 2016-77278-P)、Agencia de Gestio d'Ajuts Universitaris i de Recerca (批准号: 2017SGR1617)、the European project (批准号: Dynamics-H2020-MSCA-RISE-2017-777911) 和 Barcelona Graduate School of Mathematics (批准号: MDM-2014-0445) 资助项目

摘要 本文研究二次微分系统 $\frac{dx}{dt} = y^2 - y - x$, $\frac{dy}{dt} = x^2 - \mu x - y$, 其中 $\mu \in \mathbb{R}$. 该系统是刻画 pitchfork 分支的重要例子. 本文给出该系统在 Poincaré 圆盘上的全局相图.

关键词 相图 pitchfork 分支 Poincaré 紧致化

MSC (2010) 主题分类 34C05, 34C23, 37G15

1 引言及主要结果

全局相图分析是研究微分系统大范围动力学行为的有力工具. 它可以揭示系统在给定参数下是否存在吸引子、排斥子或极限环等全局动力学性态, 因此是微分方程定性理论研究中的重要问题之一.

对于一般的多项式微分系统, 其所有可能的全局相图数量十分巨大. 例如, 二次系统就有超过 2,000 多种不同拓扑结构的全局相图. 据此, 大部分已有文献都是对某些特殊系统的全局结构进行分析, 如二次系统^[1-8]、三次系统^[9-16]、四次系统^[17-20]、Liénard 系统^[21-24]、Hamiltonian 系统^[25-27] 和 Lotka-Volterra 系统^[28] 等. 此外, 文献 [29] 详细介绍了如何利用平面多项式相图软件 P4 (planar polynomial phase portraits) 绘制全局相图.

最近, Rajapakse 和 Smale^[30] 考虑了如下二次微分系统:

$$\frac{dx}{dt} = y^2 - y - x, \quad \frac{dy}{dt} = x^2 - \mu x - y, \quad (1.1)$$

其中 $\mu \in \mathbb{R}$ 为系统参数. 他们利用系统 (1.1) 指出了对称性不是 pitchfork 分支存在的必要条件, 从而纠正了大家多年来对此存在的误解.

英文引用格式: Li S M, Llibre J. Global phase portraits of the key pitchfork bifurcation (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1201-1208, doi: 10.1360/SCM-2018-0266

图 1 系统 (1.1) 的全局相图, (a) $S = 10, R = 3$; (b) $S = 16, R = 5$; (c) $S = 16, R = 5$; (d) $S = 15, R = 4$, 其中 S 和 R 分别表示分界线和标准区域的数目

记 $\mathcal{X}_1$ 和 $\mathcal{X}_2$ 分别为定义在平面开集 Δ_1 和 Δ_2 上的两个向量场. 若存在微分同胚 $h: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$, 将 $\mathcal{X}_1$ 中的轨线保向或反向映到 $\mathcal{X}_2$ 中, 则称 $\mathcal{X}_1$ 和 $\mathcal{X}_2$ 拓扑等价.

本文的主要结果是对系统 (1.1) 的全局结构进行拓扑分类.

定理 1.1 系统 (1.1) 的全局相图拓扑当 $\mu \leq 1$ 时等价于图 1(a); 当 $1 < \mu < \mu^*$ 时等价于图 1(b); 当 $\mu > \mu^*$ 时等价于图 1(c); 当 $\mu = \mu^*$ 时等价于图 1(c), 其中 $\mu^* \in (10.4722, 10.4723)$.

由图 1 可知, 当 $\mu = 1$ 时, 系统 (1.1) 产生 pitchfork 分岔, 即原点由稳定的结点分支出鞍点和稳定的焦点.

2 Poincaré 紧致化

为了研究系统 (1.1) 无穷远点的定性性质, 我们需要介绍 Poincaré 紧致化.

2.1 Poincaré 紧致化

给定 d 次多项式微分系统

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (2.1)$$

记 $\mathcal{X} = (P, Q)$ 为系统 (2.1) 对应的向量场.

称 $\mathbb{S}^2 = \{\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3 : s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1\}$ 为 Poincaré 球面. 我们定义 $\mathcal{X}$ 对应的 Poincaré 紧致化向量场 $p(\mathcal{X})$ 如下.

