Lorentz 调和映射及其热流

献给王斯雷教授 85 华诞

韩小利^{1*}, 刘磊², 赵亮³

1. 清华大学数学科学系, 北京 100084;

2. Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Leipzig 04103, Germany;

3. 北京师范大学数学科学学院, 数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京 100875

E-mail: xlhan@math.tsinghua.edu.cn, leiliu@mis.mpg.de, liangzhao@bnu.edu.cn

收稿日期: 2018-04-17; 接受日期: 2018-06-12; 网络出版日期: 2018-10-10; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11471014) 资助项目

摘要 本文系统地介绍了与映到 Lorentz 流形的调和映射相关的背景知识, 并且介绍了与其相关的最新研究进展, 主要包括同伦类中的存在性、热流的整体弱解和爆破分析等结果.

关键词 调和映射 Lorentz 流形 热流

MSC (2010) 主题分类 53C43, 58E20

1 引言

调和映射是几何分析中一个基本的研究对象, 很多重要的几何问题, 例如, 极小曲面、平均曲率流、Teichmüller 理论和全纯曲线等, 都使用过调和映射的研究结果与方法. 近年来, 关于调和映射具有物理和几何背景的推广也吸引了很多学者进行研究, 其中不乏重要的问题和结果. 本文主要介绍当目标流形为 Lorentz 流形时, 调和映射的背景知识及其基本性质.

1.1 经典调和映射

为了对问题有更全面的认识, 本小节先介绍与经典调和映射有关的一些重要问题. 经典分析中的一个基本的研究对象是调和函数, 它是定义在 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数, 并且在所有具有相同边值的合适的函数空间中, 是 Dirichlet 泛函的极小点 $\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$. 当我们把 u 推广为 m 维 Riemann 流形 (M, h) 与 n 维 Riemann 流形 (N, g) 之间的映射时, 考虑如下能量泛函:

$$\frac{1}{2} \int_M |\nabla u|^2 dv_h, \quad (1.1)$$

英文引用格式: Han X L, Liu L, Zhao L. Lorentzian harmonic map and its heat flow (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1303–1314, doi: 10.1360/N012018-00106

此时泛函的临界点就称为调和映射, 这里 $|\nabla u|^2$ 定义为

$$|\nabla u|^2 := h^{\alpha\beta}(x)g_{ij}(u(x))\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial x^\beta},$$

其中 (x^α) 和 (u^i) 分别是流形 M 和 N 中的局部坐标. 临界点方程为

$$\Delta_h u^i + h^{\alpha\beta}\Gamma_{jk}^i(u)\frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u^k}{\partial x^\beta} = 0, \quad \text{在 } M \text{ 内}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

其中

$$\Delta_h := \frac{1}{\sqrt{\det(h_{\alpha\beta})}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{\det(h_{\alpha\beta})}h^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)$$

是 (M, h) 上的 Laplace-Beltrami 算子, $\Gamma_{jk}^i := \frac{1}{2}g^{il}(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{kj,l})$ 是 (N, g) 的 Christoffel 记号. 若目标流形 (N, g) 是紧 Riemann 流形, 根据 Nash 嵌入定理, 可以将 (N, g) 等距嵌入到 Euclid 空间 $\mathbb{R}^K$ 中, 此时调和映射方程可以写成 $-\Delta_h u = A(u)(\nabla u, \nabla u)$, 其中 A 是 N 嵌入到 K 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^K$ 中的第二基本型.

为了研究调和映射在同伦类中的存在性, Al'ber^[1,2]、Eells 和 Sampson^[3] 及 Hamilton^[4] 等研究了调和映射的热流. 热流的方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_h u + A(u)(\nabla u, \nabla u). \quad (1.2)$$

因为这是一个梯度流, 若可以证明热流存在长时间解, 则可以期望当 $t \rightarrow \infty$ 时映射收敛到一个调和映射, 但这在一般情形下不成立, 通常需要假设恰当的几何或分析条件. Eells 和 Sampson 在关于存在性的奠基性论文^[3]中引入了热流的方法, 并且证明了当目标流形有非正截面曲率时, 每个同伦类中存在调和映射; 随后, Hamilton^[4]和 Chang^[5]等把结论推广到带边流形的情形. 目标流形具有非正截面曲率的条件可以进一步减弱, Ding 和 Lin^[6]证明了当目标流形的万有覆盖空间上存在平方增长的非负严格凸函数时存在性成立; Li 和 Zhu^[7]及 Li 和 Yang^[8]把平方增长的条件减弱为多项式增长, 随后 Li 和 Sun^[9]又把条件减弱为指数增长. 除了热流的方法, Sacks 和 Uhlenbeck^[10]关于二维调和球面的文献是在变分的框架下研究调和映射存在性的重要工作, 他们通过引入 α 调和映射, 研究序列在 α 趋向于 1 时的收敛性.

通过调和映射的热流研究同伦类中调和映射的存在性时, 热流可能在有限时刻或无穷远处爆破. 在研究调和映射序列的收敛性时, 同样会遇到序列爆破的问题. 为了处理这种状况, 在调和映射的研究中发展出了重要的奇点分析技巧, 通过在奇点的爆破分析, 会得到一串泡泡 (bubble) (二维调和球面), 映射的一部分能量会由泡泡携带. Ding 和 Tian^[11]在张量场 L^2 有界的条件下, 证明了渐近调和映射奇点处的能量等式, 即这种爆破过程不会造成能量的损失. 进一步, Qing 和 Tian^[12]证明了调和映射的弱极限与爆破出的泡泡之间是直接连接的, 没有脖子 (neck). 更一般地, 最近, Li 和 Wang^[13]给出了 α 调和映射序列的能量等式成立的条件, 以及爆破时关于脖子长度的精细描述, 这种爆破行为发生在边界时会与内部爆破有明显的区别, 对应的边界爆破的结果可以参见文献^[14]. 关于爆破行为的研究, 另一个方向是改进关于张量场的可积性条件, 这个方向有很多相关的工作, 其中值得一提的是, Wang 等^[15]把关于张量场的可积条件减弱到了 L^p 有界 ($p > 1$).

