带深井位势双调和方程的解

郭玉霞¹, 唐仲伟², 汪路顺^{2*}

1. 清华大学数学科学系, 北京 100084;

2. 北京师范大学数学科学学院, 北京 100875

E-mail: yguo@math.tsinghua.edu.cn, tangzw@bnu.edu.cn, lushun@mail.bnu.edu.cn

收稿日期: 2017-10-25; 接受日期: 2017-12-25; 网络出版日期: 2018-06-29; * 通信作者

摘要 本文研究下述双调和方程极小能量解的存在性:

$$\Delta^2 u + [\lambda V(x) - \delta]u = |u|^{p-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (0.1)$$

其中 $N \geq 5$, $\lambda > 0$. p 是次临界或临界的 Sobolev 指标, 即 $2 < p \leq 2^{**}$, 这里 $2^{**} = \frac{2N}{N-4}$ 为临界的 Sobolev 指标, $V(x)$ 是非负连续的深井位势, 其零集 $V^{-1}(0) := \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) = 0\}$ 的内部 $\text{int}V^{-1}(0)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中非空的有界光滑区域. 令 μ_0 为定义在 $\text{int}V^{-1}(0)$ 中齐次边界条件下 Δ^2 的第一特征值. 对任意的 $0 < \delta < \mu_0$, 本文证明: 当 $\lambda > 0$ 充分大时, (0.1) 存在一个在 $V^{-1}(0)$ 附近的极小能量解.

关键词 极小能量解 双调和方程 深井位势

MSC (2010) 主题分类 35Q55, 35J66

1 引言

本文考虑下述双调和方程极小能量解的存在性:

$$\Delta^2 u + [\lambda V(x) - \delta]u = |u|^{p-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.1)$$

其中 $N \geq 5$, $\delta > 0$, $\lambda > 0$, $2 < p \leq 2^{**}$, $V(x)$ 为非负连续的深井位势.

双调和方程与多项式调和方程在物理与几何上具有广泛的应用. 双调和方程作为一个数学模型, 可以用来描述物理和工程中的一些现象, 如悬浮桥的非线性震荡问题^[1,2]和流体中弹性材料的静力偏差问题^[3]. 详细地, 考虑薄板小偏差下的弹性力学兼容性方程, 或者大型薄板偏差下描述力学行为的 Von Karma 系统, 我们需要研究一类高阶方程或带双调和算子 Δ^2 的系统. 在数学上, 双调和算子与 Paneitz 算子密切相关并且具有丰富的几何结构, 具体参见文献 [4,5] 及其相关的参考文献.

对于双调和方程解的存在性与多重性, 我们介绍如下的一些结果. Alves 等^[6]证明了临界的半线性双调和方程非平凡解的存在性. Salvatore 和 Squassina^[7]证明了无界区域上非其次的边界条件下多项

英文引用格式: Guo Y X, Tang Z W, Wang L S. Solutions of biharmonic equations with steep potential wells (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 21–38, doi: 10.1360/SCM-2017-0736

式调和方程无穷解的存在性. Pimenta 和 Soares^[8] 得到了双调和方程解的存在性与集中性. Figueiredo 和 Pimenta^[9] 证明了双调和方程解的多重性.

最近, 很多学者研究了带深井位势的双调和方程解的存在性与集中性. Zhang 等^[10] 考虑了下述双调和方程:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \Delta u + \lambda V(x)u = f(x, u), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 $\lambda > 0$; $V \geq 0$ 是连续的深井位势, 其零集 $V^{-1}(0)$ 的内部 Ω 为非空的光滑有界区域, $f(x, u)$ 连续且满足次线性增长. 他们采用约束极小的方法证明了, 当 λ 充分大时, (1.2) 存在一个极小能量解 u_λ , 并且 u_λ 在 $H^2(\mathbb{R}^N)$ 中收敛到下述极限问题的极小能量解:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \Delta u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ \Delta u = u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Alves 和 Nóbrega^[11] 研究了如下问题:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \Delta u + [\lambda V(x) + 1]u = f(u), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $\lambda > 0$; $V \geq 0$ 是连续的位势, 其零集 $V^{-1}(0)$ 的内部 Ω 由 k 个孤立的联通部分构成, f 连续且满足次临界增长. 受 Bartsch 和 Wang^[12] 的启发, 他们采用形变引理证明了, 当 λ 充分大时, (1.3) 至少存在 $2^k - 1$ 个多胞解.

关于双调和方程与多项式调和方程的其他结果, 我们向读者推荐文献 [13–20] 及其相关的参考文献.

本文主要研究双调和方程 (1.1) 的极小能量解的存在性与集中性.

首先假设

(V₁) $V(x) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $V(x) \geq 0$, $0 < V_\infty := \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) < \infty$;

(V₂) $V(x)$ 的零集 $V^{-1}(0) := \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) = 0\}$ 的内部, 记为 $\Omega := \text{int } V^{-1}(0)$, 是 $\mathbb{R}^N$ 中非空的有界光滑区域;

(V₃) $0 < \delta < \mu_0$, 其中 μ_0 是 Δ^2 定义在 $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 中的第一特征值.

注 1.1 条件 (V₁) 可换成如下条件:

($\hat{V}_1$) $V(x) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, 且存在 $M_0 > 0$ 使得集合 $\{x \in \mathbb{R}^N : 0 \leq V(x) \leq M_0\}$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中有界.

事实上, 该条件可由 (V₁) 推出. 选择 $M_0 = \frac{1}{2}V_\infty$, (V₁) 和 (V₂) 推得, 存在 $R > 0$ 使得

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M_0\} \subset B_R(0), \quad (1.4)$$

其中 $B_R(0)$ 表示以 0 为心、 R 为半径的球. 在后面的证明中, 我们多次用到条件 (1.4), 而没有用到 $V(x)$ 的有界性.

注 1.2 在 (V₂) 中, 区域边界 $\partial\Omega$ 的光滑性可以减弱为 $\partial\Omega$ 是凸的, 或者 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的且满足一致外球条件. 事实上, 在这些边界条件下, 我们可以证明 $[\int_\Omega (\Delta u)^2 dx]^{1/2}$ 和 $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 中的标准范数等价 (参见文献 [21, 定理 2.31]).

为了陈述主要结果, 我们需要介绍一些记号.

记 $V_\lambda(x) := \lambda V(x) - \delta$, 定义 Hilbert 空间 $X = \{u \in H^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < \infty\}$, 其范数为

$$\|u\|_{\lambda,0} := \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + V_\lambda^+(x)u^2] dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in X,$$

其中 $V_\lambda^+(x) = \max\{V_\lambda(x), 0\}$. 当 $\lambda > 0$ 充分大时, 我们将会证明 $\|u\|_\lambda := \{\int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + V_\lambda(x)u^2] dx\}^{\frac{1}{2}}$ 与 $\|\cdot\|_{\lambda,0}$ 等价 (见引理 2.4). 为方便起见, 我们不区分这两个范数并将该 Hilbert 空间简记为 X_λ .

定义 X_λ 上的泛函 $J_\lambda(u)$ 为

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + V_\lambda(x)u^2] dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx.$$

其在 $u \in X_\lambda$ 处的 Frechét 导数 $J'_\lambda(u)$ 为

$$\langle J'_\lambda(u), w \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [\Delta u \Delta w + V_\lambda(x)uw] dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u w dx, \quad \forall w \in X_\lambda.$$

定义 Nehari 流形 $\mathcal{N}_\lambda$ 如下: $\mathcal{N}_\lambda = \{u \in X_\lambda \setminus \{0\} : \langle J'_\lambda(u), u \rangle = 0\}$, 并记 $c_\lambda = \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda} J_\lambda(u)$.

