论 文

布尔控制网络部分状态变量的稳定与镇定

宋金利, 李志强*

河南财经政法大学数学与信息科学学院, 郑州 450046

* 通信作者. E-mail: lizhiqiang@amss.ac.cn

收稿日期: 2014-11-27; 接受日期: 2014-12-23; 网络出版日期: 2015-10-26

国家自然科学基金 (批准号: 61203050, 61374079, 11202068)、河南省高等学校青年骨干教师资助计划 (批准号: 2013GGJS-099)、河南省基础与前沿技术研究计划 (批准号: 132300410011) 和河南省高等学校哲学社会科学研究“三重”重大项目 (专项)(批准号: 2014-SZZD-30) 资助项目

摘要 系统的稳定与镇定是控制理论的重要研究内容. 本文主要研究逻辑控制系统的部分状态变量的稳定与镇定问题, 部分状态变量的稳定与镇定是一种特殊的稳定性概念, 它只考虑状态变量中部分目标变量的稳定性与可镇定性. 利用矩阵的半张量积, 逻辑控制系统被表示为离散时间仿射线性系统. 从系统的结构矩阵出发, 首先给出逻辑系统的部分状态 (一致) 稳定的概念和部分状态 (一致) 稳定的条件, 研究了逻辑控制系统部分状态变量的可镇定性, 得到了部分变量通过常值控制序列或通过状态反馈控制器镇定的充要条件, 并通过实例检验了所给条件的有效性.

关键词 布尔控制网络 矩阵半张量积 部分稳定性 部分镇定 一致稳定

1 引言

布尔网络最初由 Kauffman^[1,2] 提出用于基因调控网络的研究. 为了研究对基因调控网络的调节, 很多学者研究了随机布尔网络的干预控制问题^[1,3~5]. 布尔控制网络是最简单的一类逻辑动态系统. 在程代展^[6] 提出矩阵的半张量积之后, 半张量积成为研究逻辑动态系统的重要工具之一. 利用矩阵的半张量积, 布尔控制网络被表示为离散事件动态系统, 从逻辑系统的代数形式出发, 得到了一系列重要的成果. 文献 [7] 给出了计算布尔网络不同长度极限环个数等拓扑性质的显式公式. 文献 [8~11] 分别研究了布尔控制网络的相关稳定与镇定问题. 文献 [9] 得到了随机布尔网络的稳定与可镇定的充要条件; 文献 [10] 给出了带有脉冲的布尔系统的稳定与可镇定的充要条件; 文献 [11] 对切换系统全局稳定与镇定进行了讨论. 特别地, 在文献 [11] 中针对切换布尔网络提出了切换能达概念, 并利用这一技巧得到切换布尔网络稳定性的检验条件.

系统的稳定性与镇定是控制理论中重要研究方向之一, 而部分状态稳定只考虑系统中某些状态变量演化性质更具有实际意义. 比如, 给定系统的状态演化轨线 $x(t, x_0, t_0) = (y(t, x_0, t_0), z(t, x_0, t_0))$, 其中 $x \in \mathcal{R}^n, y \in \mathcal{R}^p, z \in \mathcal{R}^{n-p}$. 部分状态稳定只考虑系统中某些状态变量 y 的稳定性^[12]. 部分变量稳定性的研究可以追溯到 Lyapunov^[13~15]. 文献 [15] 讨论了常微分方程中部分变量 y 的稳定性. 文献 [13] 研究了差分方程中部分变量的稳定性. 另外, 时滞系统中部分变量的稳定性^[12], 脉冲系统中部分变量的稳定性^[16] 也有学者进行研究. 关于部分变量的稳定性结果可以参看文献 [12].

引用格式: 宋金利, 李志强. 布尔控制网络部分状态变量的稳定与镇定. 中国科学: 信息科学, 2015, 45: 1389–1401, doi: 10.1360/N112014-00239

对于逻辑系统 (比如布尔网络系统), 其各个变量的稳定性也是不一样的. 各个变量的取值是有限多个, 随着时间的推进, 系统变量的状态演化一定会在某些状态之间出现循环, 即所说的极限环^[7], 即使在极限环内部也有可能存在一些变量, 其状态循环变化, 不能稳定下来. 逻辑系统的各个结点演化规律由不同的逻辑函数来描述, 由于结构复杂, 使得对整个系统状态的处理非常困难. 另一方面, 有时人们只对一部分变量感兴趣, 或者由于技术原因对一些变量无法测定, 这就要去研究系统中部分变量的演化规律. 比如在神经网络中, 神经元是模拟人的大脑功能, 当大脑一些神经细胞在兴奋, 而另一些神经细胞却抑制兴奋, 这也是典型的部分变量问题^[17].

在理论上, 系统部分状态变量的稳定性及其应用研究是一个近代课题, 它的理论还很不完善, 一些理论还没有建立, 许多已有结果可以推广. 目前关于部分状态变量的研究主要是对基于微分方程或差分方程的讨论¹⁾, 还没有相关逻辑控制系统部分变量的稳定性结果. 因此对逻辑系统部分状态变量稳定与镇定的研究具有一定的应用背景和理论价值.

本文主要研究了布尔控制网络系统的部分状态变量稳定与镇定问题. 所得结果可以直接用于一般的逻辑动态控制系统. 本文结构安排如下: 第 2 部分是一些准备知识, 主要介绍了逻辑变量取值的向量化、矩阵的半张量积和已有的一些结果; 第 3 部分介绍了布尔网络系统的部分状态稳定性概念; 第 4 部分讨论了系统的镇定问题, 分别给出了利用常值控制和状态反馈控制使得系统部分状态镇定、一致镇定的充要条件, 并用例子验证了结论的正确性; 第 5 部分是一些结论.