首先, 将平面 $\mathbb{R}^2$ 延拓到空间 $\mathbb{R}^3$ 中的平面 $(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$, 然后利用过单位球心的直线, 将平面 $(x, y, 1)$ 上的点映射到 Poincaré 球面 $\mathbb{S}^2$ 上的两个点. 显然, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上的无穷远点对应球面的赤道.

为了研究 Poincaré 球面上的动力学行为, 我们引入 6 个局部坐标:

$$U_i = \{\mathbf{s} \in \mathbb{S}^2 : s_i > 0\}, \quad V_i = \{\mathbf{s} \in \mathbb{S}^2 : s_i < 0\}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

$p(\mathcal{X})$ 在 U_1 上对应系统

$$\frac{du}{dt} = v^d \left[-uP\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right], \quad \frac{dv}{dt} = -v^{d+1}Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right). \quad (2.3)$$

$p(\mathcal{X})$ 在 U_2 上则对应系统

$$\frac{du}{dt} = v^d \left[-uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right], \quad \frac{dv}{dt} = -v^{d+1}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right). \quad (2.4)$$

由对称性, $p(\mathcal{X})$ 在 V_i ($i = 1, 2$) 上对应系统分别为 $p(\mathcal{X})$ 在 U_i 上的系统乘以 $(-1)^{d-1}$. $p(\mathcal{X})$ 在 $U_3 \equiv V_3$ 上对应原系统

$$\frac{du}{dt} = P(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = Q(u, v). \quad (2.5)$$

根据前面的介绍, 研究系统 (2.1) 的全局相图, 我们仅需考虑定义在北半球面连同赤道上的紧致化向量场 $p(\mathcal{X})$ 的动力学性质. 然后将其垂直投影, 得到 Poincaré 圆盘 $\mathbb{D}^2 = \{s_1^2 + s_2^2 \leq 1, s_3 = 0\}$.

在 U_3 上, 我们可以研究系统 (2.1) 有限奇点的性态, 它们处于 Poincaré 圆盘 $\mathbb{D}^2$ 内部. 系统 (2.1) 的无穷远点对应 Poincaré 圆盘的边界. 为了研究系统 (2.1) 的无穷远点, 我们仅需考虑 $U_1|_{(u,0)}$ 、 $V_1|_{(u,0)}$ 、 $U_2|_{(0,0)}$ 和 $V_2|_{(0,0)}$.

有关 Poincaré 紧致化的详细介绍参见文献 [31, 第 5 章].

对系统 (1.1) 作变换 (2.3) 得 $\frac{du}{dt} = 1 - v - u^3 + \mu u^2 v$, $\frac{dv}{dt} = v^2(v - u^2 + \mu uv)$. 在 U_1 上得到唯一的无穷远点 $(1, 0)$ 为稳定结点. 由于系统 (1.1) 是二次系统, 根据对称性可知, 在 V_1 上存在与 $(1, 0)$ 对应的无穷远点, 它为不稳定结点.

对系统 (1.1) 作变换 (2.4) 得

$$\frac{du}{dt} = 1 - \mu v - u^3 + u^2 v, \quad \frac{dv}{dt} = v(v - u^2 + uv). \quad (2.6)$$

易知系统 (1.1) 在 U_2 和 V_2 上没有无穷远奇点.

为了判别系统 (1.1) 有限奇点的个数, 我们介绍下面的结果 (参见文献 [32]).

引理 2.1 对一般的四次多项式

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4, \quad a_0 \neq 0, \quad (2.7)$$