不难证明 $J_\lambda(u)$ 在 X_λ 中是 C^1 的, 即 $J'_\lambda(u)$ 是从 X_λ 到其对偶空间 X_λ^* 的连续算子. 若存在 $u \in X_\lambda$ 使得 $J'_\lambda(u) = 0$, 则称 u 是方程 (1.1) 的一个弱解. 若 $u \neq 0$, 则称 u 是非平凡的. 由于方程 (1.1) 所有的非平凡解均在 $\mathcal{N}_\lambda$ 上, 且 J_λ 在 $\mathcal{N}_\lambda$ 上的极小值点是方程 (1.1) 的非平凡解. 因此, 若存在 $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda$ 使得 c_λ 可达到, 则称 u_λ 为方程 (1.1) 的极小能量解, 其能量 c_λ 称为极小能量.

本文还会考虑如下的双调和方程极小能量解的存在性:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \delta u = |u|^{p-2}u, & x \in \Omega, \\ \Delta u = u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.5)$$

其中 $\Omega = \text{int} V^{-1}(0)$. 该方程可视为方程 (1.1) 的极限方程.

注 1.3 一般来讲, 由于缺少双调和方程的最大值原理, 方程 (1.1) 和 (1.5) 的极小能量解可能是变号的. 因此, 本文仅考虑非平凡的极小能量解.

类似于方程 (1.1) 的极小能量 c_λ 和极小能量解 u_λ 的定义, 我们同样可以给出极限方程 (1.5) 的极小能量 $c(\Omega)$ 和极小能量解 u 的定义.

本文主要结果叙述如下:

定理 1.1 在条件 $(V_1)-(V_3)$ 下, 若 $N \geq 5$, 则 $2 < p < 2^{**} := \frac{2N}{N-4}$, 若 $N \geq 8$, 则 $p = 2^{**}$. 当 $\lambda > 0$ 充分大时, (1.1) 存在一个极小能量解 $u_\lambda(x)$. 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, u_λ 在 $H^2(\mathbb{R}^N)$ 中收敛到 (1.5) 的极小能量解 $u(x)$.

定理 1.1 的证明过程简述如下: 对充分大的 $\lambda > 0$, 任取 c_λ 的极小化序列, 用 Ekeland 变分原理得到 $(PS)_{c_\lambda}$ ($(Palais-Smale)_{c_\lambda}$) 序列, 再用集中紧性原理和 Brézis-Lieb 引理等变分技巧得到 $(PS)_{c_\lambda}$ 序列的紧性, 进而得到 (1.1) 的极小能量解的存在性, 最后通过 c_λ 和 $c(\Omega)$ 的关系得到 (1.1) 的极小能量解的集中性. 在这个证明的过程中, 我们多次用到了“在 X_λ 中可定义等价范数 $\|\cdot\|_\lambda$ ”和“连续嵌入 $X_\lambda \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ 关于 λ 一致”等性质. 为了得到这些性质, 我们对 $\Delta^2 + \lambda V(x) - \delta$ 的谱进行了细致的分析.

本文结构如下: 第 2 节给出一些预备知识; 第 3 节证明极限方程 (1.5) 的极小能量解的存在性; 第 4 节证明当 $\lambda > 0$ 充分大时 (1.1) 的极小能量解的存在性; 第 5 节证明当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时 (1.1) 的极小能量解的渐近性并完成定理 1.1 的证明.

2 预备知识

首先证明: 当 $\lambda > 0$ 充分大时, X_λ 可以一致嵌入 $H^2(\mathbb{R}^N)$. 然后给出定义在 X_λ 中 $\Delta^2 + \lambda V(x) - \delta$ 的谱的性质. 最后证明: 当 $\lambda > 0$ 充分大时, $\|\cdot\|_{\lambda,0}$ 和 $\|\cdot\|_\lambda$ 是定义在 X_λ 中的等价范数.

引理 2.1 假设 (V₁)–(V₃) 成立, 则存在 $\Lambda_0 > 0$ 和不依赖于 λ 的常数 $C > 0$ 使得对任意的 $\lambda > \Lambda_0$ 和任意的 $u \in X_\lambda$, 有

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{\lambda,0}. \quad (2.1)$$

证明 记 $M_0 = \frac{1}{2}V_\infty$, 由 (1.4) 知,

$$V(x) \geq M_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0); \quad \text{supp } V_\lambda^-(x) \subset B_R(0), \quad \forall \lambda > \frac{\delta}{M_0}, \quad (2.2)$$

其中 $\text{supp } V_\lambda^-(x)$ 表示 $V_\lambda^-(x) := \max\{-V(x), 0\}$ 的支撑集.

当 $\lambda > \frac{M_0+\delta}{M_0}$ 时, 对任意的 $u \in X_\lambda$, 由 (2.2) 得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} u^2 dx &\leq \frac{1}{M_0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} [\lambda V(x) - \delta] u^2 dx \leq \frac{1}{M_0} \int_{\mathbb{R}^N} V_\lambda^+(x) u^2 dx \\ &\leq \frac{1}{M_0} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + V_\lambda^+(x) u^2] dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

由 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式得

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} u^2 dx &\leq \left(\int_{B_R(0)} |u|^{\frac{2N}{N-4}} dx \right)^{\frac{N-4}{N}} |B_R(0)|^{\frac{4}{N}} \\ &\leq C_1 |B_R(0)|^{\frac{4}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx \\ &\leq C_1 |B_R(0)|^{\frac{4}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + V_\lambda^+(x) u^2] dx. \end{aligned} \quad (2.4)$$

结合 (2.3) 和 (2.4), 有

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\Delta u|^2 + u^2) dx \leq \left[\frac{M_0+1}{M_0} + C_1 |B_R(0)|^{\frac{4}{N}} \right] \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + V_\lambda^+(x) u^2] dx.$$

因此, 取 $\Lambda_0 = \frac{M_0+\delta}{M_0}$, $C = \sqrt{\frac{M_0+1}{M_0} + C_1 |B_R(0)|^{\frac{4}{N}}}$, 我们有 (2.1) 成立. $\square$

记 $L_0 = \Delta^2 - \delta$, $L_\lambda = \Delta^2 + V_\lambda(x)$, $\sigma_{\text{ess}}(L_\lambda)$ 为定义在 X_λ 中 L_λ 的本性谱. 下述引理给出了 L_λ 本性谱的范围.

引理 2.2 在条件 (V₁)–(V₃) 下, 对任意的 $\lambda > \Lambda_0$, 都有

$$\sigma_{\text{ess}}(L_\lambda) \subset [\lambda M_0 - \delta, \infty).$$

进一步, 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $\inf \sigma_{\text{ess}}(L_\lambda) \rightarrow \infty$.

证明 与文献 [22, 命题 2.3] 的证明类似, 我们要求 $\lambda > \Lambda_0$. 为方便读者, 我们给出详细的证明过程.

记 $W_\lambda(x) = V_\lambda(x) - \lambda M_0 + \delta = \lambda(V(x) - M_0)$, $W_{\lambda,1}(x) = \max\{W_\lambda(x), 0\}$, $W_{\lambda,2}(x) = \min\{W_\lambda(x), 0\}$. 由 $W_{\lambda,1}(x) \geq 0$ 得

$$\sigma(\Delta^2 + W_{\lambda,1}(x) + \lambda M_0 - \delta) \subset [\lambda M_0 - \delta, \infty). \quad (2.5)$$

接下来将要证明

$W_{\lambda,2}(x)$ 是 L_λ 紧摄动的一个相对形式.

事实上, 若记 $H_\lambda = \Delta^2 + W_{\lambda,1}(x) + \lambda M_0 - \delta$, 则 $L_\lambda = H_\lambda + W_{\lambda,2}(x)$. 由于 $W_{\lambda,2}(x)$ 有界, 因此, H_λ 和 L_λ 的相对区域相同, 均为 X_λ . 因此, 需要证明

$X_\lambda \mapsto X_\lambda^* : u \mapsto W_{\lambda,2}(x) \cdot u$ 是紧的.