2 准备知识

2.1 逻辑的向量表示

矩阵的半张量积是本文的主要工具.

定义 2.1^[6] 设矩阵 $A \in M_{m \times n}$, $B \in M_{p \times q}$, 记 $t = lcm(n, p)$ 为 n 和 p 的最小公倍数. 矩阵 A 和 B 的半张量积定义如下:

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{t/n})(B \otimes I_{t/p}). \quad (1)$$

矩阵的半张量积是普通矩阵乘法的自然推广, $n = p$ 时, 矩阵的半张量积就是普通矩阵乘法. 普通矩阵乘法具有的性质, 半张量积都成立, 同时还有一些特有的性质, 比如伪交换性^[6]. 不致混淆的情况下, 下文的矩阵乘法均指半张量积, 我们省略 $\ltimes$. 为了叙述方便, 本文用到的记号列表如下:

- 记 δ_n^i 是单位矩阵 I_n 的第 i 列, $\Delta_n := \{\delta_n^1, \delta_n^2, \dots, \delta_n^n\}$. 当 $n = 2$ 时, 有 $\Delta := \Delta_2$.
- 逻辑变量: 真 ($T \sim 1$), 假 ($F \sim 0$). 记 $\mathcal{D} = \{0, 1\}$. 将逻辑取值与二维向量建立对应 $T \sim (1, 0)'$, $F \sim (0, 1)'$.
- 设矩阵 $M = [\delta_n^{i_1} \delta_n^{i_2} \cdots \delta_n^{i_s}] \in M_{n \times s}$, 其中, $\text{Col}(M) \subset \Delta_n$. 我们称矩阵 M 是逻辑矩阵, 写成紧凑形式表示为

$$M = \delta_n [i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_s],$$

全体 $n \times s$ 的逻辑矩阵的集合记为 $\mathcal{L}_{n \times s}$.

- 矩阵 $B \in M_{n \times s}$ 称为是布尔矩阵, 如果 $b_{ij} \in \mathcal{D}$, $\forall i, j$. 全体 $n \times s$ 布尔矩阵的集合记为 $\mathcal{B}_{n \times s}$.

基本的逻辑算子有非 ($\neg$)、析取 ($\vee$)、合取 ($\wedge$)、蕴含 ($\rightarrow$)、等价 ($\leftrightarrow$)、异或 (∇)^[18], 它们都是逻辑函数, 下面列出上述基本逻辑算子的结构矩阵.

1) Sun Y, Molchanov A P, Michel A N. Partial stability of dynamical systems. http://www3.nd.edu/mtns/papers/4879_1.pdf.

表 1 逻辑算子的结构矩阵
Table 1 Some matrix of operators

Operator	Structure matrix	Operator	Structure matrix
$\neg$	$M_n = \delta_2[2 \ 1]$	$\vee$	$M_d = \delta_2[1 \ 1 \ 1 \ 2]$
$\rightarrow$	$M_i = \delta_2[1 \ 2 \ 1 \ 1]$	$\leftrightarrow$	$M_e = \delta_2[1 \ 2 \ 2 \ 1]$
$\wedge$	$M_c = \delta_2[1 \ 2 \ 2 \ 2]$	$\bar{\vee}$	$M_p = \delta_2[2 \ 1 \ 1 \ 2]$

下述命题在逻辑系统的状态空间表示中起了关键作用.

命题 2.2^[6] 设 $x_1, \dots, x_n \in \Delta$ 是 n 个布尔变量, $f(x_1, \dots, x_n) \in \Delta$ 是一个布尔函数. 存在唯一矩阵 $M_f \in \mathcal{L}_{2 \times 2^n}$, 使得

$$f(x_1, \dots, x_n) = M_f \ltimes_{i=1}^n x_i, \quad x_i \in \Delta,$$

其中, M 称为布尔函数 f 的结构矩阵.

2.2 布尔 (控制) 网络

含有 n 个结点的布尔网络动态方程表示如下:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ x_2(t+1) = f_2(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad x_i \in \mathcal{D}, \quad (2)$$

其中, $x_i \in \mathcal{D}, i = 1, \dots, n$ 是逻辑变量, $f_i, i = 1, \dots, n$ 是布尔函数.

利用逻辑变量的向量取值, 设 $X(t) := \ltimes_{i=1}^n x_i(t) \in \Delta_{2^n}$, 由命题 2.2, 用 M_i 表示逻辑函数 f_i 的结构矩阵, 则有

$$x_i(t+1) = M_i X(t), \quad x_i \in \Delta, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

将式 (2) 中各个表达式左右两端利用矩阵的半张量积乘在一起得到式 (2) 的代数形式如下^[7]:

$$X(t+1) = LX(t), \quad X \in \Delta_{2^n}, \quad (4)$$

称 $L \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^n}$ 为式 (2) 的结构矩阵. 另一方面, L 也可以由矩阵的 Khatri-Rao 积计算, 其中, $\text{Col}_j L = \ltimes_{i=1}^n (\text{Col}_j M_i), j = 1, \dots, 2^n$.

注 2.3 设矩阵 $A \in \mathcal{M}_{m \times r}, B \in \mathcal{M}_{n \times r}$, 矩阵 A, B 的 Khatri-Rao 积^[19] 定义为

$$A \oslash B = [\text{Col}_1(A) \otimes \text{Col}_1(B), \text{Col}_2(A) \otimes \text{Col}_2(B), \dots, \text{Col}_r(A) \otimes \text{Col}_r(B)].$$

为了本文讨论部分状态变量稳定性的方便, 式 (4) 可以等价表示为

$$\begin{cases} X^1(t+1) = L_1 X^1(t) X^2(t), \\ X^2(t+1) = L_2 X^1(t) X^2(t), \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\text{Col}_j(L_1) = \times_{i=1}^p (\text{Col}_j M_i), j = 1, \dots, 2^n, \text{Col}_j(L_2) = \times_{i=p+1}^n (\text{Col}_j M_i), j = 1, \dots, 2^n$, 称 $L_1 \in \mathcal{L}_{2^p \times 2^n}$ 和 $L_2 \in \mathcal{L}_{2^{n-p} \times 2^n}$ 为式 (2) 的部分变量结构矩阵.