定义如下参数:

$$\begin{aligned} E &= 8a_0^2 a_3 + a_1^3 - 4a_0 a_1 a_2, \\ D_2 &= 3a_1^2 - 8a_0 a_2, \\ D_3 &= 16a_0^2 a_2 a_4 - 18a_0^2 a_3^2 - a_0 a_2^3 + 14a_0 a_1 a_2 a_3 - 6a_0 a_1^2 a_4 + a_1^2 a_2^2 - 3a_1^3 a_3, \\ D_4 &= 256a_0^3 a_4^3 - 27a_0^2 a_3^4 - 192a_0^2 a_1 a_3 a_4^2 - 27a_1^4 a_4^2 - 6a_0 a_1^2 a_3^2 a_4 + a_1^2 a_2^2 a_3^2 \\ &\quad - 4a_0 a_2^3 a_3^2 + 18a_1^3 a_2 a_3 a_4 + 144a_0 a_1^2 a_2 a_4^2 - 80a_0 a_1 a_2^2 a_3 a_4 + 18a_0 a_1 a_2 a_3^3 \\ &\quad - 4a_1^2 a_2^3 a_4 - 4a_1^3 a_3^3 + 16a_0 a_2^4 a_4 - 128a_0^2 a_2^2 a_4^2 + 144a_0^2 a_2 a_3^2 a_4. \end{aligned} \quad (2.8)$$

下面的结论成立:

- (i) 若 $D_4 > 0, D_3 > 0, D_2 > 0$, 则 (2.7) 有 4 个简单实零点;
- (ii) 若 $D_4 < 0$, 则 (2.7) 有两个简单实零点和一对共轭复零点;
- (iii) 若 $D_4 = 0, D_3 = 0, D_2 > 0, E \neq 0$, 则 (2.7) 有一个简单实零点和一个三重实零点.

利用引理 2.1, 我们可以分析系统 (1.1) 的有限奇点个数.

系统 (1.1) 的有限奇点必满足

$$f(y) = y(\mu - 1 - (\mu - 1)y - 2y^2 + y^3). \quad (2.9)$$

直接计算得

$$E = -8, \quad D_2 = 4(1 + 2\mu), \quad D_3 = (\mu - 1)^3(4\mu^2 + 5\mu + 23), \quad D_4 = 2(\mu - 1)(2\mu^2 + 3\mu + 7). \quad (2.10)$$

若 $\mu < 1$, 则 $D_4 < 0$. 因此, 系统 (1.1) 有两个简单奇点 $E_1 = (0, 0)$ 和 E_2 .

若 $\mu = 1$, 则 $D_2 > 0, D_3 = D_4 = 0$. 因此, 系统 (1.1) 有一个简单奇点 $E_1 = (0, 0)$ 和一个三重奇点 E_2 .

若 $\mu > 1$, 则 D_2, D_3 和 D_4 均为正. 因此, 系统 (1.1) 存在 4 个简单奇点 $E_i, i = 1, 2, 3, 4$.

接下来给出著名的 Bendixson 定理, 参见文献 [31, 定理 7.10].

定理 2.1 (Bendixson 定理) 若在单连通域 $\mathcal{R}$ 中, 系统 (1.1) 的发散量保持常号, 且不在 $\mathcal{R}$ 的任何子区域中恒为 0, 则系统 (1.1) 不存在全部位于 $\mathcal{R}$ 中的闭轨线.

由 Bendixson 定理可得如下初步结果.

命题 2.1 系统 (1.1) 既不存在周期轨, 也没有如图 2(a) 所示的同宿环.

证明 易知系统 (1.1) 的发散量为 -2 , 由定理 2.1 可知系统 (1.1) 不存在周期轨. 假设系统 (1.1) 存在包含鞍点 E_2 的同宿环 Γ , 参见图 2(a). 利用 Green 公式, 可得

$$\int_{\Gamma} Pdy - Qdx = \iint_{\text{int}(\Gamma)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.11)$$

一方面, 由于 Γ 是系统 (1.1) 的轨线, 沿着 Γ 有 $Pdy - Qdx = 0$, 故 (2.11) 左侧等于 0. 另一方面, 由系统 (1.1) 发散量为 -2 , 可得 (2.11) 右侧为负. 矛盾. $\square$

为了研究系统 (1.1) 有限奇点的局部动力学性质, 我们需要介绍 Poincaré-Hopf 定理 (参见文献 [31, 定理 6.30]) 和 Berlinskii 定理 (参见文献 [33, 定理 7]).

定理 2.2 (Poincaré-Hopf 定理) Poincaré 球面 S^2 上连续向量场若只有孤立奇点, 则所有奇点的指数和为 2.