当调和映射热流发生爆破时, 除了前面提到的假设恰当的几何和分析条件来保证热流的长时间存在性和收敛性, 还有一种研究思路是转而寻求一个整体弱解. 二维情形的结果是由 Struwe^[16]给出的,

他证明了二维调和映射热流存在唯一的整体弱解, 弱解在有限个奇点之外是正则解, 并且它在无穷远收敛到一个调和映射. 高维情形的结果可以参见文献 [17, 18], 他们证明了高维情形整体弱解的存在性和弱解的部分正则性, 在高维情形的奇点不一定是有限点集; 同时给出了奇点集的 Hausdorff 维数的刻画. 需要注意, 由于在奇点处的拓扑变化, 整体弱解收敛到调和映射并不能说明出发映射所属的同伦类中存在调和映射.

在我们尝试通过变分的直接方法寻找调和映射时, 得到的通常是弱调和映射, 因此有必要研究弱解的正则性. 很多学者对此问题做出贡献, 例如, Morrey^[19] 证明了二维极小调和映射的正则性; Hélein^[20] 和 Rivière^[21] 都证明了一般情形下二维弱调和映射的正则性. 其中 Hélein 利用目标流形的对称性和移动标架的技巧来解决问题, 而 Rivière 发现了一种新的守恒律, 同样可以很巧妙地给出答案, 这个方法已被用于解决很多非线性分析问题弱解的正则性. 当出发流形具有更高维数时, 极小调和映射的部分正则性由 Schoen 和 Uhlenbeck^[22] 证明; 关于稳定 (stationary) 调和映射的部分正则性, 可以参见文献 [23, 24]; 关于调和映射热流在高维情形的部分正则性, 在 Chen 和 Struwe^[18] 的结果之后, Chen^[25] 还把它推广到了带边流形的情形.

1.2 具有物理和几何背景的推广

调和映射被物理学家称为非线性 σ 模型, 具有明确的物理意义, 结合其物理背景进行推广是自然的想法. 例如, Chen 等^[26] 从超对称模型的分析基础出发, 提出并研究了 Dirac 调和映射 (ϕ, ψ) , 这可以看作是耦合了 Bose 场 ϕ 和 Fermi 场 ψ 的非线性 σ 模型. 这种具有物理背景的数学问题往往具有良好的几何结构, 此后有大量关于这种调和映射的研究并取得了丰富的成果. 从广义相对论的角度出发, 物理学家关心的另一种自然的推广形式是出发流形或者目标流形为 Lorentz 流形的调和映射. 当出发流形是 Lorentz 流形时, 分析上归结为一个非线性双曲问题, Gu^[27] 及 Ginibre 和 Velo^[28] 证明了从二维 Minkowski 空间出发的调和映射所对应的 Cauchy 问题存在整体解, 更高维数的存在性结果可以参见文献 [29, 30]. 当我们把目标流形推广到 Lorentz 流形的情形时, 所对应的调和映射即是本文的主要研究对象, 为简单起见, 下文把这种调和映射称为 Lorentz 调和映射. Lorentz 调和映射在物理中的一个具体应用与 AdS/CFT (anti-de Sitter/conformal field theory) 对应有关, Maldacena^[31] 在 1997 年提出了 AdS/CFT 对应的概念, 这是弦论中一个非常重要的进展, 此后, Alday 和 Maldacena^[32] 研究了反 de Sitter 空间中极小曲面的物理意义及其与 AdS/CFT 对应的联系, 调和映射是比极小曲面更一般的几何对象, 而 de Sitter 空间 S_1^n 和反 de Sitter 空间 $\mathbb{H}_1^n$ 恰好是两种特殊的 Lorentz 流形, 这说明了研究映到 Lorentz 流形的调和映射在物理学中的重要性.

另一方面, 从几何学的角度来看, 把经典调和映射的出发流形或目标流形由 Riemann 流形推广为更一般的流形或限制为具有特殊几何结构的流形, 也是自然而且有意义的. 例如, Siu^[33] 研究了 Kähler 流形之间调和映射的复解析性, 并把它应用于判断流形的几何性质, 由此证明了紧 Kähler 流形的强刚性定理; Jost 和 Yau^[34] 通过研究从 Hermite 流形映到 Riemann 流形的调和映射, 把 Siu 的结果推广到 Hermite (虚弱 (astheno)-Kähler) 流形的情形. 沿着这个方向, 还有人研究了很多类似问题, 例如, Hermite 流形到 Kähler 流形, Hermite 流形之间, Hermite 流形到 Riemann 流形以及 Finsler 流形到 Riemann 流形等各种不同类型的调和映射, Chen 等^[35] 还提出了一种更为一般的 V -调和映射, 也是很有趣的问题. 以上情形中, 无论 Kähler 还是 Hermite 流形, 都还是在 Riemann 流形的框架下对调和映射进行推广, 而我们要讨论的 Lorentz 调和映射的目标流形是伪 Riemann 流形, 这种推广脱离了 Riemann 几何的框架, 此时由于度量的非正定性, 会产生不同的困难, 是有新意且有难度的问题. 作为

几何应用, 我们可以把它与几何中的另一个重要的研究对象 Willmore 曲面联系起来, 我们知道, 在研究 Willmore 曲面时, 一个重要的工具是共形 Gauss 映射, 这相当于把曲面的点与 Lorentz 球面上的点对应起来, 从而把 Willmore 曲面方程转化为 Lorentz 球面中的极小曲面方程, 如果假设 Willmore 曲面满足更多的几何条件, 方程就可以进一步转化为映到 Lorentz 球面的调和映射方程^[36,37].