布尔控制网络的动态方程表示如下:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \\ x_2(t+1) = f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \end{cases} \quad (6)$$

其中, $f_i (i = 1, \dots, n)$ 是布尔函数. 类似地, 设 $X(t) := \times_{i=1}^n x_i(t), U(t) := \times_{i=1}^m u_i(t)$. 用 N_i 表示逻辑函数 f_i 的结构矩阵, 则有

$$x_i(t+1) = N_i U(t) X(t), \quad x_i \in \Delta, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

布尔控制网络 (6) 被表示为代数形式如下:

$$X(t+1) = LU(t)X(t), \quad X \in \Delta_{2^n}, U \in \Delta_{2^m}, \quad (8)$$

其中, $\text{Col}_j L = \times_{i=1}^n (\text{Col}_j N_i), j = 1, \dots, 2^n$, 并且矩阵 $L \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^{n+m}}$ 称为式 (2) 的结构矩阵. 等价的代数形式也可表示为

$$\begin{cases} X^1(t+1) = L_1 U(t) X^1(t) X^2(t), \\ X^2(t+1) = L_2 U(t) X^1(t) X^2(t), \end{cases} \quad (9)$$

其中, $\text{Col}_j(L_1) = \times_{i=1}^p (\text{Col}_j N_i), j = 1, \dots, 2^n, \text{Col}_j(L_2) = \times_{i=p+1}^n (\text{Col}_j N_i), j = 1, \dots, 2^n$, 称 $L_1 \in \mathcal{L}_{2^p \times 2^{m+n}}$ 和 $L_2 \in \mathcal{L}_{2^{n-p} \times 2^{m+n}}$ 为式 (2) 的部分变量结构矩阵.

例 2.4 (1) 考虑含有 4 个结点的布尔网络, 动态方程表示如下:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (x_1(t) \wedge x_3(t)) \vee (\neg x_3(t)) \vee (x_1(t) \leftrightarrow x_4(t)), \\ x_2(t+1) = (x_3(t) \wedge (x_1(t) \leftrightarrow x_2(t))) \vee (\neg x_3(t) \vee x_4(t)), \\ x_3(t+1) = \neg x_2(t), \\ x_4(t+1) = x_3(t) \vee x_4(t), \end{cases} \quad (10)$$

设 $X(t) = x_1(t) \times x_2(t) \times x_3(t) \times x_4(t)$, 通过计算得到布尔网络 (10) 的代数形式

$$X(t+1) = LX(t),$$

其中, $L = \delta_{16}[3 \ 3 \ 3 \ 4 \ 1 \ 5 \ 1 \ 2 \ 11 \ 7 \ 3 \ 4 \ 9 \ 1 \ 1 \ 2]$.

(2) 考虑含有 4 个状态结点, 2 个控制变量的布尔控制网络, 动态方程表示为

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (x_1(t) \wedge x_3(t)) \vee (\neg x_3(t)) \vee (x_1(t) \leftrightarrow x_4(t)), \\ x_2(t+1) = (x_3(t) \wedge (x_1(t) \leftrightarrow x_2(t))) \vee (\neg x_3(t) \vee x_4(t)), \\ x_3(t+1) = \neg x_2(t) \rightarrow u_1(t), \\ x_4(t+1) = (x_3(t) \vee x_4(t)) \leftrightarrow u_2(t), \end{cases} \quad (11)$$

设 $U(t) = u_1(t) \ltimes u_2(t)$, 利用上述方法计算得到系统 (9) 的代数形式 $X(t+1) = LU(t)X(t)$, 其中 L 为

$$L = \delta_{16} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 5 & 1 & 2 & 9 & 5 & 1 & 2 & 9 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 6 & 2 & 1 & 10 & 6 & 2 & 1 & 10 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 7 & 3 & 4 & 9 & 5 & 1 & 2 & 11 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 8 & 4 & 3 & 10 & 6 & 2 & 1 & 12 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

2.3 逻辑坐标变换

定义 2.5 设 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{D}$ 是 n 个逻辑变量. 映射 $y = \varphi(x)$, 其中, $\varphi: \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}^n$, 表示为

$$\varphi: \begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ y_n = g_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (12)$$

如果式 (12) 是一个一对一的到上映射, 则称映射 $y = \varphi(x)$ 为是一个逻辑坐标变换.

利用逻辑变量的向量形式 $x_i, y_i \in \Delta$, $\forall i$. 设 $X = \ltimes_{i=1}^n x_i \in \Delta_{2^n}$, $Y = \ltimes_{i=1}^n y_i \in \Delta_{2^n}$, 则式 (12) 的代数形式表示为

$$Y = TX, \quad (13)$$

其中, $T \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^n}$.

命题 2.6^[20] 式 (12) 是一个坐标变换当且仅当变换式 (13) 的结构矩阵 T 是非奇异的.

注意到 $T \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^n}$, 当 T 是非奇异时, T 是一个正交矩阵^[20].