定理 2.3 (Berlinskii 定理) 假定二次多项式微分系统 (2.1) 存在四个有限奇点. 若奇点组成凸四边形, 则它们必由两个非鞍点 (焦点、中心或结点) 和两个不相邻的鞍点组成. 若四边形非凸, 则由三个外部鞍点和一个内部非鞍点, 或者三个外部非鞍点和一个内部鞍点构成.

系统 (1.1) 有限奇点的局部动力学性质如下.

命题 2.2 下面的结论成立.

- (i) 若 $\mu < 0$, 系统 (1.1) 存在两个奇点: $E_1 = (0, 0)$ 为稳定双曲焦点, E_2 为鞍点.
- (ii) 若 $0 \leq \mu < 1$, 系统 (1.1) 存在两个奇点: E_1 为稳定双曲结点, E_2 为鞍点.
- (iii) 若 $\mu = 1$, 系统 (1.1) 存在两个奇点: E_1 为稳定半双曲结点, $E_2 = (2, 2)$ 为鞍点.
- (iv) 若 $\mu > 1$, 系统 (1.1) 存在四个奇点: E_1 和 E_2 为鞍点, E_3 和 E_4 为稳定双曲焦点 (参见图 2(b)).

图 2 (a) 同宿环 ($\mu \in \mathbb{R}$); (b) 系统 (1.1) 有限奇点附近的局部动力学性质 (当 $\mu > 1$ 时), 其中 l_1, l_2, l_4 分别为过 E_1 与 E_3, E_2, E_4 的直线, l_3 为直线 $y = x$, l_5 为过 E_2 和 E_3 的直线

证明 首先考虑奇点 $E_1 = (0, 0)$. 系统 (1.1) 在该点的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\mu & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

易知 (2.12) 的特征值分别为 $-1 - \sqrt{\mu}$ 和 $-1 + \sqrt{\mu}$. 因此, 当 $\mu > 1$ 时, $E_1 = (0, 0)$ 为鞍点; 当 $0 \leq \mu < 1$ 时, $E_1 = (0, 0)$ 为稳定双曲结点; 当 $\mu < 0$ 时, $E_1 = (0, 0)$ 为稳定双曲焦点. 当 $\mu = 1$ 时, 作变换 $X = x - y, Y = x + y, T = -t$, 系统 (1.1) 转化为

$$\frac{dX}{dT} = XY, \quad \frac{dY}{dT} = 2Y - \frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2}. \quad (2.13)$$

根据文献 [31, 定理 2.19(ii)] 可知, 系统 (2.13) 的原点为不稳定半双曲结点. 注意到我们作了反时间变换, 因此, 系统 (1.1) 中 $E_1 = (0, 0)$ 为稳定半双曲结点.

下面考虑其他奇点. 当 $\mu = 1$ 时, 显然 $E_2 = (2, 2)$ 为鞍点. 当 $\mu < 1$ 时, 由于系统 (1.1) 的两个无穷远点为双曲结点, $E_1 = (0, 0)$ 为焦点或结点, 根据定理 2.2 可以推断 E_2 必为鞍点.

当 $\mu > 1$ 时, 根据系统 (1.1) 的两个无穷远点为双曲结点并再次运用定理 2.2 可知, 奇点 E_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 的指数和必为 0. 由定理 2.3 知奇点 E_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 组成凸四边形. 因此, E_2 为鞍点, E_3 和 E_4 为双曲非鞍点 (可能为结点、焦点或中心). 又根据系统 (1.1) 不存在周期轨, 故 E_3 和 E_4 不可能是中心. 接下来推断 E_3 和 E_4 为稳定焦点. 系统 (1.1) 在任意点 (x, y) 的 Jacobi 矩阵的特征值为

$$\lambda_{\pm} = -1 \pm \sqrt{(2x - \mu)(2y - 1)}. \quad (2.14)$$

令 $\mu = 2$, 则 E_3 和 E_4 为稳定焦点. 因 $(2x - \mu)(2y - 1)$ 当 $\mu > 1$ 时在 E_3 和 E_4 不为 0, 并注意到 E_3 和 E_4 的特征值之和为 -2 , 因此, 当 $\mu > 1$ 时, E_3 和 E_4 为稳定焦点. $\square$