任取有界的序列 $\{u_n\}_{n \geq 1} \subset X_\lambda$, 由引理 2.1 可知, $\{u_n\}_{n \geq 1}$ 在 $H^2(\mathbb{R}^N)$ 中有界. 不妨设, 存在 $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$, 在子列意义下, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{于 } H^2(\mathbb{R}^N), \\ u_n \rightarrow u, & \text{于 } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N), \\ u_n \rightarrow u, & \text{a.e. 于 } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (2.6)$$

由 (2.2) 得 $\text{supp } W_{\lambda,2}(x) \subset B_R(0)$. 因此, Hölder 不等式、Sobolev 不等式和引理 2.1 推得, 对任意的 $\lambda > \Lambda_0$, $v \in X_\lambda$, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} W_{\lambda,2}(x)(u_n - u)v dx \right| &= \left| \int_{B_R(0)} W_{\lambda,2}(x)(u_n - u)v dx \right| \\ &\leq \lambda M_0 \int_{B_R(0)} |(u_n - u)v| dx \\ &\leq \lambda M_0 \left[\int_{B_R(0)} (u_n - u)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R(0)} v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \lambda M_0 \left[\int_{B_R(0)} (u_n - u)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C\lambda \left[\int_{B_R(0)} (u_n - u)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\lambda,0}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

由 (2.6) 和 (2.7), 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\|W_{\lambda,2}(x)u_n - W_{\lambda,2}(x)u\|_{X_\lambda^*} \leq C\lambda \left[\int_{B_R(0)} (u_n - u)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0.$$

因此, $W_{\lambda,2}(x)$ 是 L_λ 紧摄动的一个相对形式.

另一方面, 由经典的 Weyl 定理 (参见文献 [23, 第 117 页例 3]) 知, $\sigma_{\text{ess}}(L_\lambda) = \sigma_{\text{ess}}(H_\lambda)$. 因此, (2.5) 推得

$$\sigma_{\text{ess}}(L_\lambda) \subset [\lambda M_0 - \delta, \infty), \quad \forall \lambda > \Lambda_0.$$

进而, 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $\inf \sigma_{\text{ess}}(L_\lambda) \rightarrow \infty$. □

定义

$$\mu(L_\lambda) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + V_\lambda(x)u^2] dx : u \in X_\lambda, \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = 1 \right\},$$

$$\mu(L_0) = \inf \left\{ \int_{\Omega} (|\Delta u|^2 - \delta u^2) dx : u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} u^2 dx = 1 \right\},$$

则 $\mu(L_0)$ 为 L_0 的第一特征值, 满足 $\mu(L_0) = \mu_0 - \delta \geq \mu(L_{\lambda})$. 由文献 [23, 引理 2.2 和定理 XXX.1] 推出, 当 $\lambda > 0$ 充分大时, $\mu(L_{\lambda})$ 是 L_{λ} 的第一特征值.

下述引理给出了 $\mu(L_{\lambda})$ 与 $\mu(L_0)$ 的关系.

引理 2.3 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $\mu(L_{\lambda}) \rightarrow \mu(L_0)$. 特别地, 存在 $\Lambda_1 > \Lambda_0$, 使得对任意的 $\lambda > \Lambda_1$, 有 $\mu(L_{\lambda}) > \frac{\mu(L_0)}{2}$.

证明 令 $\psi_n \in X_{\lambda_n}$ 为定义在 X_{λ_n} 中与特征值 $\mu(L_{\lambda_n})$ 相关的 L_{λ_n} 的特征函数. 不妨设, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lambda_n \rightarrow \infty$ 且有

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi_n^2 dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta \psi_n|^2 + V_{\lambda_n}(x) \psi_n^2] dx = \mu(L_{\lambda_n}). \quad (2.8)$$

由假设, 有

$$\begin{aligned} \|\psi_n\|_{\lambda_n, 0}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta \psi_n|^2 + V_{\lambda_n}(x) \psi_n^2] dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_{\lambda_n}^-(x) \psi_n^2 dx \\ &= \mu(L_{\lambda_n}) + \int_{\mathbb{R}^N} V_{\lambda_n}^-(x) \psi_n^2 dx \leq \mu(L_0) + \delta. \end{aligned}$$

由引理 2.1 知, $\{\psi_n\}$ 在 $H^2(\mathbb{R}^N)$ 中有界. 在子列意义下, 不妨设, 存在 $\psi \in H^2(\mathbb{R}^N)$, 当 $\lambda_n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{cases} \psi_n \rightharpoonup \psi, & \text{于 } H^2(\mathbb{R}^N), \\ \psi_n \rightarrow \psi, & \text{于 } L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^N), \\ \psi_n \rightarrow \psi, & \text{a.e. 于 } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (2.9)$$

首先证明 $\psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 即证

$$\psi(x) = 0 \quad \text{a.e. 于 } \mathbb{R}^N \setminus \Omega.$$

对任意的整数 $m \geq 1$, 记

$$C_m := \left\{ x \in \mathbb{R}^N : V(x) > \frac{1}{m} \right\}.$$

固定 m , 令 $\lambda_n \rightarrow \infty$, 由 (2.8) 得

$$\begin{aligned} \int_{C_m} \psi^2 dx &\leq \frac{m}{\lambda_n} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x) \psi_n^2 dx \\ &\leq \frac{m}{\lambda_n} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta \psi_n|^2 + \lambda_n V(x) \psi_n^2] dx \\ &\leq \frac{m}{\lambda_n} (\mu(L_{\lambda_n}) + \delta) \leq \frac{m}{\lambda_n} (\mu(L_0) + \delta) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

推得 $\psi(x) = 0$ a.e. $x \in C_m$. 注意到 $\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m = \mathbb{R}^N \setminus \Omega$, 则 $\psi(x) = 0$ a.e. $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

然后证明 $\int_{\Omega} \psi^2 dx = 1$.

实际上, 由 (2.2) 和 (2.8) 得, 当 $\lambda_n \rightarrow \infty$ 时,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \psi_n^2 dx \leq \frac{1}{M_0 \lambda_n} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \lambda_n V(x) \psi_n^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{M_0 \lambda_n} (\mu(L_0) + \delta) \rightarrow 0,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \psi_n^2 dx = 0. \quad (2.10)$$

因此, 由 (2.8)–(2.10) 得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(0)} \psi_n^2 dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_n^2 dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \psi_n^2 dx = 1. \end{aligned}$$

从而, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\psi_n \rightarrow \psi$ 于 $L^2(\mathbb{R}^N)$.

最后证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\mu(L_{\lambda_n}) \rightarrow \mu(L_0)$.

实际上, 由 (2.8) 得

$$\begin{aligned} \mu(L_0) &\leq \int_{\Omega} (|\Delta \psi|^2 - \delta \psi^2) dx \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta \psi_n|^2 + (\lambda_n V(x) - \delta) \psi_n^2] dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(L_{\lambda_n}) \leq \mu(L_0), \end{aligned}$$

即当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\mu(L_{\lambda_n}) \rightarrow \mu(L_0)$.

由于 $\mu(L_{\lambda})$ 关于 λ 单调增, 从而, 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $\mu(L_{\lambda}) \rightarrow \mu(L_0)$. 因此, 由极限的保号性, 存在 $\Lambda_1 > \Lambda_0$, 对任意的 $\lambda > \Lambda_1$, 有 $\mu(L_{\lambda}) > \frac{1}{2} \mu(L_0) > 0$. $\square$

下述引理将会证明, 当 $\lambda > 0$ 充分大时, $\|\cdot\|_{\lambda,0}$ 与 $\|\cdot\|_{\lambda}$ 在 X_{λ} 上等价.