1.3 Lorentz 调和映射及其热流

本小节给出 Lorentz 调和映射及其热流具体的数学定义. 假设 (M, h) 是 m 维紧 Riemann 流形, 边界记为 ∂M , $(N \times \mathbb{R}, g)$ 是标准稳态 (stationary) Lorentz 流形 (以下简称稳态流形), 这是物理中常用的一种标准模型, 简单地说, 它是具有弯曲 (warped) 乘积度量的 Lorentz 流形, 这种度量形如

$$g = g_N - \beta(d\theta + \omega)^2,$$

这里 $(\mathbb{R}, d\theta^2)$ 是一维 Euclid 空间, (N, g_N) 是 n 维紧 Riemann 流形, 由 Nash 嵌入定理, 假设 N 可以嵌入到 K 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^K$, ω 是 N 上的 1 形式, β 是定义在 N 上的光滑正函数. 因为 N 是紧流形, 所以存在两个正常数 λ_1 和 λ_2 使得 $0 < \lambda_1 \leq \beta(y) \leq \lambda_2 < \infty, \forall y \in N$. 特别地, 我们还研究上述度量在 $\omega = 0$ 时的特殊情形, 此时, g 化简为

$$g = g_N - \beta d\theta^2,$$

具有这种简化度量的 $N \times \mathbb{R}$ 称为标准静态 (static) Lorentz 流形 (以下简称静态流形). 关于上述 Lorentz 流形的更多背景知识可以参见文献 [38]. 类似于经典调和映射能量泛函 (1.1) 的定义, 对于从 (M, h) 映到稳态流形 $(N \times \mathbb{R}, g)$ 的映射 (u, v) , 考虑如下能量泛函:

$$E_g(u, v) = \frac{1}{2} \int_M \{|\nabla u|^2 - \beta(u)|\nabla v + \omega_i(u)\nabla u^i|^2\} dv_h. \quad (1.3)$$

因为上述能量泛函是用 Lorentz 度量 g 定义的, 称它为映射 (u, v) 的 Lorentz 能量, 并把能量泛函 (1.3) 对应的临界点称为 Lorentz 调和映射. 临界点方程的计算过程可以参见文献 [39], 最终得到的临界点方程为

$$\begin{cases} -\Delta u = A(u)(\nabla u, \nabla u) - B^\top(\nabla u, \nabla v), \\ -\operatorname{div}\{\beta(u)(\nabla v + \omega_i(u)\nabla u^i)\} = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

其中 A 是 N 在 $\mathbb{R}^K$ 中的第二基本型, $B = (B^1, B^2, \dots, B^K)$ 且

$$B^j := \beta(\nabla v + \omega_i \nabla u^i) \cdot \nabla u^k \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial y^k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial y^j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \beta}{\partial y^j} |\nabla v + \omega_i \nabla u^i|^2.$$

$B^\top$ 是 B 沿着映射 u 的切向部分. 当目标流形为静态流形, 即 $\omega = 0$ 时, 能量泛函和临界点方程可以化简为

$$E_g(u, v) = \frac{1}{2} \int_M \{|\nabla u|^2 - \beta(u)|\nabla v|^2\} dv_h, \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} -\Delta u = A(u)(\nabla u, \nabla u) - B^\top(u)|\nabla v|^2, \\ -\operatorname{div}\{\beta(u)\nabla v\} = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

此时, $B^j := -\frac{1}{2} \frac{\partial \beta(u)}{\partial y^j}$. 为了叙述方便, 对任意的 $\Omega \subset M$, 我们还定义如下能量:

$$E(u, v; \Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\} dx, \quad E(u; \Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad E(v; \Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx.$$

为了区别于 Lorentz 能量, 我们称它们为正能量. 如果记 $U = (u, v)$, 并用 U 来描述能量泛函和临界点方程, 则 Lorentz 调和映射与经典调和映射在形式上是完全一致的, 这提示我们研究经典情形的某些思路和方法可以用来研究 Lorentz 调和映射. 但是, 另一方面, 由于 Lorentz 度量非正定, 造成 Lorentz 调和映射内在的数学结构与经典情形有明显区别, 所以, 在研究过程中把映射分为映到 N 和 $\mathbb{R}$ 的两部分, 把方程看成 u 和 v 的耦合系统, 这样更有助于了解清楚 Lorentz 调和映射的特有性质.

对于经典的调和映射, 当出发流形是 Riemann 曲面时, 能量泛函具有共形不变性并且此时恰好是 Palsis-Smale 条件的临界情形, 与一般维数相比, 二维情形的研究方法更为丰富, 在本文中, 如无特别说明, 我们也总假设出发流形 M 是二维 Riemann 曲面.

为了研究 Lorentz 调和映射的存在性, 我们期望沿用 Eells 和 Sampson^[3] 引入的热流方法. 但若是直接研究 (u, v) 对应的抛物方程, 即套用 (1.2) 的形式, 经过计算会发现这个抛物方程组仍然可以看作是 Lorentz 能量 $E_g(u, v)$ 的梯度流, 然而由于 Lorentz 度量中存在负号, 沿热流并不能控制能量下界, 这样就不可能通过对目标流形加几何或者分析条件来得到能量的一致估计, 从而不能得到同伦类中的存在性结果. 此时我们甚至无法判断热流的爆破情形, 更不能进行奇点分析, 这是 Lorentz 调和映射热流的一个本质困难. 为了克服这样的困难, Han 等^[40] 研究了一种椭圆抛物流, 它关于 u 是一个抛物方程组, 关于 v 形式上是一个椭圆方程组, 由于 u 和 v 的耦合, v 实际上也是随时间演化的映射, 为了简化分析的复杂度, 我们考虑了目标流形为静态流形的情形. 具体地, 设 (M, h) 是紧 Riemann 曲面, 边界为 ∂M , $(N \times \mathbb{R}, g)$ 是标准静态 Lorentz 流形, 令 $\phi \in C^{2+\alpha}(M, N)$, $\psi \in C^{2+\alpha}(\partial M, \mathbb{R})$, 其中 $0 < \alpha < 1$, 定义如下热流:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + A(u)(\nabla u, \nabla u) - B^T(u)|\nabla v|^2, & \text{在 } M \times [0, T) \text{ 内,} \\ -\operatorname{div}\{\beta(u)\nabla v\} = 0, & \text{在 } M \times [0, T) \text{ 内.} \end{cases} \quad (1.7)$$