3 定理 1.1 的证明

令 $\varphi(t, p)$ 为系统 (1.1) 满足 $\varphi(0, p) = p$ 的解. $\omega(p)$ 或 $\omega(\varphi)$ 记为 $\varphi(t, p)$ 正半轨线的 ω - 极限集. $\alpha(p)$ 或 $\alpha(\varphi)$ 记为 $\varphi(t, p)$ 负半轨线的 α - 极限集. 关于 α - 和 ω - 极限集的介绍参见文献 [31, 第 1 章].

在证明主要结果之前, 我们给出著名的 Poincaré-Bendixson 定理 (参见文献 [31, 推论 1.30]) 和 Markus-Neumann-Peixoto 定理 (参见文献 [31, 定理 1.43]).

定理 3.1 (Poincaré-Bendixson 定理) 若 $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p) : t \geq 0\}$ (或 $\gamma_p^- = \{\varphi(t, p) : t \leq 0\}$) 有界, 则 $\omega(p)$ (或 $\alpha(p)$) 亦有界, 且只能是下列三种类型之一: (i) 一条闭轨线; (ii) 一个奇点; (iii) 一条奇异闭轨线.

记 $p(\mathcal{X})$ 为 $\mathcal{X}$ 的 Poincaré 紧致化向量场. 若 $p(\mathcal{X})$ 含有限个奇点, 则 Poincaré 圆盘 $\mathbb{D}^2$ 上定义的 $p(\mathcal{X})$ 分界线 Σ 为闭集. 它包含有限奇点、无穷远点、极限环和图. 每个连通开集 $\mathbb{D}^2 \setminus \Sigma$ 称为标准区域. 向量场 $\mathcal{X}$ 或 $p(\mathcal{X})$ 的分界构架 (separatrix skeleton) $\mathcal{S}$ 为 Σ 并在每个标准区域添加一条轨线. 若存在微分同胚 $h: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$, 则称向量场 $\mathcal{X}_1$ 和 $\mathcal{X}_2$ 分别对应的分界构架 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 等价.

定理 3.2 (Markus-Neumann-Peixoto 定理) 假设向量场 $\mathcal{X}_1$ 和 $\mathcal{X}_2$ 对应的 Poincaré 紧致化向量场 $p(\mathcal{X}_1)$ 和 $p(\mathcal{X}_2)$ 具有有限条分界线, 则 Poincaré 圆盘上的相图等价当且仅当分界构架是等价的.

当 $\mu > 1$ 时, 为了确定鞍点 E_1 和 E_2 分界线的相互位置 (参见图 2(b)), 我们介绍下面的结果 (参见文献 [33]).

引理 3.1 假设过奇点 P_1 和 P_2 的直线并非系统 (1.1) 的轨线, 则向量场在 ∞P_1 与 $P_2 \infty$ 部分同向, 与 $P_1 P_2$ 反向.

定理 1.1 的证明 由第 2 节的分析可知, 系统 (1.1) 存在两个无穷远点, 分别为稳定结点和不稳定结点, 并且系统 (1.1) 不存在周期解和同宿环.

(I) $\mu < 0$. 由命题 2.2(i), 系统 (1.1) 有两个有限奇点: $E_1 = (0, 0)$ 为稳定双曲焦点, E_2 为鞍点.

由定理 3.1 可得, 鞍点 E_2 四条分界线的 α - 或 ω - 极限集必为奇点. 此外, 鞍点 E_2 两条不稳定的分界线不可能同时趋于稳定焦点 E_1 . 根据上面的分析, 鞍点 E_2 两条不稳定分界线分别以稳定焦点 E_1 和无穷远处稳定结点为 ω - 极限集. 鞍点 E_2 两条稳定分界线的 α - 极限集为无穷远处的不稳定结点. 因此, 当 $\mu < 0$ 时, 系统 (1.1) 的全局相图拓扑等价于图 1(a).