引理 2.4 对任意 $\lambda > \Lambda_1$, 存在不依赖于 λ 的常数 $C_1 > 0$ 和 $C_2 > 0$, 使得对任意的 $u \in X_{\lambda}$, 有

$$C_1 \|u\|_{\lambda,0} \leq \|u\|_{\lambda} \leq C_2 \|u\|_{\lambda,0}. \quad (2.11)$$

证明 对于 $\lambda > \Lambda_1$ 以及任意的 $u \in X_{\lambda}$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + V_{\lambda}(x) u^2] dx \geq \mu(L_{\lambda}) \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \geq \frac{\mu(L_0)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx.$$

因此,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + V_{\lambda}^+(x) u^2] dx &= \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + V_{\lambda}(x) u^2] dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_{\lambda}^-(x) u^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + V_{\lambda}(x) u^2] dx + \delta \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \\ &\leq \frac{\mu(L_0) + 2\delta}{\mu(L_0)} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + V_{\lambda}(x) u^2] dx. \end{aligned}$$

易知

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + V_{\lambda}(x) u^2] dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + V_{\lambda}^+(x) u^2] dx.$$

所以, 取 $C_1 = \sqrt{\frac{\mu(L_0)}{\mu(L_0) + 2\delta}}$, $C_2 = 1$, 上式推出 (2.11) 成立. $\square$

注 2.1 接下来, 除了特别说明, X_λ 表示 $(X, \|\cdot\|_\lambda)$. 由上述引理, 还能得到, 当 $\lambda > \Lambda_1$ 时, X_λ 可一致连续嵌入 $H^2(\mathbb{R}^N)$. 从而, X_λ 可一致连续嵌入 $L^p(\mathbb{R}^N)$, 其中 $2 \leq p \leq 2^{**}$. X_λ 还可以一致紧嵌入 $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, 其中 $2 < p < 2^{**}$. 这些嵌入的控制常数均不依赖于 λ .

3 极限方程极小能量解的存在性

本节考虑下述双调和方程极小能量解的存在性:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \delta u = |u|^{p-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, \quad \Delta u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

其泛函 J_Ω 可定义为, 对任意的 $u \in H(\Omega) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 有

$$J_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|\Delta u|^2 - \delta u^2) dx - \frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p dx.$$

相应的 Nehari 流形 $\mathcal{N}_\Omega$ 定义为

$$\mathcal{N}_\Omega := \{u \in H(\Omega) \setminus \{0\} : \langle J'_\Omega(u), u \rangle = 0\}.$$

极小能量 $c(\Omega)$ 定义为

$$c(\Omega) = \inf_{\mathcal{N}_\Omega} J_\Omega(u).$$

若 $c(\Omega)$ 的达到函数 $u \in \mathcal{N}_\Omega$, 则称 u 是 (3.1) 的极小能量解. 设 $\{u_n\} \subset H(\Omega)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $J_\Omega(u_n) \rightarrow c$, $J'_\Omega(u_n) \rightarrow 0$ 于 $H^*(\Omega)$, 其中 $H^*(\Omega)$ 为 $H(\Omega)$ 的对偶空间, 则称 $\{u_n\}$ 是 J_Ω 的一个 $(\text{PS})_c$ 序列. 如果任意的 $(\text{PS})_c$ 序列 $\{u_n\}$ 在 $H(\Omega)$ 中都存在收敛的子列, 则称 J_Ω 满足 $(\text{PS})_c$ 条件.

由文献 [21, 定理 2.31] 知, 我们可以在 $H(\Omega)$ 上定义新的范数

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\Delta u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H(\Omega),$$

且该范数与 $H^2(\Omega)$ 上的标准范数等价.

首先考虑次临界指标下 (3.1) 的极小能量解的存在性. 我们有如下的引理.

引理 3.1 若 $N \geq 5$, $2 < p < 2^{**}$, $0 < \delta < \mu_0$, 则 $c(\Omega)$ 可达到且达到函数 u 是双调和方程 (3.1) 的极小能量解.

证明 该引理的证明过程是标准的, 为方便读者, 我们仅给出证明的思路.

事实上, 由 $c(\Omega)$ 的定义和 Ekeland 变分原理, 存在 $\{u_n\} \subset H(\Omega)$ 使得, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$J_\Omega(u_n) \rightarrow c(\Omega) \quad \text{且} \quad J'_\Omega(u_n) \rightarrow 0 \quad \text{于} \quad H^*(\Omega).$$

因此, 由 Rellich 嵌入定理知, $J_\Omega(u_n)$ 满足 $(\text{PS})_{c(\Omega)}$ 条件, 即存在子列 $\{u_n\} \subset H(\Omega)$ 和 $u \in \mathcal{N}_\Omega$ 使得 $u_n \rightarrow u$ 于 $H(\Omega)$, 并且 u 满足 $J_\Omega(u) = c(\Omega)$, $J'_\Omega(u) = 0$. $\square$

接下来考虑临界指标下 (3.1) 的极小能量解的存在性. 令

$$S = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx : u \in D^{2,2}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{L^{2^{**}}(\mathbb{R}^N)} = 1 \right\},$$

其中 $D^{2,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^{**}}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx < \infty\}$.

首先通过下述引理给出 $c(\Omega)$ 的上界.

引理 3.2 假定 $N \geq 8$, $p = 2^{**}$, $0 < \delta < \mu_0$, 则 $c(\Omega) < \frac{2}{N} S^{\frac{N}{4}}$.

证明 由文献 [24-26] 知, 在平移伸缩的意义下, S 的达到函数具有如下的形式:

$$U_\varepsilon = c \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^{\frac{N-4}{2}},$$

其中 $\varepsilon > 0$, 常数 c 仅依赖维数 N . 不妨设 $0 \in \Omega$, η 是一个光滑的截断函数, 满足

$$\eta(x) = 1, \quad \forall x \in B_r(0); \quad \text{supp } \eta(x) \subset \Omega.$$

令 $u_\varepsilon(x) = \eta(x)U_\varepsilon(x) \in H(\Omega)$. 直接计算得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\Delta u_\varepsilon|^2 dx &= \int_{B_r(0)} |\Delta U_\varepsilon|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r(0)} |\Delta u_\varepsilon|^2 dx = S^{\frac{N}{4}} + O(\varepsilon^{N-4}), \\ \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{2^{**}} dx &= \int_{B_r(0)} |U_\varepsilon|^{2^{**}} dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r(0)} |u_\varepsilon|^{2^{**}} dx = S^{\frac{N}{4}} + O(\varepsilon^N), \\ \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^2 dx &= \int_{B_\varepsilon(0)} |U_\varepsilon|^2 dx + \int_{B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} |U_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega \setminus B_r(0)} |u_\varepsilon|^2 dx \\ &\geq c^2 \int_{B_\varepsilon(0)} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} \right)^{N-4} dx + c^2 \int_{B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \left(\frac{\varepsilon}{|x|^2 + |x|^2} \right)^{N-4} \\ &\quad + c^2 \varepsilon^{N-4} \int_{\Omega \setminus B_r(0)} \eta^2 \frac{1}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{N-4}} dx \\ &\geq \begin{cases} d\varepsilon^4 |\ln \varepsilon| + O(\varepsilon^4), & \text{若 } N = 8, \\ d\varepsilon^4 + O(\varepsilon^{N-4}), & \text{若 } N \geq 9. \end{cases} \end{aligned}$$

取 $t_\varepsilon > 0$ 使得 $t_\varepsilon u_\varepsilon \in \mathcal{N}_\Omega$, 即

$$t_\varepsilon^2 \left[\int_{\Omega} (|\Delta u_\varepsilon|^2 - \delta u_\varepsilon^2) dx \right] = t_\varepsilon^{2^{**}} \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{2^{**}} dx,$$

则由上式推出

$$t_\varepsilon = \left[\frac{\int_{\Omega} (|\Delta u_\varepsilon|^2 - \delta u_\varepsilon^2) dx}{\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{2^{**}} dx} \right]^{\frac{1}{2^{**}-2}}.$$

因此, 对 $\varepsilon > 0$ 充分小, 有

$$\begin{aligned} c(\Omega) &\leq J_\Omega(t_\varepsilon u_\varepsilon) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{**}} \right) t_\varepsilon^2 \int_{\Omega} (|\Delta u_\varepsilon|^2 - \delta u_\varepsilon^2) dx \\ &= \frac{2}{N} \frac{[\int_{\Omega} (|\Delta u_\varepsilon|^2 - \delta u_\varepsilon^2) dx]^{\frac{N}{4}}}{(\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{2^{**}} dx)^{\frac{N-4}{4}}} \\ &< \frac{2}{N} S^{\frac{N}{4}}. \end{aligned}$$

证毕. □

然后, 采用 Brézis 和 Nirenberg^[27] 给出的方法, 我们将会证明, 当 $c(\Omega) < \frac{2}{N}S^{\frac{N}{4}}$ 时, J_Ω 满足 $(PS)_{c(\Omega)}$ 条件. 我们有下述引理.