命题 2.7^[21]

(1) 考虑系统 (2), 设 $Z = TX$ 是一个坐标变换, 则式 (2) 的代数形式 (4) 变为

$$Z(t+1) = TLT^T Z(t). \quad (14)$$

(2) 考虑系统 (6), 设 $Z = TX$ 是一个坐标变换, 则式 (6) 的代数形式 (8) 变为

$$Z(t+1) = TL(I_{2^m} \otimes T^T)U(t)Z(t). \quad (15)$$

3 部分状态变量的稳定性

文献 [8] 研究了布尔网络的稳定与镇定, 给出了布尔网络控制系统稳定的充分条件和充要条件, 同时设计控制序列使布尔控制网络达到镇定.

定义 3.1^[8] 从初始状态 $x(0) = x_0$ 出发, 布尔网络 (2) 的状态轨线为 $x(t, x_0, t_0)$. 布尔网络 (2) 称为稳定的, 如果对任意的 $x_0 \in \mathcal{D}_{2^n}$, 存在一个正整数 T 和逻辑向量 $x^* \in \mathcal{D}^p$, 使得

$$x(t, x_0, t_0) = x^*, \forall t \geq T.$$

定义 3.1 考虑了布尔网络 (2) 中 n 个状态变量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}^n$ 的状态演化. 本文只考虑布尔网络 (2) 的部分状态稳定. 为叙述方便, 状态变量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}^n$ 表示为 $x = (x^1, x^2) \in$

$\mathcal{D}^n$, 其中 $x^1 = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathcal{D}^p$, $x^2 = (x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n) \in \mathcal{D}^{n-p}$. 布尔 (控制) 网络 (2) ((6)) 在 t 时刻的状态表示为 $x(t, x_0, t_0) = (x^1(t, x_0, t_0), x^2(t, x_0, t_0))$. 下面给出布尔网络 (2) 的部分状态 x^1 的稳定性概念.

定义 3.2 设初始状态 $x(0) = x_0 = (x_0^1, x_0^2)$. 从 $x(0)$ 出发, 布尔网络 (2) 的状态轨线为 $x(t, x_0, t_0) = (x^1(t, x_0, t_0), x^2(t, x_0, t_0))$.

(1) 布尔网络 (2) 称为部分状态 $x^1 = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ 相对于 $x^2 = (x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n)$ 一致稳定, 如果对任意的 $x_0 = (x^1(0), x^2(0)) \in \mathcal{D}_{2^n}$, 存在一个正整数 T 和逻辑向量 $\alpha \in \mathcal{D}^p$, 使得

$$x^1(t, x_0, t_0) = \alpha, \forall t \geq T.$$

(2) 布尔网络 (2) 称为部分状态 $x^1 = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ 相对于 $x_0^2 = (x_{p+1}(0), x_{p+2}(0), \dots, x_n(0))$ 稳定, 如果对任意的 $x^1(0)$, 存在一个正整数 T 和逻辑向量 $\alpha \in \mathcal{D}^p$, 使得

$$x^1(t, x_0, t_0) = \alpha, \forall t \geq T.$$

上述定义只考虑部分变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t)$ 的稳定性. 如果考虑的部分目标变量为 $x_{i_1}(t), \dots, x_{i_p}(t)$, 我们可以采用坐标变换将其转化为前 p 个变量的稳定性. 下面用例子解释部分状态的稳定性概念.

例 3.3 (1) 考虑例 2.4 中的布尔网络 (10). 布尔网络 (10) 的状态演化过程如图 1. 从图 1, 我们可也看出布尔网络 (10) 只有两个不动点 (1101) 和 (1100). 从定义 3.1, 布尔网络不是稳定的. 如果只考虑前 3 个状态变量 (x_1, x_2, x_3) , 则布尔网络 (10) 是部分状态 (x_1, x_2, x_3) (相对于 x_4) 一致稳定的, 并且稳定点是 (1, 1, 0).

(2) 考虑如下布尔网络

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \neg x_2(t) \rightarrow x_3(t), \\ x_2(t+1) = x_1(t) \wedge x_2(t), \\ x_3(t+1) = (x_4 \rightarrow x_2) \wedge (\neg x_4(t)) \wedge x_2(t), \\ x_4(t+1) = \neg x_3(t). \end{cases} \quad (16)$$

网络 (16) 的状态演化过程如图 2. 从图 2, 我们可也看出布尔网络 (16) 有 3 个不动点和一个长度为 2 的极限环, 因此布尔网络 (16) 不是稳定的. 考虑状态变量 x_1, x_2 , 从任意初始状态 $(x_3(0), x_4(0))$ 出发, 最终状态为 (1, 1, *, *) 或 (0, 0, *, *). 因此系统 (16) 不是部分状态 x_1, x_2 稳定的. 进一步, 系统 (16) 也不是部分状态 x_1, x_2 一致稳定的, 因为任取 $(x_3(0), x_4(0)) \in \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, x_1, x_2 的最终状态都不能收敛.

从上例可知, 部分状态 (一致) 稳定性 (定义 3.2) 是系统稳定性 (定义 3.1) 的弱化, 定义 3.2 布尔网络部分状态 x^1 的一致稳定比部分状态 x^1 对变量 $x^2(0)$ 状态的稳定要求更强. 矩阵的半张量积是研究逻辑系统的主要工具, 在上部分, 我们将布尔网络 (2) 转化为代数形式 (4), 这里从布尔网络的代数形式角度重述部分状态稳定性. 记 $X = \times_{i=1}^n x_i = X^1 \ltimes X^2 \in \Delta_{2^n}$, 其中, $X^1 = \times_{i=1}^p x_i \in \Delta_{2^p}$, $X^2 = \times_{i=p+1}^n x_i \in \Delta_{2^{n-p}}$.