热流的初边值为

$$\begin{cases} u(x, t) = \phi(x), & \text{在 } M \times \{t = 0\} \cup \partial M \times \{t > 0\} \text{ 上,} \\ v(x, t) = \psi(x), & \text{在 } \partial M \times \{t > 0\} \text{ 上.} \end{cases} \quad (1.8)$$

由标准的椭圆方程理论, 对于给定的上述 (ϕ, ψ) , 存在唯一的 $v \in C^{2+\alpha}(M)$ 满足

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\{\beta(\phi)\nabla v\} = 0, & \text{在 } M \text{ 内,} \\ v(x) = \psi, & \text{在 } \partial M \text{ 上.} \end{cases}$$

v 称为 ψ 的延拓, 为简单起见, 我们依然把它记为 $\psi \in C^{2+\alpha}(M)$, 在下文中如有必要, 我们使用的是按此方式进行延拓后的函数 ψ .

2 热流及存在性

关于 Lorentz 调和映射的存在性, 早期的结果多是研究静态流形这种简化情形, 例如, Benci 等^[41] 研究了静态时空中多重测地线的存在性. 对于从二维曲面出发的 Lorentz 调和映射, 当目标流形为球

面 $\mathbb{S}^2$ 和 $\mathbb{R}$ 构成的静态流形 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 时, Greco^[42, 43] 用变分的办法证明了对应的边值问题有解且不唯一. 由于 Lorentz 度量的非正定性, 能量泛函 (1.5) 是没有下界的, 所以不能像用变分的方法处理经典调和映射存在性那样, 直接寻找泛函的极小点. Greco 沿用了 Sacks 和 Uhlenbeck^[10] 在关于二维调和球面的重要工作中的想法, 研究 (1.5) 对应的扰动能量泛函

$$E_{g,\epsilon}(u, v) = \int_{\Omega} (1 + |\nabla u|^2)^{1+\epsilon} dx - \int_{\Omega} \beta(u) |\nabla v|^2 dx,$$

通过 u 与 v 的耦合关系, 先固定 u 之后讨论泛函的上界, 再得到整个泛函的临界点 $(u_{\epsilon}, v_{\epsilon})$. 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 通过研究序列的收敛性, 证明 $(u_{\epsilon}, v_{\epsilon})$ 会收敛到光滑的调和映射, 从而得到如下的存在性.

定理 2.1 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是二维有界区域, 边界为 $\partial\Omega$, 对于任意的 $(\phi, \psi) \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$, 若 ϕ 不是常值映射, 则存在至少两个 Lorentz 调和映射 $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in C^{\infty}(\Omega, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}) \cap C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$ 满足方程 (1.6), 并且 $(u_1, v_1)|_{\partial\Omega} = (u_2, v_2)|_{\partial\Omega} = (\phi, \psi)$.

当目标流形是一般的静态流形时, 为了得到在同伦类中 Lorentz 调和映射的存在性, 我们研究了上一节定义的热流 (1.7) 和 (1.8). 在本节接下来的内容中, 如无特别说明, 映射的出发流形是二维的 Riemann 曲面 (M, h) , M 的边界记为 ∂M , 目标流形是标准静态 Lorentz 流形 $(N \times \mathbb{R}, g)$. 为了得到热流 (1.7) 和 (1.8) 的长时间存在性和收敛性, 首先需要研究热流的短时间行为并对奇点集给出刻画. Han 等^[40] 证明了如下结论.

定理 2.2 假设 $0 < \alpha < 1$, 对任意的 $\phi \in C^{2+\alpha}(M, N)$ 和 $\psi \in C^{2+\alpha}(\partial M, \mathbb{R})$, 存在 $T_1 > 0$ 使得 (1.7) 和 (1.8) 有唯一解 $u \in \bigcap_{0 < s < T_1} C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(M \times [0, s])$, 并且

$$v, \nabla v \in \bigcap_{0 < s < T_1} C^{\alpha, \alpha/2}(M \times [0, s]), \quad v \in L^{\infty}([0, T_1]; C^{2+\alpha}(M)).$$

热流有可能在有限时间或无穷远爆破, 为了刻画热流的爆破时间和相应的奇点集, 我们需要如下的小能量正则性定理.