(II) $0 \leq \mu \leq 1$. 系统 (1.1) 存在两个有限奇点: $E_1 = (0, 0)$ 当 $\mu \in [0, 1)$ 时为稳定双曲结点, 当 $\mu = 1$ 时为稳定半双曲结点. 由命题 2.2(ii) 和 2.2(iii) 知, E_2 为鞍点. 类似于情形 (I) 中的分析可得, 当 $0 \leq \mu \leq 1$ 时, 系统 (1.1) 的全局相图拓扑等价于图 1(a).

(III) $\mu > 1$. 系统 (1.1) 存在 4 个有限奇点: E_i ($i = 1, 2, 3, 4$) (参见图 2(b)). E_i ($i = 1, 2$) 为鞍点, 它们的两条稳定分界线分别记为 $s_{i,1}$ 和 $s_{i,2}$, 两条不稳定分界线则分别记为 $s_{i,3}$ 和 $s_{i,4}$. E_i ($i = 3, 4$) 为稳定双曲焦点.

我们将证明过程分成 5 步.

第 1 步 系统 (1.1) 在直线 l_1 上的向量场方向可以如下确定. 由系统 (1.1) 轨线在无穷远点的走向可知, ∞E_1 部分的向量场方向如图 2(b) 中所示. 根据引理 3.1, 我们进而能够确定 $E_1 E_3$ 和 $E_3 \infty$ 部分向量场方向. 类似地可确定系统 (1.1) 在直线 l_2 、 l_4 和 l_5 上的向量场方向. 在直线 $l_3: y = x$ 上, 向量 $(-1, 1)$ 和 $(y^2 - y - x, x^2 - \mu x - y)$ 的内积等于 $(1 - \mu)x$, 故系统 (1.1) 在直线 l_3 上的向量场方向如图 2(b) 所示.

根据上面的分析, 我们容易确定鞍点 E_1 和 E_2 的分界线所在位置如图 2(b) 所示. 令 $\mu = 2$, 则奇点 E_2 和 E_3 位于 $y < x$ 区域, E_4 则处于 $y > x$ 区域. 考虑到 l_3 上向量场走向, 并注意到由奇点 E_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 组成的是凸四边形, 我们可以断定, 当 $\mu > 1$ 时奇点 E_2 和 E_3 总位于 $y < x$ 区域, E_4 则处于 $y > x$ 区域.

第 2 步 由于系统 (1.1) 不存在同宿环 (参见命题 2.1), 并注意到系统 (1.1) 在直线 l_3 和 l_4 上向量场方向, 容易确定鞍点 E_1 的稳定分界线 $s_{1,3}$ 以无穷远处不稳定结点为 α - 极限集. 类似可证: 鞍点

E_1 的稳定分界线 $s_{1,4}$ 仍以无穷远处不稳定结点为 α - 极限集; 鞍点 E_2 的稳定分界线 $s_{2,2}$ 则以无穷远处稳定结点为 ω - 极限集.

第 3 步 由图 2(b) 可知, 鞍点 E_1 的分界线 $s_{1,4}$ 必与 l_4 交于 ∞E_4 部分. 因系统 (1.1) 不存在极限环, 根据 Poincaré-Bendixson 定理, 鞍点 E_1 的分界线 $s_{1,2}$ 只能以稳定焦点 E_4 为 ω - 极限集, 同时鞍点 E_2 的分界线 $s_{2,3}$ 趋于无穷远处的不稳定结点.

第 4 步 因系统 (1.1) 不存在极限环, 根据 Poincaré-Bendixson 定理, 我们可以断定鞍点 E_2 的分界线 $s_{2,1}$ 必趋于稳定焦点 E_3 . 否则, $s_{2,1}$ 趋于无穷远处的稳定结点, 从而导致鞍点 E_2 分界线 $s_{2,4}$ 的 α - 极限集不存在.

第 5 步 最后讨论分界线 $s_{1,1}$ 和 $s_{2,4}$ 的位置. 鞍点 E_1 的不稳定分界线 $s_{1,1}$ 的 ω - 极限集有两种可能, 分别是稳定焦点 E_3 或无穷远稳定结点.