布尔网络 (4) 可以进一步表示为如下等价形式:

$$\begin{cases} X^1(t+1) = L_1 X^1(t) X^2(t), \\ X^2(t+1) = L_2 X^1(t) X^2(t). \end{cases} \quad (17)$$

图 1 布尔网络 (10) 的状态演化

Figure 1 State graph of Boolean network (10)

图 2 布尔网络 (16) 的状态演化

Figure 2 State graph of Boolean network (16)

记布尔网络 (4) 的状态轨线为 $X(t, X_0, t_0) = X^1(t, X_0, t_0) \times X^2(t, X_0, t_0)$. 我们重述布尔网络 (4) 的部分状态稳定性概念.

定义 3.4 设初始状态 $X(0) = X_0 = (X_0^1, X_0^2)$. 从 $X(0)$ 出发, 布尔网络 (2) 的状态轨线为 $X(t, X_0, t_0) = (X^1(t, X_0, t_0), X^2(t, X_0, t_0))$.

(1) 布尔网络 (4) 称为部分状态 $X^1 = \times_{i=1}^p x_i \in \Delta_{2^p}$ 相对于 $X^2 = \times_{i=p+1}^n x_i \in \Delta_{2^{n-p}}$ 一致稳定, 如果对任意的 $X_0 = \times_{i=1}^n x_i(0)$, 存在一个正整数 T 和逻辑向量 $\alpha \in \Delta_{2^p}$, 使得

$$X^1(t, X_0, t_0) = \alpha, \forall t \geq T.$$

(2) 布尔网络 (4) 称为部分状态 $X^1 = \times_{i=1}^p x_i \in \Delta_{2^p}$ 相对于 $X_0^2 = \times_{i=p+1}^n x_i(0)$ 稳定, 如果对任意的 $X^1(0)$, 存在一个正整数 T 和逻辑向量 $\alpha \in \Delta_{2^p}$, 使得

$$X^1(t, X^1(0) \times X_0^2, t_0) = \alpha, \forall t \geq T.$$

4 部分状态变量的一致镇定

这一部分我们考虑布尔网络的部分状态镇定. 布尔控制网络 (6) 的代数形式为式 (8). 我们采用如下等价的代数形式:

$$\begin{cases} X^1(t+1) = L_1 U(t) X^1(t) X^2(t), \\ X^2(t+1) = L_2 U(t) X^1(t) X^2(t). \end{cases} \quad (18)$$

定义 4.1 对控制布尔控制网络 (6), 考虑部分变量 x^1 , 如果存在控制序列 $\{u(t)\}$, 使得布尔控制网络系统 (6) 的部分变量 x^1 相对于 x^2 一致稳定, 则称系统 (6) 是部分变量 x^1 (相对于 x^2) 一致可镇定的.

特别地, 如果存在控制序列 $\{u(t)\}$, 使得布尔控制网络系统 (6) 的部分变量 x^1 相对于 x_0^2 是稳定的, 则称系统 (6) 是部分变量 x^1 (相对于 x_0^2) 可镇定的.

首先考虑系统可以由常值控制 U 一致镇定的条件. 由于

$$X^1(t+1) = L_1 U X(t), \quad X(t) = L U X(t-1) = \cdots = (L U)^t X(0), \quad (19)$$

即

$$X^1(t+1) = L_1 U (L U)^t X^1(0) X^2(0) = L_1 U (L U)^t W_{[2^{n-p}, 2^p]} X^2(0) X^1(0), \quad (20)$$

其中, $W_{[2^{n-p}, 2^p]}$ 是换位矩阵, 可以参看文献 [22].

如果系统能被常值控制 U 一致镇定, 则存在时刻 $T, t \geq T$ 时, 对任意的 $X^2(0), L_1 U (L U)^t W_{[2^{n-p}, 2^p]} \times X^2(0)$ 为常值映射. 为此我们有部分变量 X^1 可常值镇定的充要条件.

定理 4.2 布尔控制网络 (6) 可被一常值控制 $u = \delta_{2^m}^i$ 部分状态一致镇定, 当且仅当存在 $T, t \geq T$ 时, 矩阵 $P_{i,t}$ 的各列相同, 其中 $P_{i,t} = \text{Blk}_i(L_1)(\text{Blk}_i(L))^t W_{[2^{n-p}, 2^p]} \in \mathcal{L}_{2^p \times 2^n}$. 进一步, 记 $P_{i,t}$ 的列集合为 $\text{Col}(P_{i,t}) = \{\delta_{2^p}^{i_0}\}$, 则系统在常值控制 $u = \delta_{2^m}^i$ 的作用下将部分状态 X^1 一致镇定到 $\delta_{2^p}^{i_0}$.

证明 取常值控制 $u_0 = \delta_{2^m}^i$, 则必有

$$\begin{aligned} X^1(t+1) &= L_1 U(t) X(t) \\ &= [\text{Blk}_1(L_1) \cdots \text{Blk}_{2^m}(L_1)] \times \delta_{2^m}^i \times X(t) \\ &= \text{Blk}_i(L_1) X(t), \end{aligned} \quad (21)$$

其中,

$$\begin{aligned} X(t) &= L U(t) X(t-1) \\ &= [\text{Blk}_1(L) \cdots \text{Blk}_{2^m}(L)] \times \delta_{2^m}^i \times X(t-1) \\ &= \text{Blk}_i(L) X(t-1) = \cdots = (\text{Blk}_i(L))^t X(0). \end{aligned}$$

上式代入式 (21), 从而有

$$\begin{aligned} X^1(t+1) &= \text{Blk}_i(L_1) X(t) \\ &= \text{Blk}_i(L_1) (\text{Blk}_i(L))^t X(0) \\ &= \text{Blk}_i(L_1) (\text{Blk}_i(L))^t X^1(0) X^2(0) \\ &= \text{Blk}_i(L_1) (\text{Blk}_i(L))^t W_{[2^{n-p}, 2^p]} X^2(0) X^1(0) \\ &:= P_{i,t} X^2(0) X^1(0), \end{aligned} \quad (22)$$