引理 2.1 假设 $(\phi, \psi) \in C^{2+\alpha}(M, N \times \mathbb{R})$, $z_0 = (x_0, t_0) \in M \times (0, T_1]$, 用 $P_r^M(z_0)$ 表示集合 $B_r^M(x_0) \times [t_0 - r^2, t_0]$, (u, v) 是定理 2.2 中得到的短时间解, 则存在正常数

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon(M, N, \|\phi\|_{C^{2+\alpha}(M)}, \|\psi\|_{C^{2+\alpha}(M)}) > 0, \\ C &= C(\alpha, r, M, N, \|\phi\|_{C^{2+\alpha}(M)}, \|\psi\|_{C^{2+\alpha}(M)}) > 0, \end{aligned}$$

当 $\sup_{[t_0 - r^2, t_0]} E(u(t), B_r^M(x_0)) \leq \epsilon$ 时,

$$r \|\nabla v\|_{L^{\infty}(P_{r/2}^M(z_0))} + r \|\nabla u\|_{L^{\infty}(P_{r/2}^M(z_0))} \leq C,$$

并且对任意的 $0 < \beta < 1$, 有

$$\sup_{t_0 - \frac{r^2}{4} \leq t \leq t_0} \|v(t)\|_{C^{2+\alpha}(B_{r/2}^M(x_0))} + \|u\|_{C^{\beta, \beta/2}(P_{r/2}^M(z_0))} + \|\nabla u\|_{C^{\beta, \beta/2}(P_{r/2}^M(z_0))} \leq C(\beta).$$

另外, 如果 $\sup_{x_0 \in M} \sup_{[t_0 - r^2, t_0]} E(u(t), B_r^M(x_0)) \leq \epsilon$, 那么,

$$\sup_{t_0 - \frac{r^2}{8} \leq t \leq t_0} \|v(t)\|_{C^{2+\alpha}(M)} + \|u\|_{C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(M \times [t_0 - \frac{r^2}{8}, t_0])} \leq C,$$

还有

$$\|v\|_{C^{\alpha, \alpha/2}(M \times [t_0 - \frac{r^2}{8}, t_0])} + \|\nabla v\|_{C^{\alpha, \alpha/2}(M \times [t_0 - \frac{r^2}{8}, t_0])} \leq C.$$

在上述引理及以后的内容中, $B_r^M(x)$ 都表示 M 上以 x 为中心、以 r 为半径的测地球. 由引理 2.1 容易看出, 热流的爆破是因为映射能量的聚集, 因此, 爆破时刻可以用如下方式描述:

$$\limsup_{x \in M, t \rightarrow T_1} E(u; B_r^M(x)) > \epsilon, \quad \forall r > 0. \quad (2.1)$$

在爆破时刻热流的奇点集定义为

$$S(u, T_1) := \left\{ x \in M \mid \limsup_{t \rightarrow T_1} E(u; B_r^M(x)) > \epsilon, \forall r > 0 \right\}.$$

关于这种热流的一个关键之处是, 我们观察到沿着热流 u 和 v 的正能量都可以由初值给出上界, 因此, 奇点集一定是有限点构成的集合, 并且在奇点处, 热流无论在 M 的内部还是边界发生爆破, 爆破出的都是经典的调和球面. 有了这样的认识之后, 就可以进一步证明同伦类中的存在性, 为了描述存在性定理, 我们先给出非负严格凸函数的定义.

定义 2.1 设 $\rho \in C^2(N)$ 是 (N, g_N) 上的非负函数, $d(x, x_0)$ 是 $x, x_0 \in N$ 之间的距离, 若 ρ 满足

(1) $\nabla^2 \rho(x) > 0, \forall x \in N$;

(2) 存在正整数 d_0 和 $x_0 \in N$, 使得 $\rho(x) \leq C(1 + d(x, x_0))^{d_0}$,

则称 ρ 是多项式增长的非负严格凸函数.

文献 [40] 证明了如下的存在性定理.

定理 2.3 假设 N 的万有覆盖空间 $(\tilde{N}, \tilde{g})$ 上存在多项式增长的非负严格凸函数 $\rho \in C^2(\tilde{N})$, 那么, 对任意给定的 $\phi \in C^{2+\alpha}(M, N)$, $\psi \in C^{2+\alpha}(\partial M, \mathbb{R})$, 椭圆抛物系统 (1.7) 和 (1.8) 存在整体解

$$u \in \bigcap_{0 < s < \infty} C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(M \times [0, s]),$$

并且 $v, \nabla v \in \bigcap_{0 < s < \infty} C^{\alpha, \alpha/2}(M \times [0, s]), v \in L^\infty([0, \infty); C^{2+\alpha}(M))$. 进一步, $(u(x, t), v(x, t))$ 存在子列, 在 C^2 中收敛到一个 Lorentz 调和映射 $(u_\infty, v_\infty): M \rightarrow N \times \mathbb{R}$, 边值为 $u_\infty|_{\partial M} = \phi$ 和 $v_\infty|_{\partial M} = \psi$.

当 N 具有非正截面曲率时, 在 N 的万有覆盖空间 $\tilde{N}$ 中任取一点, 平方距离函数 $d^2(\cdot, x_0)$ 就是定义在 $\tilde{N}$ 上的平方增长的非负严格凸函数, 所以, Al'ber^[1, 2] 及 Eells 和 Sampson^[3] 等关于经典调和映射热流的结果也可以推广到 Lorentz 调和映射的情形.

推论 2.1 当 (N, g_N) 是具有非正截面曲率的紧 Riemann 流形时, 定理 2.3 的结论同样成立.

当热流发生爆破时, 除了像上述定理 2.3 和推论 2.1 那样, 通过假设几何或分析条件来得到同伦类中调和映射的存在性, 另一种处理方法是寻找热流的整体弱解, 当目标流形是标准静态 Lorentz 流形时, Han 等^[44] 证明了 Lorentz 调和映射热流存在整体弱解并且弱解在奇点集之外是正则解.

定理 2.4 假设 $\phi \in C^{2+\alpha}(\partial M, N)$ 并且 $\psi \in C^{2+\alpha}(\partial M, \mathbb{R})$, 则椭圆抛物系统 (1.7) 和 (1.8) 在 $M \times [0, \infty)$ 上存在整体弱解 $(u, v) \in V(M \times [s, t])$. 进而, 热流的奇点集 $\{(x^l, T_k)\}_{l=1}^{l_k}$ 至多包含有限个点, 由 (2.1) 给出, 其中 $1 \leq l \leq l_k, 1 \leq k \leq K, \sum_{k=1}^K l_k \leq L, K$ 和 L 是依赖于 $M, N \times \mathbb{R}, \Lambda, \phi$ 和 ψ 的非负整数.