(III.1) 若鞍点 E_1 的不稳定分界线 $s_{1,1}$ 的 ω - 极限集为稳定焦点 E_3 , 则鞍点 E_2 的稳定分界线 $s_{2,4}$ 的 α - 极限集必为无穷远处不稳定结点. 在此情形下, 利用平面微分系统定性理论的相关知识分析可得, 系统 (1.1) 的全局相图拓扑等价于图 1(b). 事实上, 当 $\mu > 1$ 且接近 1 时, 利用平面多项式相图软件 P4 很容易验证文献 [31, 第 9 和 10 章] 中的结果.

(III.2) 若鞍点 E_1 的不稳定分界线 $s_{1,1}$ 的 ω - 极限集为无穷远处稳定结点, 则鞍点 E_2 的稳定分界线 $s_{2,4}$ 的 α - 极限集也是无穷远处不稳定结点. 在此情形下, 系统 (1.1) 的全局相图拓扑等价于图 1(c). 令 $\mu = 20$, 则系统 (1.1) 的全局相图如图 1(c) 所示.

(III.3) 由 (III.1) 和 (III.2) 中的分析结果, 再根据连续性可知, 必存在 $\mu = \mu^*$, 使得鞍点 E_1 的分界线 $s_{1,1}$ 与鞍点 E_2 的分界线 $s_{2,4}$ 重合. 在此情形下, 系统 (1.1) 的全局相图拓扑等价于图 1(d). 通过数值模拟, 我们发现 $\mu^* \in (10.4722, 10.4723)$.

至此定理 1.1 的证明完成. $\square$

致谢 本文是李时敏受国家留学基金委资助 (学号 201608440447), 在巴塞罗那自治大学访学期间与 Jaume Llibre 教授合作完成的.

参考文献

- 1 Artés J C, Llibre J, Vulpe N. Quadratic systems with a polynomial first integral: A complete classification in the coefficient space $\mathbb{R}$. J Differential Equations, 2009, 246: 3535–3558
- 2 Artés J C, Llibre J, Vulpe N. Quadratic systems with an integrable saddle: A complete classification in the coefficient space $\mathbb{R}^{12}$. Nonlinear Anal, 2012, 75: 5416–5447
- 3 Artés J C, Rezende A C, Oliveira R D S. Global phase portraits of quadratic polynomial differential systems with a semi-elemental triple node. Internat J Bifur Chaos, 2013, 23: 1350140
- 4 Cairó L, Llibre J. Phase portraits of planar semi-homogeneous vector fields-I. Nonlinear Anal, 1997, 29: 783–811
- 5 Cairó L, Llibre J. Phase portraits of quadratic polynomial vector fields having a rational first integral of degree 2. Nonlinear Anal, 2007, 67: 327–348
- 6 Coll B, Ferragut A, Llibre J. Phase portraits of the quadratic systems with a polynomial inverse integrating factor. Internat J Bifur Chaos, 2009, 19: 765–783
- 7 Llibre J, Oliveira R D S. Phase portraits of quadratic polynomial vector fields having a rational first integral of degree 3. Nonlinear Anal, 2009, 70: 3549–3560
- 8 Schlomiuk D, Vulpe N. Geometry of quadratic differential systems in the neighborhood of infinity. J Differential Equations, 2005, 215: 357–400
- 9 Cairó L, Llibre J. Phase portraits of cubic polynomial vector fields of Lotka-Volterra type having a rational first integral of degree 2. J Phys A, 2007, 40: 6329–6348
- 10 Buzzi C A, Llibre J, Medrado J C R. Phase portraits of reversible linear differential systems with cubic homogeneous polynomial nonlinearities having a non-degenerate center at the origin. Qual Theory Dyn Syst, 2009, 7: 369–403
- 11 Cairó L, Llibre J. Phase portraits of planar semi-homogeneous vector fields (II). Nonlinear Anal, 2000, 39: 351–363