其中, $P_{i,t} = \text{Blk}_i(L_1) (\text{Blk}_i(L))^t W_{[2^{n-p}, 2^p]} \in \mathcal{L}_{2^p \times 2^n}$, 记

$$P_{i,t} := [\text{Blk}_1(P_{i,t}) \text{Blk}_2(P_{i,t}) \cdots \text{Blk}_{2^{n-p}}(P_{i,t})]. \quad (23)$$

为了使部分状态 X^1 收敛到 $\delta_{2^p}^{i_0}$, 则一定存在正整数 T , 使得对任意的 $X(0) = X^1(0) \times X^2(0)$, 当 $t \geq T$ 时,

$$P_{i,t} X^2(0) X^1(0) \equiv \delta_{2^p}^{i_0}, \quad (24)$$

上式等价于

$$\text{Col}(\text{Blk}_j(P_{i,t})) = \{\delta_{2^p}^{i_0}\}, \forall j = 1, 2, \dots, 2^{n-p}. \quad (25)$$

条件的充分性可以直接检验.

设 $P_{i,t} = \text{Blk}_i(L_1)(\text{Blk}_i(L))^t W_{[2^{n-p}, 2^p]} \in \mathcal{L}_{2^p \times 2^n}$, 记

$$P_{i,t} := [\text{Blk}_1(P_{i,t}) \text{Blk}_2(P_{i,t}) \cdots \text{Blk}_{2^{n-p}}(P_{i,t})]. \quad (26)$$

关于部分状态 X^1 相对于 X_0^2 的常值镇定有如下推论.

推论 4.3 取 $X_0^2 = \delta_{2^{n-p}}^{j_0}$, 如果布尔控制网络 (6) 可由一常值控制 $u = \delta_{2^m}^{i_m}$, 使得部分状态 $x_1(t), \dots, x_p(t)$ 镇定, 当且仅当存在 $T, t \geq T$ 时, 矩阵 $\text{Blk}_{j_0}(P_{i,t})$ 的各列相同. 不妨记 $\text{Blk}_{j_0}(P_{i,t})$ 的列集合为 $\text{Col}(\text{Blk}_{j_0}(P_{i,t})) = \{\delta_{2^p}^{i_0}\}$. 进一步, 系统在常值控制 $U = \delta_{2^m}^{i_m}$ 的作用下将部分状态 X^1 镇定到 $\delta_{2^p}^{i_0}$.

下面给一个例子说明部分状态变量的常值一致镇定.

例 4.4 考虑下面的布尔控制网络

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (x_1(t) \leftrightarrow u(t)) \vee x_2(t), \\ x_2(t+1) = (x_1(t) \vee x_3(t)) \leftrightarrow x_2(t), \\ x_3(t+1) = (x_4(t) \leftrightarrow u(t)) \wedge x_2(t), \\ x_4(t+1) = x_2(t) \leftrightarrow x_4(t). \end{cases} \quad (27)$$

设 $X(t) = \times_{i=1}^4 x_i(t)$ 通过计算得到系统的代数形式为

$$X(t+1) = LU(t)X(t),$$

其中, 结构矩阵

$$L = \delta_{16}[1 \ 4 \ 3 \ 4 \ 6 \ 7 \ 8 \ 7 \ 1 \ 4 \ 7 \ 8 \ 14 \ 15 \ 12 \ 11 \ 3 \ 2 \ 3 \ 4 \ 16 \ 13 \ 16 \ 15 \ 3 \ 2 \ 7 \ 8 \ 8 \ 5 \ 4 \ 3].$$

另一方面, 设 $X^1(t) = \times_{i=1}^2 x_i(t)$, $X^2(t) = \times_{i=3}^4 x_i(t)$, 相应部分状态 X^1 与 X^2 的代数形式为

$$X^1(t+1) = L_1 U(t) X(t), \quad X^2(t+1) = L_2 U(t) X(t), \quad (28)$$

其中, 结构矩阵为

$$\begin{cases} L_1 = \delta_4[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 4 \ 4 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1], \\ L_2 = \delta_4[1 \ 4 \ 3 \ 4 \ 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 1 \ 4 \ 3 \ 4 \ 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 3 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 1 \ 4 \ 3 \ 3 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 1 \ 4 \ 3]. \end{cases} \quad (29)$$

取常值控制序列 $u(t) \equiv \delta_2^2$, 则

$$\begin{aligned} X^1(t+1) &= L_1 \delta_2^2 x(t) \\ &= L_1 \delta_2^2 L \delta_2^2 x(t-1) \\ &= L_1 \delta_2^2 (L \delta_2^2)^t X^1(0) X^2(0) \\ &= L_1 \delta_2^2 (L \delta_2^2)^t W_{[4,4]} X^2(0) X^1(0) \\ &= P_t X^2(0) X^1(0), \end{aligned} \quad (30)$$

其中, $P_t = L_1 \delta_2^2 (L \delta_2^2)^t W_{[4,4]}$,

$$\begin{cases} P_1 = \delta_4[1 \ 1 \ 1 \ 4 \ 1 \ 2 \ 1 \ 4 \ 1 \ 1 \ 4 \ 1 \ 1 \ 1 \ 4 \ 1], \\ P_2 = \delta_4[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 4 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1], \\ P_t = \delta_4[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1], t \geq 3. \end{cases} \quad (31)$$

由定理 4.2 可知, 系统 (27) 可以由常值控制序列 $u = \delta_2^2$ 将部分变量 (x_1, x_2) 相对于 (x_3, x_4) 一致镇定到 $(1, 1)$.