引理 3.3 若 $N \geq 8$, $p = 2^{**}$, $0 < \delta < \mu_0$, 则 $c(\Omega)$ 可达到且达到函数 $u \in \mathcal{N}_\Omega$ 是 (3.1) 的极小能量解.

证明 由 Ekeland 变分原理知, 存在 $(PS)_{c(\Omega)}$ 序列 $\{u_n\}$, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, $J_\Omega(u_n) \rightarrow c(\Omega)$, $J'_\Omega(u_n) \rightarrow 0$ 于 $H^*(\Omega)$. 由于 $0 < \delta < \mu_0$, 则当 n 充分大时,

$$\begin{aligned} c(\Omega) + o(1) + o(1)\|u_n\| &\geq J_\Omega(u_n) - \frac{1}{2^{**}} \langle J'_\Omega(u_n), u_n \rangle \\ &= \frac{2}{N} \int_\Omega (|\Delta u|^2 - \delta u^2) dx \\ &\geq \frac{2(\mu_0 - \delta)}{N\mu_0} \|u_n\|^2, \end{aligned}$$

推出 $\{u_n\}$ 在 $H(\Omega)$ 中有界. 因此, 在子列意义下, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{于 } H(\Omega), \\ u_n \rightarrow u, & \text{于 } L^{2^{**}}(\Omega), \\ u_n \rightarrow u, & \text{于 } L^2(\Omega). \end{cases}$$

令 $v_n = u_n - u$, 则由 Brézis-Lieb 引理^[28] 知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\Delta u_n|^2 dx &= \int_\Omega |\Delta u|^2 dx + \int_\Omega |\Delta v_n|^2 dx + o(1), \\ \int_\Omega |u_n|^{2^{**}} dx &= \int_\Omega |u|^{2^{**}} dx + \int_\Omega |v_n|^{2^{**}} dx + o(1), \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned} J_\Omega(u_n) &= J_\Omega(u) + \frac{1}{2} \int_\Omega |\Delta v_n|^2 dx - \frac{1}{2^{**}} \int_\Omega |v_n|^{2^{**}} dx + o(1), \\ \langle J'_\Omega(u_n), u_n \rangle &= \langle J'_\Omega(u), u \rangle + \int_\Omega |\Delta v_n|^2 dx - \int_\Omega |v_n|^{2^{**}} dx + o(1). \end{aligned}$$

不难看出 $J'_\Omega(u) = 0$, $J_\Omega(u) \geq 0$. 现在, 不妨假设

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |\Delta v_n|^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |v_n|^{2^{**}} dx > 0.$$

一方面,

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |v_n|^{2^{**}} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |\Delta v_n|^2 dx \geq S \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_\Omega |v_n|^{2^{**}} dx \right)^{\frac{2}{2^{**}}} = Sb^{\frac{2}{2^{**}}},$$

推出 $b \geq S^{\frac{N}{4}}$. 另一方面,

$$\frac{2}{N} S^{\frac{N}{4}} > c(\Omega) \geq \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |\Delta v_n|^2 dx - \frac{1}{2^{**}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |v_n|^{2^{**}} dx = \frac{2}{N} b,$$

推出 $b < S^{\frac{N}{4}}$. 因此, $b = 0$, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n \rightarrow u$ 于 $H(\Omega)$. 所以, u 是 $c(\Omega)$ 的达到函数. $\square$

4 带深井位势的双调和方程

本节研究次临界和临界情形下双调和方程 (1.1) 的极小能量解的存在性. 先讨论 $(PS)_c$ 序列的性质, 然后分别证明次临界和临界情形下极小能量解的存在性.

4.1 $(PS)_c$ 序列的性质

若 $\{u_n\} \subset X_\lambda$ 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$J_\lambda(u_n) \rightarrow c, \quad J'_\lambda(u_n) \rightarrow 0 \text{ 于 } X_\lambda^*,$$

其中 X_λ^* 是 X_λ 的对偶空间, 则称 $\{u_n\}$ 为泛函 J_λ 的 $(PS)_c$ 序列. 若对任意的 $(PS)_c$ 序列在 X_λ 中都存在收敛的子列, 则称 J_λ 满足 $(PS)_c$ 条件.

下述引理给出 $(PS)_c$ 序列的有界性.

引理 4.1 假设 $N \geq 5$, $2 < p \leq 2^{**}$. 当 $\lambda > \Lambda_1$ 时, 如果 $\{u_n\}$ 是 J_λ 的 $(PS)_c$ 序列, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\lambda^2 = \frac{2pc}{p-2}. \quad (4.1)$$

证明 由于 $\{u_n\}$ 是 $(PS)_c$ 序列, 则对任意的 $\lambda > \Lambda_1$, 有

$$\begin{aligned} c + o(1) + o(1)\|u_n\|_\lambda &= J_\lambda(u_n) - \frac{1}{p} \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u_n|^2 + V_\lambda(x)u_n^2] dx \\ &= \frac{p-2}{2p} \|u_n\|_\lambda^2, \end{aligned}$$

推出 (4.1). □

引理 4.2 在引理 4.1 的假设条件下, 当 $\lambda > \Lambda_1$ 时, 若 $\{u_n\}$ 是 J_λ 的 $(PS)_c$ 序列, 则下述结论中有且仅有一个成立:

- (i) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx = 0$;
- (ii) 存在不依赖于 λ 的 $\sigma > 0$ 使得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx \geq \sigma.$$

证明 由于 $\{u_n\}$ 是 J_λ 的 $(PS)_c$ 序列, 则对任意的 $\lambda > \Lambda_1$, 由 Sobolev 不等式得

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx + o(1) = \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u_n|^2 + V_\lambda(x)u_n^2] dx \geq \Lambda \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx \right)^{\frac{2}{p}},$$

其中 $\Lambda > 0$ 不依赖于 λ . 因此, 若 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx \neq 0$, 则 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx \geq \sigma := \Lambda^{\frac{p}{p-2}}$. □

引理 4.3 假设 $N \geq 5$, $2 < p < 2^{**}$, 则对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\Lambda_\epsilon > \Lambda_1$ 使得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R^c} |u_n|^p dx \leq \epsilon,$$

其中 $\{u_n\}$ 是 J_λ 的 $(PS)_c$ 序列, $\lambda > \Lambda_\epsilon$, $c \leq c(\Omega)$, $B_R^c = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \geq R\}$. 特别地, 存在 $\Lambda_2 > \Lambda_1$ 使得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R^c} |u_n|^p dx \leq \frac{\sigma}{2}.$$

证明 对任意的 $\lambda > \Lambda_1$, (2.2)、引理 2.1、2.4 和 4.1 推得, 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{B_R^c} u_n^2 dx &\leq \frac{1}{\lambda M_0} \int_{B_R^c} [V_\lambda(x) + \delta] u_n^2 dx \\ &\leq \frac{1}{\lambda M_0} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u_n|^2 + V_\lambda^+(x) u_n^2 + \delta u_n^2] dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda M_0} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u_n|^2 + V_\lambda(x) u_n^2] dx \\ &\leq \frac{1}{\lambda M_0} \left[\frac{2pc}{p-2} + o(1) \right] \\ &\leq \frac{1}{\lambda M_0} \left[\frac{2pc(\Omega)}{p-2} + o(1) \right] \rightarrow 0. \end{aligned}$$

由 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式知, 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{B_R^c} |u_n|^p dx &\leq C \left(\int_{B_R^c} |u_n|^{2^{**}} dx \right)^{\frac{(N-4)p\theta}{2N}} \left(\int_{B_R^c} |u_n|^2 dx \right)^{\frac{p(1-\theta)}{2}} \\ &\leq C \|u_n\|_\lambda^{p\theta} \left(\int_{B_R^c} |u_n|^2 dx \right)^{\frac{p(1-\theta)}{2}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

其中 $\theta = \frac{(p-2)N}{4p}$. 所以, 存在 $\Lambda_\epsilon > \Lambda_1$ 使得 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R^c} u_n^p dx < \epsilon$. □

为了比较 c_λ 与 $c(\Omega)$, 我们有如下的引理.