- 12 Caubergh M, Llibre J, Torregrosa J. Global phase portraits of some reversible cubic centers with collinear or infinitely many singularities. *Internat J Bifur Chaos*, 2012, 22: 1250273
- 13 Caubergh M, Torregrosa J. Global phase portraits of some reversible cubic centers with non collinear singularities. *Internat J Bifur Chaos*, 2013, 23: 1350161
- 14 石仁祥, 巩金慧, 于江. 一类平面 3 次扩展拟齐次系统的分岔. *中国科学: 数学*, 2017, 47: 187–198
- 15 Zhu C, Lan K. Phase portraits, Hopf bifurcations and limit cycles of Leslie-Gower predator-prey systems with harvesting rates. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2010, 14: 289–306
- 16 Lan K Q, Zhu C R. Phase portraits, Hopf bifurcations and limit cycles of the Holling-Tanner models for predator-prey interactions. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 2011, 12: 1961–1973
- 17 Cairó L, Llibre J. Phase portraits of planar semi-homogeneous vector fields (III). *Qual Theory Dyn Syst*, 2011, 10: 203–246
- 18 Itikawa J, Llibre J. Phase portraits of uniform isochronous quartic centers. *J Comput Appl Math*, 2015, 287: 98–114
- 19 Itikawa J, Llibre J. Global phase portraits of uniform isochronous centers with quadratic homogeneous polynomial nonlinearities. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2016, 21: 121–131
- 20 Liang H, Huang J, Zhao Y. Classification of global phase portraits of planar quartic quasi-homogeneous polynomial differential systems. *Nonlinear Dynam*, 2014, 78: 1659–1681
- 21 Carletti T, Rosati L, Villari G. Qualitative analysis of the phase portrait for a class of planar vector fields via the comparison method. *Nonlinear Anal*, 2007, 67: 39–51
- 22 Chen H, Chen X. Dynamical analysis of a cubic Liénard system with global parameters. *Nonlinearity*, 2015, 28: 3535–3562
- 23 Chen H, Chen X. Dynamical analysis of a cubic Liénard system with global parameters (II). *Nonlinearity*, 2016, 29: 1798–1826
- 24 Chen H, Chen X, Xie J. Global phase portrait of a degenerate Bogdanov-Takens systems with symmetry. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2017, 22: 1273–1293
- 25 Gasull A, Guillamon A, Mañosa V. Phase portrait of Hamiltonian systems with homogeneous nonlinearities. *Nonlinear Anal*, 2000, 42: 679–707
- 26 Guillamon A, Pantazi C. Phase portraits of separable Hamiltonian systems. *Nonlinear Anal*, 2011, 74: 4012–4035
- 27 Martínez Y P, Vidal C. Classification of global phase portraits and bifurcation diagrams of Hamiltonian systems with rational potential. *J Differential Equations*, 2016, 261: 5923–5948
- 28 Cao F, Jiang J. The classification on the global phase portraits of two-dimensional Lotka-Volterra system. *J Dynam Differential Equations*, 2008, 20: 797–830
- 29 Dumortier F, Herssens C. Tracing phase portraits of planar polynomial vector fields with detailed analysis of the singularities. *Qual Theory Dyn Syst*, 1999, 1: 97–130
- 30 Rajapakse I, Smale S. The pitchfork bifurcation. *Internat J Bifur Chaos*, 2017, 27: 1750132
- 31 Dumortier F, Llibre J, Artés J C. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006
- 32 Yang L. Recent advances on determining the number of real roots of parametric polynomials. *J Symbolic Comput*, 1999, 28: 225–242
- 33 Coppel W A. A survey of quadratic systems. *J Differential Equations*, 1966, 2: 293–304

Global phase portraits of the key pitchfork bifurcation

Shimin Li & Jaume Llibre

Abstract This paper deals with the following quadratic polynomial differential system $\frac{dx}{dt} = y^2 - y - x$, $\frac{dy}{dt} = x^2 - \mu x - y$, with parameter $\mu \in \mathbb{R}$, which is the key example for studying the pitchfork bifurcation of a singular point. We classify the global phase portraits in the Poincaré disc of this system when μ varies.

Keywords phase portrait, pitchfork bifurcation, Poincaré compactification

MSC(2010) 34C05, 34C23, 37G15

doi: 10.1360/SCM-2018-0266