下面考虑状态反馈控制的一致镇定. 设有状态反馈控制 $u(t) = f(x_1, \dots, x_n(t))$, 其代数形式为 $U(t) = GX(t)$. 对于部分变量 X^1 ,

$$X^1(t+1) = L_1 U(t) X(t) = L_1 G X(t) X(t) = L_1 G \Phi_n X(t), \quad (32)$$

其中, $\Phi_n = \prod_{i=1}^n I_{2^{i-1}} \otimes [(I_2 \otimes W_{[2, 2^{n-i}]} M_r]$, $M_r = \delta_4[1 \ 4]$, 具体定义参考文献 [7].

注意到 $X(t) = LU(t-1)X(t-1) = LG\Phi_n X(t-1)$, 则易有

$$X^1(t+1) = L_1 G \Phi_n (LG \Phi_n)^t W_{[2^{n-p}, 2^p]} X^2(0) X^1(0) := P_t X^2(0) X^1(0), \quad (33)$$

其中, $P_t = L_1 G \Phi_n (LG \Phi_n)^t W_{[2^{n-p}, 2^p]}$, 记

$$P_t := [\text{Blk}_1(P_t) \ \text{Blk}_2(P_t) \ \cdots \ \text{Blk}_{2^{n-p}}(P_t)]. \quad (34)$$

为了使部分状态 X^1 收敛到 $\delta_{2^p}^{i_0}$, 则一定存在正整数 T , 使得对任意的 $X(0) = X^1(0) \ltimes X^2(0)$, 当 $t \geq T$ 时,

$$P_t X^2(0) X^1(0) \equiv \delta_{2^p}^{i_0}, \quad (35)$$

上式等价于

$$\text{Col}(P_t) = \{\delta_{2^p}^{i_0}\}, \forall j = 1, 2, \dots, 2^n. \quad (36)$$

即 P_t 为常值映射, 将上述分析总结如下.

定理 4.5 布尔控制网络 (6) 部分状态 X^1 可通过闭环控制一致镇定当且仅当存在一个 $2^m \times 2^n$ 逻辑矩阵 G , 正整数 $1 \leq t \leq 2^n$, 使得 $L_1 G \Phi_n (LG \Phi_n)^t W_{[2^{n-p}, 2^p]}$ 为常值映射.

关于部分状态 X^1 相对于 X_0^2 的闭环镇定有如下推论.

推论 4.6 取 $X_0^2 = \delta_{2^{n-p}}^{j_0}$, 如果布尔控制网络 (6) 可通过状态反馈控制, 使得部分状态 $x_1(t), \dots, x_p(t)$ 镇定, 当且仅当存在 $T, t \geq T$ 时, 矩阵 (34) 中 $\text{Blk}_{j_0}(P_t)$ 的各列相同. 不妨记 $\text{Blk}_{j_0}(P_t)$ 的列集合为 $\text{Col}(\text{Blk}_{j_0}(P_t)) = \{\delta_{2^p}^{i_0}\}$. 进一步, 系统在状态反馈控制 $U = GX$ 的作用下将部分状态 X^1 镇定到 $\delta_{2^p}^{i_0}$.

例 4.7 考虑下述布尔控制网络

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (x_1(t) \leftrightarrow u(t)) \wedge x_2(t), \\ x_2(t+1) = (x_1(t) \vee u(t)) \leftrightarrow x_1(t), \\ x_3(t+1) = (x_1(t) \leftrightarrow x_4(t)) \rightarrow x_2(t), \\ x_4(t+1) = u(t) \vee x_3(t). \end{cases} \quad (37)$$

设 $X(t) = \times_{i=1}^4 x_i(t)$ 通过计算得到系统的代数形式为

$$X(t+1) = LU(t)X(t),$$

其中, 结构矩阵

$$L = \delta_{16}[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 11 \ 9 \ 11 \ 9 \ 13 \ 13 \ 13 \ 13 \ 13 \ 15 \ 13 \ 15 \ 9 \ 9 \ 10 \ 10 \ 11 \ 9 \ 12 \ 10 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 9 \ 11 \ 10 \ 12].$$

另一方面, 设 $X^1(t) = \times_{i=1}^2 x_i(t)$, $X^2(t) = \times_{i=3}^4 x_i(t)$, 相应部分状态 X^1 与 X^2 的代数形式为

$$\begin{cases} X^1(t+1) = L_1 U(t) X(t), \\ X^2(t+1) = L_2 U(t) X(t), \end{cases} \quad (38)$$

其中, 结构矩阵为

$$\begin{cases} L_1 = \delta_4[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3], \\ L_2 = \delta_4[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1 \ 3 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 1 \ 4 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 3 \ 2 \ 4]. \end{cases} \quad (39)$$

选择状态反馈控制 $u(t) = x_2(t) \vee x_4(t)$, 代数形式为 $U(t) = GX(t)$, 其中

$$G = \delta_2[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2].$$

则部分变量 X^2 的闭环系统为

$$\begin{aligned} X^2(t+1) &= L_2 U(t) X(t) = L_2 G X(t) X(t) = L_2 G \Phi_4 X(t) \\ &= L_2 G \Phi_4 (L G \Phi_4)^t X^1(0) X^2(0) \\ &:= P_t X^1(0) X^2(0), \end{aligned} \quad (40)$$

其中, $P_t = L_2 G \Phi_4 (L G \Phi_4)^t W_{[2^2, 2^2]}$, 特别的,

$$P_t = \delta_4[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1], t \geq 1. \quad (41)$$

由定理可知, 系统 (37) 可以由状态反馈控制 $u = x_2 \vee x_4$ 将部分变量 (x_3, x_4) 相对于 (x_1, x_1) 一致镇定到 $(1, 1)$.