引理 4.4 对任意的 $\lambda > \Lambda_1$, $2 < p \leq 2^{**}$, 有 $0 < \tau \leq c_\lambda \leq c(\Omega)$.

证明 对任意的 $\lambda > \Lambda_1$, $u \in \mathcal{N}_\lambda$, 由 Sobolev 不等式得

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u|^2 + V_\lambda(x) u^2] dx \geq \Lambda \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right)^{\frac{2}{p}},$$

其中 $\Lambda > 0$ 不依赖于 λ . 由上式推得 $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \geq \Lambda^{\frac{p}{p-2}}$. 由于

$$J_\lambda(u) = J_\lambda(u) - \frac{1}{2} \langle J'_\lambda(u), u \rangle = \frac{p-2}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \geq \tau := \frac{p-2}{2p} \Lambda^{\frac{p}{p-2}} > 0,$$

则 $c_\lambda \geq \tau > 0$. 又 $\mathcal{N}_\Omega \subset \mathcal{N}_\lambda$, 从而 $c_\lambda \leq c(\Omega)$. 所以, $0 < \tau \leq c_\lambda \leq c(\Omega)$. □

4.2 次临界情形下极小能量解的存在性

现在证明次临界情形下 (1.1) 的极小能量解的存在性.

命题 4.1 假定 $N \geq 5$, $2 < p < 2^{**}$, 条件 (V₁)–(V₃) 成立, 则对任意的 $\lambda > \Lambda_2$, $c_\lambda := \inf_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda(u)$ 可达到且达到函数为 (1.1) 的极小能量解.

证明 对任意的 $\lambda > \Lambda_2$, $2 < p < 2^{**}$, 由 c_λ 的定义和 Ekeland 变分原理知, 存在 J_λ 的 (PS) $_{c_\lambda}$ 序列 $\{u_n\} \subset X_\lambda$. 由引理 4.1 得, $\{u_n\}$ 在 X_λ 中有界. 不妨设, 在子列意义下, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{于 } X_\lambda, \\ u_n \rightharpoonup u, & \text{于 } L^p(\mathbb{R}^N), \\ u_n \rightarrow u, & \text{于 } L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N), \\ u_n \rightarrow u, & \text{a.e. 于 } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

由此不难得到 $J'_\lambda(u) = 0$ 和 $J_\lambda(u) \geq 0$. 令 $v_n = u_n - u$, 则由 Brézis-Lieb 引理知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\|u_n\|_\lambda^2 = \|u\|_\lambda^2 + \|v_n\|_\lambda^2 + o(1), \quad \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p + \|v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p + o(1).$$

从而, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$J_\lambda(u_n) = J_\lambda(u) + J_\lambda(v_n) + o(1), \quad \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle = \langle J'_\lambda(u), u \rangle + \langle J'_\lambda(v_n), v_n \rangle + o(1).$$

由文献 [29, 引理 8.1 和 8.2] 可以推出, v_n 是 J_λ 的 $(PS)_d$ 序列, 其中 $d = c_\lambda - J_\lambda(u)$. 不妨令

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p.$$

若 $b = 0$, 则当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $v_n \rightarrow 0$ 于 X_λ , 推出当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $u_n \rightarrow u$ 于 X_λ . 若 $b > 0$, 则由引理 4.2 得 $b \geq \sigma$. 然而, 由引理 4.3 推得

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R^c} |v_n|^p dx \leq \frac{\sigma}{2}.$$

所以, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n \rightarrow u$ 于 X_λ . 又由引理 4.4, $J_\lambda(u) = c_\lambda \geq \tau > 0$, 推出 $u \in \mathcal{N}_\lambda$. 所以, 当 $\lambda > \Lambda_2$ 时, c_λ 可达到且达到函数 $u \in \mathcal{N}_\lambda$ 为 (1.1) 的极小能量解. $\square$

4.3 临界情形下极小能量解的存在性

我们证明临界情形下 (1.1) 的极小能量解的存在性.

命题 4.2 假定 $N \geq 8$, $p = 2^{**}$, 条件 (V₁)–(V₃) 成立, 则对任意的 $\lambda > \Lambda_2$, $c_\lambda := \inf_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda(u)$ 可达到且达到函数为 (1.1) 的极小能量解.

证明 由 c_λ 的定义和 Ekeland 变分原理, 存在 J_λ 的 $(PS)_{c_\lambda}$ 序列 $\{u_n\} \subset X_\lambda$. 由引理 4.1 得, $\{u_n\}$ 在 X_λ 中有界. 在子列意义下, 不妨设

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{于 } H^2(\mathbb{R}^N), \\ u_n \rightharpoonup u, & \text{于 } L^{2^{**}}(\mathbb{R}^N), \\ u_n \rightarrow u, & \text{a.e. 于 } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

由此不难得到 $J'_\lambda(u) = 0$ 和 $J_\lambda(u) \geq 0$. 令 $v_n = u_n - u$, 则由 Brézis-Lieb 引理知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \|u_n\|_\lambda^2 &= \|u\|_\lambda^2 + \|v_n\|_\lambda^2 + o(1), \\ \|u_n\|_{L^{2^{**}}(\mathbb{R}^N)}^{2^{**}} &= \|u\|_{L^{2^{**}}(\mathbb{R}^N)}^{2^{**}} + \|v_n\|_{L^{2^{**}}(\mathbb{R}^N)}^{2^{**}} + o(1). \end{aligned}$$

从而, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$J_\lambda(u_n) = J_\lambda(u) + J_\lambda(v_n) + o(1), \quad \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle = \langle J'_\lambda(u), u \rangle + \langle J'_\lambda(v_n), v_n \rangle + o(1).$$

由文献 [29, 引理 8.1 和 8.2] 知, v_n 是 J_λ 的 $(PS)_d$ 序列, 其中 $d = c_\lambda - J_\lambda(u)$. 不妨假设

$$b := \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_\lambda^2 > 0,$$

则 $b = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{L^{2^{**}}(\mathbb{R}^N)}^{2^{**}} > 0$. 一方面,

$$\begin{aligned} b &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^{**}} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta v_n|^2 + V_\lambda^+(x)v_n^2] dx \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n|^2 dx \\ &\geq S \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^{**}} dx \right)^{\frac{2}{2^{**}}} = Sb^{\frac{2}{2^{**}}}, \end{aligned}$$

推出 $b \geq S^{\frac{N}{4}}$. 另一方面, 由引理 3.2 得

$$\frac{2}{N} S^{\frac{N}{4}} > c_\lambda \geq d := \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(v_n) = \frac{2}{N} b,$$

推出 $b < S^{\frac{N}{4}}$. 所以, $b = 0$, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n \rightarrow u$ 于 X_λ . 又由引理 4.4, $J_\lambda(u) = c_\lambda \geq \tau > 0$, 推出 $u \in \mathcal{N}_\lambda$. 所以, 当 $\lambda > \Lambda_2$ 时, c_λ 可达到且达到函数 $u \in \mathcal{N}_\lambda$ 为 (1.1) 的极小能量解. $\square$

5 极小能量解的渐近性

我们将分别讨论次临界和临界情形下 (1.1) 的极小能量解 u_λ 的渐近性.

首先证明当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $c_\lambda \rightarrow c(\Omega)$. 我们有如下的命题.