上述整体弱解在奇点集之外是正则解, 即在爆破时刻 $\{T_k\}_{k=1}^K$ 之外, $u \in C_{\text{loc}}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(M \times (0, \infty)), v, \nabla v \in C_{\text{loc}}^{\alpha, \alpha/2}(M \times (0, \infty)), v \in L^\infty((0, \infty); C^{2+\alpha}(M))$, 在奇点集 $\bigcup_{k=1}^K \{(x^l, T_k)\}_{l=1}^{l_k}$ 之外, $u, \nabla u \in C_{\text{loc}}^{\alpha, \alpha/2}(M \times (0, \infty)), v \in L^\infty((0, \infty); C_{\text{loc}}^{2+\alpha}(M))$.

最后, 可以找到时间序列 $t_i \rightarrow \infty$ 和一个非平凡 Lorentz 调和映射 $(u_\infty, v_\infty) \in C^{2+\alpha}(M, N \times \mathbb{R})$, 在边界上满足 $(u_\infty, v_\infty)|_{\partial M} = (\phi, \psi)$, 使得当 $i \rightarrow \infty$ 时, $\{(u, v)(\cdot, t_i)\}$ 在 $W^{1,2}(M)$ 中弱收敛到 (u_∞, v_∞) , 在 $C^1(M \setminus S_\infty)$ 中强收敛到 (u_∞, v_∞) .

在定理 2.4 中, 弱解所在的函数空间 $V(M \times [s, t])$ 是指

$$V(M \times [s, t]) := \left\{ (u, v) : M \times [s, t] \rightarrow N \times \mathbb{R} \mid \sup_{s \leq \tau \leq t} \|\nabla u\|_{L^2(M)} + \sup_{s \leq \tau \leq t} \|\nabla v\|_{L^4(M)} + \int_s^t \int_M (|\partial_t u|^2 + |\nabla^2 u|^2) dM dt < \infty \right\}.$$

奇点集 $\mathcal{S}_\infty$ 的定义为 $\mathcal{S}_\infty := \{x \in M \mid \liminf_{i \rightarrow \infty} E(u(\cdot, t_i); B_r^M(x)) > \epsilon, \forall r > 0\}$.

3 爆破分析

本节主要讨论 Lorentz 调和映射热流或者序列的爆破行为, 因为通过变分方法得到的临界点通常都是方程的弱解, 所以先简要叙述弱调和映射的正则性理论.

对于目标流形是静态流形的情形, Isobe^[45, 46] 利用 Hélein^[20] 的办法, 证明了二维 Lorentz 调和映射弱解的正则性以及高维情形某种极小意义下 Lorentz 调和映射的部分正则性.

定理 3.1 设 (u, v) 是从 Riemann 流形 M 到标准静态 Lorentz 流形 $N \times \mathbb{R}$ 的弱调和映射, 则

(1) 当 $\dim M = 2$ 时, $(u, v) \in C^\infty(M, N \times \mathbb{R})$;

(2) 当 $\dim M \geq 3$ 时, 设 (u, v) 是 (某种意义下的) 极小 Lorentz 调和映射, 那么存在闭子集 $\Sigma \subset M$ 使得 $(u, v) \in C^\infty(M \setminus \Sigma, N \times \mathbb{R})$, 并且集合 Σ 的 Hausdorff 维数小于或者等于 $m - 3$.

最近, Li 和 Liu^[47] 研究了更一般的高维稳定 (stationary) Lorentz 调和映射的部分正则性, 并且在某些条件下证明了奇点集的约化.

定理 3.2 设 (u, v) 是从 Riemann 流形 M ($\dim M \geq 3$) 到标准静态 Lorentz 流形 $N \times \mathbb{R}$ 的满足 Dirichlet 边值条件 $(u, v)|_{\partial M} = (\phi, \psi)$ 的稳定 Lorentz 调和映射, 其中 $\psi \in C^1(\partial M)$, 则

(1) 存在闭子集 $\Sigma \subset M$ 使得 $(u, v) \in C^\infty(M \setminus \Sigma, N \times \mathbb{R})$, 并且集合 $H^{m-2}(\Sigma) = 0$, 这里 H^{m-2} 是 $m - 2$ 维 Hausdorff 测度;

(2) 如果不存在从球面 S^l ($l = 2, \dots, m - 1$) 出发到 N 的调和映射, 那么 (u, v) 是光滑的, 即奇点集 $\Sigma = \emptyset$.

当目标流形是稳态流形, Zhu^[39] 证明了二维弱 Lorentz 调和映射的正则性. 他沿用的是 Rivière^[21] 的证明方法, 但是由于稳态情形下, 方程 (1.4) 不再具有反对称结构, 并且 u 与 v 具有复杂的耦合关系, 所以, 此时分析工作是有难度的, 并非 Rivière 相关工作的简单应用.

定理 3.3 从 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 映到标准稳态 Lorentz 流形 $N \times \mathbb{R}$ 的弱 Lorentz 调和映射是光滑的.

小能量正则性同样是爆破分析中不可缺少的性质, Zhu^[39] 还证明了当 $m \geq 2$ 时如下定理成立.