5 结论

本文利用矩阵的半张量积, 将布尔控制网络转化为离散时间动态系统. 从系统的结构矩阵出发, 研究了部分状态稳定与镇定. 在理论上, 我们将逻辑系统转化为代数系统之后, 系统的状态变量 n 增加的情况下, 其结构矩阵阶数 2^n 指数增长, 计算量急剧增加; 而在实际的背景中, 比如研究基因调控网络的干预时, 只需关注个别特殊的基因, 大多数基因的演化往往不去关注. 为此, 研究布尔控制网络 (一般的逻辑控制系统) 中部分状态变量的稳定与镇定具有一定的理论背景和应用价值. 通过本文的研究, 得到了部分状态稳定、一致稳定的条件. 还得到了分别用常值控制和状态反馈控制使得系统部分状态镇定、一致镇定的充要条件.

参考文献

- 1 Kauffman S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets. *J Theor Biol*, 1969, 22: 437–467
- 2 Kauffman S A. *The Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution*. New York: Oxford University Press, 1993
- 3 Onami S, Kyoda K M, Morohashi M, et al. The DBRF Method for Inferring a Gene Network from Large-Scale Steady-State Gene Expression Data. *Foundations of Systems Biology*. Cambridge: MIT Press, 2001. 59–75
- 4 Shmulevich I, Dougherty R, Zhang W. From Boolean to probabilistic Boolean networks as models of gene regulatory networks. *P IEEE*, 2002, 90: 1778–1792
- 5 Shmulevich I, Dougherty E R, Kim S, et al. Probabilistic Boolean networks: a rule-based uncertainty model for gene regulatory networks. *Bioinformatics*, 2002, 2: 261–274
- 6 Cheng D Z. Semi-tensor product of matrices and its applications—a survey. In: *Proceedings of the International Congress of Chinese Mathematicians*, Beijing, 2007. 641–668
- 7 Cheng D Z, Qi H S. A linear representation of dynamics of Boolean networks. *IEEE Trans Automat Control*, 2010, 55: 2251–2258
- 8 Cheng D Z, Qi H S, Li Z Q, et al. Stability and stabilization of Boolean networks. *Int J Robust Nonlin Control*, 2011, 21: 134–156
- 9 Li F F, Sun J T. Stability and stabilization issue of probabilistic Boolean network. In: *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference*, Yantai, 2011. 6380–6385
- 10 Li F F, Sun J T. Stability and stabilization of Boolean networks with impulsive effects. *Syst Control Lett*, 2012, 61: 1–5
- 11 Li H T. Global stability and controllability of switched Boolean networks. In: *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*, Hefei, 2012. 82–88
- 12 Vorotnikov V I. *Partial Stability and Control*. Boston: Springer, 1998
- 13 Silakov V P, Yudaev G S. On stability of difference systems relative to part of the variables. *Differ Equations*, 1975, 11: 687–691
- 14 Krasovskii N N. *Stability of Motion*. Stanford: Stanford University Press, 1963
- 15 Corduneanu C. On partial stability for delay systems. *Ann Pol Math*, 1975, 29: 357–362
- 16 Simeonov P S, Bainov D D. Stability with respect to part of variables in systems with impulse effects. *J Math Anal Appl*, 1987, 124: 547–560
- 17 Jian J G. Analysis of stability and study on control for dynamic systems with respect to partial state variables. Dissertation for Ph.D. Degree. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2005 [蹇继贵. 动力系统部分变量的稳定性分析与控制研究. 博士学位论文. 武汉: 华中科技大学, 2005]
- 18 Rade L, Westergren B. *Mathematics Handbook for Science and Engineering*. 5th ed. Berlin: Springer, 2004
- 19 Ljung L, Söderström T. *Theory and Practice of Recursive Identification*. Cambridge: MIT Press, 1983
- 20 Cheng D Z, Li Z Q, Qi H S. Realization of Boolean control networks. *Automatica*, 2010, 46: 62–69
- 21 Cheng D Z, Qi H S. Controllability and observability of Boolean networks. *Automatica*, 2009, 45: 1659–1667
- 22 Cheng D Z, Qi H S. *Semi-Tensor Product of Matrix—Theory and Applications*. Beijing: Science Press, 2007 [程代展, 齐洪胜. 矩阵的半张量积: 理论与应用. 北京: 科学出版社, 2007]

Partial state stability and stabilization of Boolean control networks

SONG JinLi & LI ZhiQiang*

School of Mathematics and Information Science, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou 450046, China

*E-mail: lizhiqiang@amss.ac.cn

Abstract The paper deals with problems on the stability and stabilization of Boolean networks with respect to a given part of variables characterizing the Boolean network. Using the semi-tensor product of matrices and the matrix expression of logic, the dynamics of a Boolean (control) network can be converted to discrete time linear (bilinear) dynamics called the algebraic form of the Boolean (control) network. The two main results are as follows: (i) From the algebraic form of a Boolean (control) network, two partial stability definitions are introduced. One is partial stability with respect to another variable set, and the other is partial stability with respect to arbitrary initial states. (ii) Based on the algebraic form, necessary and sufficient conditions for the stability of global partial states with respect to the variable set and arbitrary initial states are obtained. Examples are provided to illustrate the effectiveness of our results.

Keywords Boolean control network, semi-tensor product of matrices, partial stability, partial stabilization, uniform stability

SONG JinLi was born in 1981. She received the M.S. degree in applied mathematics from the Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou, in 2007. She is currently a lecturer at School of Mathematics and Information Science, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou. Her research interests include logical dynamical systems and semi-tensor product.

LI ZhiQiang was born in 1980. He received the Ph.D. degree in systems theory from the Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing, in 2010. He is currently an associate professor at School of Mathematics and Information Science, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou. His research interests include logical dynamical systems, nonlinear systems and game theory.