命题 5.1 假定 $N \geq 5$, $2 < p < 2^{**}$, 条件 (V₁)–(V₃) 成立, 则 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} c_\lambda = c(\Omega)$.

证明 首先证明当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, c_λ 的极限存在.

一方面, c_λ 关于 λ 严格增. 事实上, 假设 $\lambda > \mu$, 并记 c_λ 的达到函数为 u , 即 $J_\lambda(u) = c_\lambda$, $u \in \mathcal{N}_\lambda$. 由于

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u| + V_\mu(x)u^2] dx < \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u| + V_\lambda(x)u^2] dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx,$$

则存在 $0 < t < 1$ 使得 $tu \in \mathcal{N}_\mu$. 从而,

$$c_\mu \leq J_\mu(tu) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) t^p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = t^p J_\lambda(u) < c_\lambda.$$

另一方面, 由引理 4.4 知, $c_\lambda \leq c(\Omega)$. 因此, 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, c_λ 的极限存在.

然后证明 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} c_\lambda = c(\Omega)$.

不妨设 $k := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} c_\lambda \leq c(\Omega)$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lambda_n \rightarrow \infty$, 有 $c_{\lambda_n} \rightarrow k \leq c(\Omega)$. 设 u_n 为 c_{λ_n} 的达到函数, 则 $\{\|u_n\|_{\lambda_n}\}$ 有界. 由引理 2.1 和 2.4 可推出 $\{u_n\}$ 在 $H^2(\mathbb{R}^N)$ 中有界. 不妨设, 在子列意义下, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{于 } H^2(\mathbb{R}^N), \\ u_n \rightarrow u, & \text{于 } L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^N), \\ u_n \rightharpoonup u, & \text{于 } L^p(\mathbb{R}^N), \\ u_n \rightarrow u, & \text{a.e. 于 } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

首先证明 $u|_{\Omega^c} = 0$, 其中 Ω^c 为 Ω 在 $\mathbb{R}^N$ 中的余集.

倘若不然, $u|_{\Omega^c} \neq 0$, 则存在紧集 $F \subset \Omega^c$ 且 $\text{dist}\{F, \partial\Omega\} > 0$, 使得 $u|_F \neq 0$ 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\int_F u_n^2 dx \rightarrow \int_F u^2 dx > 0$. 由条件 (V_2) , 存在 $\epsilon_0 > 0$ 使得对任意的 $x \in F$, 有 $V(x) \geq \epsilon_0$. 由于

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u_n|^2 + V_{\lambda_n}(x)u_n^2]dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx,$$

则当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} c_{\lambda_n} = J_{\lambda_n}(u_n) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u_n|^2 + V_{\lambda_n}(x)u_n^2]dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx \\ &= \frac{p-2}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta u_n|^2 + V_{\lambda_n}(x)u_n^2]dx \\ &\geq \frac{p-2}{2p} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x)u_n^2 dx - \delta \|u_n\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right] \\ &\geq \frac{p-2}{2p} \left(\int_F \lambda_n \epsilon_0 u_n^2 dx - \delta \|u_n\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right) \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

此矛盾说明 $u|_{\Omega^c} = 0$. 所以, $u \in H(\Omega)$.

接着证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, u_n 在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛到 u , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^p dx = 0$.

如若不然, 由 Lions 集中紧性引理^[30] 知, 存在 $\delta > 0$, $\rho > 0$, $x_n \in \mathbb{R}^N$, $|x_n| \rightarrow \infty$, 使得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_\rho(x_n)} |u_n - u|^2 dx \geq \delta > 0.$$

由于 $\{u_n\}$ 是 c_{λ_n} 的达到函数, $u|_{\Omega^c} = 0$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} J_{\lambda_n}(u_n) &\geq \frac{p-2}{2p} \left[\int_{B_\rho(x_n) \cap B_R^c(0)} \lambda_n V(x)u_n^2 dx - \delta \|u_n\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right] \\ &\geq \frac{p-2}{2p} \left[\int_{B_\rho(x_n) \cap B_R^c(0)} \lambda_n V(x)|u_n - u|^2 dx - \delta \|u_n\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right] \\ &\geq \frac{p-2}{2p} \left(\lambda_n M_0 \int_{B_\rho(x_n)} |u_n - u|^2 dx - \delta \|u_n\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right) \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

此矛盾推出当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n \rightarrow u$ 于 $L^p(\mathbb{R}^N)$.

最后证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, $c_{\lambda_n} \rightarrow c(\Omega)$, 且在 $H^2(\mathbb{R}^N)$ 中 c_{λ_n} 的达到函数 u_n 强收敛到 $c(\Omega)$ 的达到函数 u .

由于 $J'_{\lambda_n}(u_n) = 0$, 则对任意的 $\psi \in H(\Omega)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\Delta u_n \Delta \psi + V_{\lambda_n}(x)u_n \psi]dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n \psi dx.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则

$$\int_{\Omega} (\Delta u \Delta \psi - \delta u \psi) dx = \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \psi dx,$$

推出 $J'_\Omega(u) = 0$. 注意到, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$J_{\lambda_n}(u_n) = J_{\lambda_n}(u_n) - \frac{1}{2} \langle J'_{\lambda_n}, u_n \rangle = \frac{p-2}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx = \frac{p-2}{2p} \int_{\Omega} |u|^p dx + o(1),$$

则由引理 4.4 得 $k = \frac{p-2}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \geq \sigma > 0$, 推出 $u \neq 0$. 进而, $u \in \mathcal{N}_\Omega$ 且

$$J_\Omega(u) = \frac{p-2}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = k \geq c(\Omega).$$

因此, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0$. 引理 2.1 和 2.4 推出当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n \rightarrow u$ 于 $H^2(\mathbb{R}^N)$. $\square$

命题 5.2 假设 $N \geq 8$, $p = 2^{**}$, 条件 $(V_1)-(V_3)$ 成立, 则 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} c_\lambda = c(\Omega)$.

证明 由于 c_λ 关于 λ 单调增且 $c_\lambda \leq c(\Omega)$, 不妨设 $k = \lim_{\lambda_n \rightarrow \infty} c_{\lambda_n} \leq c(\Omega)$. 不妨记 $u_n \in X_{\lambda_n}$ 为 c_{λ_n} 的达到函数. 正如引理 4.1.1 的证明, u_n 在 X_{λ_n} 中有界, 即 $\|u_n\|_{\lambda_n}$ 有界. 引理 2.1 和 2.4 推出 u_n 在 $H^2(\mathbb{R}^N)$ 中有界. 因此, 在子列意义下, 不妨设, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{于 } H^2(\mathbb{R}^N), \\ u_n \rightharpoonup u, & \text{于 } L^{2^{**}}(\mathbb{R}^N), \\ u_n \rightarrow u, & \text{于 } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N), \\ u_n \rightarrow u, & \text{a.e. 于 } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

类似于命题 5.1 的证明, $u|_{\Omega^c} = 0$. 因此, 不难推出 $J'_\Omega(u) = 0$ 和 $J_\Omega(u) \geq 0$.