定理 3.4 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. $(u, v) \in W^{1,2}(\Omega, N \times \mathbb{R})$ 是从 Ω 映到标准稳态 Lorentz 流形 $N \times \mathbb{R}$ 的弱调和映射, 则存在 $\epsilon_m > 0$, 若 (u, v) 满足 $\|\nabla u\|_{M_2^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{M_2^2(\Omega)} \leq \epsilon_m$, (u, v) 就是光滑映射, 其中 $\|\cdot\|_{M_2^2(\Omega)}$ 是 Morrey 范数, 若 $f \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$, 则

$$\|f\|_{M_2^2(\Omega)}^2 = \sup_{B_R(x) \subset \Omega} \left(R^{2-m} \int_{B_R(x)} |f|^2 dx \right).$$

无论热流还是 Lorentz 调和映射序列, 映射都有可能爆破, Lorentz 调和映射在奇点处的爆破行为是与这种映射有关的一个基本问题. 与经典调和映射相比, 由于 Lorentz 度量非正定并且 u 与 v 耦合, 爆破分析会更加困难. Han 等^[48] 首先研究了映到稳态流形的二维 Lorentz 调和映射序列的能量等

式问题, 他们给出了 Lorentz 调和映射的 Hopf 微分 $T = \Phi dz^2$, 其中 z 是 Riemann 曲面上的复坐标, $\Phi(z) = \langle u_z, u_z \rangle - \beta(u) \langle v_z + \omega_i(u) u_z^i, v_z + \omega_k(u) u_z^k \rangle$, 并且证明了 $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = 0$, 即 Hopf 微分是全纯的. 通过全纯微分, 就可以建立映射的径向导数与切向导数之间的关系, 再证明一些必要的分析性质, 如间隔 (gap) 定理和可去奇点定理等, 就可以在 Ding 和 Tian^[11] 给出的框架下工作, 进而证明关于 Lorentz 调和映射的能量等式. 但是由于在稳态情形 u 和 v 的复杂关系, 这不是简单的推广. 分别对 u 和 v 在奇点处的行为进行分析后, 可以证明如下能量等式.

定理 3.5 设 $\{(u_k, v_k)\}$ 是从紧 Riemann 曲面 (M, h) 映到标准稳态流形 $(N \times \mathbb{R}, g)$ 的光滑 Lorentz 调和映射序列, 正能量 $E(u_k, v_k)$ 一致有界, 则存在调和映射 $(u, v) : M \rightarrow (N \times \mathbb{R}, g)$ 和有限点集 $\mathcal{S} = \{p_1, p_2, \dots, p_l\}$, 使得 $\{(u_k, v_k)\}$ 在 $W^{1,2}(M)$ 中弱收敛到 (u, v) , 在 $W_{\text{loc}}^{1,2}(M \setminus \mathcal{S})$ 中强收敛到 (u, v) . 进而, 可以找到有限个 Lorentz 调和球面 $(\sigma_i^l, \xi_i^l) : \mathbb{S}^2 \rightarrow (N \times \mathbb{R}, g)$, $i = 1, 2, \dots, I$; $l = 1, 2, \dots, L_i$, 使得如下 Lorentz 能量等式成立:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_g(u_k, v_k) = E_g(u, v) + \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^{L_i} E_g(\sigma_i^l, \xi_i^l). \quad (3.1)$$

对于正能量, 如下能量不等式成立:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(u_k, v_k) \geq E(u, v) + \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^{L_i} E(\sigma_i^l, \xi_i^l). \quad (3.2)$$

定理 3.5 是关于爆破分析的第一个结果, 其中的能量等式是针对 Lorentz 能量给出的, 这在我们的问题中是一个自然的选择. 但是另一方面, 从分析的角度, 我们还想知道对于正能量是否成立能量等式, 这相当于需要对 u 和 v 各自的爆破行为分别给出清晰的刻画. 另外, 我们还期望了解爆破出的泡泡之间是否有脖子连接并估计脖子的长度. 当目标流形是稳态流形时, 这些问题比较复杂, 所以, Han 等^[49] 同时研究了稳态和静态流形两种情形, 他们对目标流形为稳态流形的渐近 Lorentz 调和映射序列的爆破行为给出了部分刻画, 对静态情形给出了完整刻画. 渐近 Lorentz 调和映射序列的相关结果更为一般, 可以自然地推广到热流的情形. 在文献 [49] 中, 因为还要处理边界爆破的情形, 我们舍弃了 Hopf 微分的办法, 取而代之的是通过对 Lorentz 调和映射方程结构的观察, 利用分部积分得到某种 Pohozaev 型等式, 由此可以给出径向能量与切向能量之间的关系. 在经典调和映射的爆破分析中, Pohozaev 型等式最早由 Wang 和 Lin^[50] 引入.

假设 (M, h) 是带边紧 Riemann 曲面, 边界为 ∂M , $(N \times \mathbb{R}, g)$ 是标准稳态 Lorentz 流形, (1.4) 对应的张量场非零的边值问题为

$$\begin{cases} \Delta u + A(u)(\nabla u, \nabla u) - B^\top(\nabla u, \nabla v) = \tau(u, v), \\ \operatorname{div}\{\beta(u)(\nabla v + \omega_i(u)\nabla u^i)\} = \kappa(u, v), \\ (u, v)|_{\partial M} = (\phi, \psi). \end{cases} \quad (3.3)$$

在静态流形的情形, (3.3) 化简为

$$\begin{cases} \Delta u + A(u)(\nabla u, \nabla u) - B^\top(u)|\nabla v|^2 = \tau(u, v), \\ \operatorname{div}\{\beta(u)\nabla v\} = \kappa(u, v), \\ (u, v)|_{\partial M} = (\phi, \psi). \end{cases} \quad (3.4)$$

渐近 Lorentz 调和映射张量场非零, 并且因为边界非空所以需要考虑内部和边界爆破两种情形, 爆破行为更为复杂. 在文献 [49] 中, 对于稳态情形, 证明了如下的结论.