记 $v_n = u_n - u$, 则由 Brézis-Lieb 引理, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u_n|^2 dx &= \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n|^2 dx + o(1), \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^{**}} dx &= \int_{\Omega} |u|^{2^{**}} dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^{**}} dx + o(1), \\ \int_{\mathbb{R}^N} V_{\lambda_n}(x) u_n^2 dx &= -\delta \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_{\lambda_n}(x) v_n^2 dx + o(1). \end{aligned}$$

从而, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} J_{\lambda_n}(u_n) &= J_\Omega(u) + J_{\lambda_n}(v_n) + o(1), \\ \langle J'_{\lambda_n}(u_n), u_n \rangle &= \langle J'_\Omega(u), u \rangle + \langle J'_{\lambda_n}(v_n), v_n \rangle + o(1). \end{aligned}$$

不妨设

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta v_n|^2 + V_{\lambda_n}(x) v_n^2] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^{**}} dx > 0.$$

一方面, 由 Sobolev 不等式得

$$\begin{aligned} b &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^{**}} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta v_n|^2 + V_{\lambda_n}(x) v_n^2] dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} [|\Delta v_n|^2 + V_{\lambda_n}^+(x) v_n^2] dx \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v_n|^2 dx \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} S \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^{**}} dx \right)^{\frac{2}{2^{**}}}, \end{aligned}$$

推出 $b \geq S^{\frac{N}{4}}$. 另一方面, 由于

$$J_{\lambda_n}(v_n) = J_{\lambda_n}(v_n) - \frac{1}{2} \langle J_{\lambda_n}(v_n), v_n \rangle + o(1) = \frac{2}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^{**}} dx + o(1),$$

则有

$$\frac{2}{N} S^{\frac{N}{4}} > c(\Omega) \geq k \geq \lim_{n \rightarrow \infty} J_{\lambda_n}(v_n) = \frac{2}{N} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^{**}} dx = \frac{2}{N} b,$$

推出 $b < S^{\frac{N}{4}}$. 此矛盾说明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n \rightarrow u$ 于 $L^{2^{**}}(\mathbb{R}^N)$. 引理 2.1 和 2.4 推出, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n \rightarrow u$ 于 $H^2(\mathbb{R}^N)$. 进一步, 由引理 4.4 得

$$\begin{aligned} J_{\Omega}(u) &= \frac{2}{N} \int_{\Omega} |u|^{2^{**}} dx = \frac{2}{N} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n|^{2^{**}} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} J_{\lambda_n}(u_n) = k \geq \sigma > 0, \end{aligned}$$

推出 $u \neq 0$. 所以, $u \in \mathcal{N}_{\Omega}$. 由 $c(\Omega) \leq J_{\Omega}(u) = k \leq c(\Omega)$ 可推出 $J_{\Omega}(u) = c(\Omega)$. □

最后, 完成定理 1.1 的证明.

定理 1.1 的证明 (1.1) 的极小能量解的存在性可由命题 4.1 和 4.2 得到, 而极小能量解的渐近性则由命题 5.1 和 5.2 得到. □

致谢 衷心感谢各位审稿专家的仔细品阅和极具建设性的宝贵意见.

参考文献

- 1 Lazer A C, McKenna P J. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: Some new connections with nonlinear analysis. *SIAM Rev*, 1990, 32: 537–578
- 2 McKenna P J, Walter W. Travelling waves in a suspension bridge. *SIAM J Appl Math*, 1990, 50: 703–715
- 3 Abrahams I D, Davis A M. Deflection of a partially clamped elastic plate. In: *IUTAM Symposium on Diffraction and Scattering in Fluid Mechanics and Elasticity*. Fluid Mechanics and Its Applications, vol. 68. Dordrecht: Springer, 2002, 303–312
- 4 Hebey E, Robert F. Compactness and global estimates for the geometric paneitz equation in high dimensions. *Electron Res Announc Amer Math Soc*, 2004, 10: 135–142
- 5 Humbert E, Raulot S. Positive mass theorem for the Paneitz-Branson operator. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2009, 36: 525–531
- 6 Alves C O, do Ó J M, Miyagaki O H. Nontrivial solutions for a class of semilinear biharmonic problems involving critical exponents. *Nonlinear Anal*, 2001, 46: 121–133
- 7 Salvatore A, Squassina M. Deformation from symmetry for Schrödinger equations of higher order on unbounded domains. *Electron J Differential Equations*, 2003, 2003: 1–15
- 8 Pimenta M T O, Soares S H M. Existence and concentration of solutions for a class of biharmonic equations. *J Math Anal Appl*, 2012, 390: 274–289
- 9 Figueiredo G M, Pimenta M T. Multiplicity of solutions for a biharmonic equation with subcritical or critical growth. *Bull Belg Math Soc Simon Stevin*, 2013, 20: 519–534
- 10 Zhang W, Tang X, Zhang J. Existence and concentration of solutions for sublinear fourth-order elliptic equations. *Electron J Differential Equations*, 2015, 2015: 1–9
- 11 Alves C O, Nóbrega A B. Existence of multi-bump solutions for a class of elliptic problems involving the biharmonic operator. *ArXiv:1602.03112*, 2016
- 12 Bartsch T, Wang Z Q. Multiple positive solutions for a nonlinear Schrödinger equation. *Z Angew Math Phys*, 2000, 51: 366–384
- 13 Deng Y, Shuai W. Non-trivial solutions for a semilinear biharmonic problem with critical growth and potential vanishing at infinity. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 2015, 145: 281–299
- 14 Carrião P, Demarque R, Miyagaki O H. Nonlinear biharmonic problems with singular potentials. *Commun Pure Appl Anal*, 2014, 13: 2141–2154

- 15 Hu S, Wang L. Existence of nontrivial solutions for fourth-order asymptotically linear elliptic equations. *Nonlinear Anal*, 2014, 94: 120–132
- 16 Gazzola F, Grunau H C. Radial entire solutions for supercritical biharmonic equations. *Math Ann*, 2006, 334: 905–936
- 17 Guo Z, Huang X, Zhou F. Radial symmetry of entire solutions of a bi-harmonic equation with exponential nonlinearity. *J Funct Anal*, 2015, 268: 1972–2004
- 18 Wang Y, Shen Y. Multiple and sign-changing solutions for a class of semilinear biharmonic equation. *J Differential Equations*, 2009, 246: 3109–3125
- 19 Dávila J, Dupaigne L, Wang K, et al. A monotonicity formula and a Liouville-type theorem for a fourth order supercritical problem. *Adv Math*, 2014, 258: 240–285
- 20 Wang F, An Y. Existence and multiplicity of solutions for a fourth-order elliptic equation. *Bound Value Probl*, 2012, 2012: 6
- 21 Gazzola F, Grunau H C, Sweers G. *Polyharmonic Boundary Value Problems*. Heidelberg: Springer, 2010, 52–59
- 22 Bartsch T, Pankov A, Wang Z Q. Nonlinear Schrödinger equations with steep potential well. *Commun Contemp Math*, 2001, 3: 549–569
- 23 Reed M, Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. IV*. London: Academic Press, 1978, 75–79; 106–120
- 24 Lions P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations: The limit case, part 1. *Rev Mat Iberoam*, 1985, 1: 145–201
- 25 Lin C S. A classification of solutions of a conformally invariant fourth order equation in $\mathbb{R}^N$. *Comment Math Helv*, 1998, 73: 206–231
- 26 Wei J, Xu X. Classification of solutions of higher order conformally invariant equations. *Math Ann*, 1999, 313: 207–228
- 27 Brezis H, Nirenberg L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponents. *Comm Pure Appl Math*, 1983, 36: 437–477
- 28 Brézis H, Lieb E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. *Proc Amer Math Soc*, 1983, 88: 486–486
- 29 Willem M. *Minimax Theorems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. 24. Boston: Birkhäuser, 1996, 20–23
- 30 Lions P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations: The locally compact case, part 1. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 1984, 1: 109–145

Solutions of biharmonic equations with steep potential wells

Yuxia Guo, Zhongwei Tang & Lushun Wang

Abstract In this paper, we are concerned with the existence of least energy solutions for the following biharmonic equations:

$$\Delta^2 u + [\lambda V(x) - \delta]u = |u|^{p-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (0.1)$$

where $N \geq 5$, $2 < p \leq \frac{2N}{N-4}$, $\lambda > 0$ is a parameter, $V(x)$ is a nonnegative potential function with nonempty interior part of the zero set $\text{int}V^{-1}(0)$, $0 < \delta < \mu_0$ and μ_0 is the principal eigenvalue of Δ^2 in the zero set $\text{int}V^{-1}(0)$ of $V(x)$. We prove that the equation (0.1) admits a least energy solution which is trapped near the zero set $V^{-1}(0)$ for $\lambda > 0$ large enough.

Keywords least energy solutions, biharmonic equations, potential wells

MSC(2010) 35Q55, 35J66

doi: 10.1360/SCM-2017-0736