定理 3.6 假设 $\{(u_n, v_n)\} \in W^{2,2}(M, N \times \mathbb{R})$ 是映到标准稳态 Lorentz 流形的渐近 Lorentz 调和映射序列, 即满足 (3.3), Dirichlet 边值为 $(u_n, v_n)|_{\partial M} = (\phi, \psi) \in C^{2+\alpha}(\partial M, N \times \mathbb{R})$, 并且

$$E(u_n, v_n) + \|(\tau_n, \kappa_n)\|_{L^2(M)} \leq \Lambda < \infty,$$

其中

$$\|(\tau_n, \kappa_n)\|_{L^2(M)}^2 = \|\tau_n\|_{L^2(M)}^2 + \|\kappa_n\|_{L^2(M)}^2,$$

则存在子列 $\{(u_n, v_n)\}$ 和有限点集 $\mathcal{S} = \{p_1, \dots, p_I\}$ 以及映射 $(u_0, v_0) \in W^{1,2}(M, N \times \mathbb{R})$, $(u_0, v_0)|_{\partial M} = (\phi, \psi)$, 使得 $\{(u_n, v_n)\}$ 在 $W_{\text{loc}}^{2,2}(M \setminus \mathcal{S})$ 弱收敛到 (u_0, v_0) . 进一步, 存在有限个非平凡 Lorentz 调和球面 $(\sigma_i^l, \xi_i^l) : \mathbb{S}^2 \rightarrow N \times \mathbb{R}$ 和具有常边值的非平凡 Lorentz 调和映射 $(\sigma_i^k, \xi_i^k) : \mathbb{R}_+^2 := \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \geq 0\} \rightarrow N \times \mathbb{R}$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_g(u_n, v_n) = E_g(u_0, v_0) + \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^{l_i} E_g(\sigma_i^l, \xi_i^l) + \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{k_i} E_g(\sigma_i^k, \xi_i^k), \quad (3.5)$$

其中 $i = 1, \dots, I$, $l = 1, \dots, l_i$, $k = 1, \dots, k_i$, $l_i, k_i \geq 0$, $l_i + k_i \geq 1$.

定理 3.6 可以看成是在定理 2.3 的基础上的推广, 对张量场非零的情形同样证明了 Lorentz 能量的能量等式. 当目标流形是静态流形时, 分析会化简很多, 对于爆破行为的认识也更清晰, 文献 [49] 还证明了如下结论.

定理 3.7 在定理 3.6 中进一步假设 $\omega \equiv 0$, 则在奇点处, $(\sigma_i^k, \xi_i^k) : \mathbb{R}_+^2 := \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \geq 0\} \rightarrow N \times \mathbb{R}$ 不会出现, 映射 (σ_i^l, ξ_i^l) 中的 ξ_i^l 是常值映射, $\sigma_i^l : \mathbb{S}^2 \rightarrow N$ ($1 \leq l \leq l_i$) 是非平凡的经典调和球面. 此时不但 (3.5) 成立, 并且正能量的能量等式也成立, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = E(u_0) + \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^{l_i} E(\sigma_i^l), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E(v_n) = E(v_0).$$

还有, $u_0(M) \cup_{i=1}^I \bigcup_{l=1}^{l_i} (\sigma_i^l(\mathbb{S}^2))$ 在 N 中是连通的.

定理 3.7 说明, 在相对简单的静态情形, 边界上的爆破不可能发生, 并且对内部爆破也给出了更细致的描述, 在爆破出的泡泡中, 映到 $\mathbb{R}$ 的部分是常值映射, 映到 N 的部分就是经典的调和球面, 由此可以得到, 此时不但关于 Lorentz 能量的能量等式是成立的, 正能量的能量等式也是成立的, 并且泡泡之间没有脖子.

4 问题与展望

Lorentz 调和映射是有明显的物理和几何背景的研究对象, 它与经典的调和映射有很多类似之处, 但是内在的数学结构又有本质的区别, 是一个非常值得继续研究的数学对象. 虽然关于这种映射的一些基本性质已经得到证明, 但仍然存在很多问题值得考虑, 例如,

- (1) 稳态情形 Lorentz 调和映射的存在性是需要研究的一个更复杂的情形;
- (2) 高维 Lorentz 调和映射的基本性质;
- (3) 当把目标流形取为其他有明确物理背景的 Lorentz 流形, 特别是 de Sitter 和反 de Sitter 流形时, Lorentz 调和映射的性质;

(4) Lorentz 流形中的极小曲面等相关问题.

参考文献

- 1 Al'ber S I. On n -dimensional problems in the calculus of variations in the large. *Sov Math Dokl*, 1964, 5: 700–704
- 2 Al'ber S I. Spaces of mappings into a manifold with negative curvature. *Sov Math Dokl*, 1967, 9: 6–9
- 3 Eells J Jr, Sampson J H. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Amer J Math*, 1964, 86: 109–160
- 4 Hamilton R. Harmonic Maps of Manifolds with Boundary. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 471. New York: Springer, 1975
- 5 Chang K C. Heat flow and boundary value problem for harmonic maps. *Ann Inst H Poincaré (C) Non Linear Anal*, 1989, 6: 363–395
- 6 Ding W Y, Lin F H. A generalization of Eells-Sampson's theorem. *J Partial Differential Equations*, 1992, 5: 13–22
- 7 Li J Y, Zhu X R. Non existence of quasi-harmonic spheres. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2010, 37: 441–460
- 8 Li J Y, Yang Y Y. Nonexistence of quasi-harmonic spheres with large energy. *Manuscripta Math*, 2012, 138: 161–169
- 9 Li J Y, Sun L L. A note on the nonexistence of quasi-harmonic spheres. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2016, 55: 151
- 10 Sacks J, Uhlenbeck K. The existence of minimal immersions of 2-spheres. *Ann of Math (2)*, 1981, 113: 1–24
- 11 Ding W Y, Tian G. Energy identity for a class of approximate harmonic maps from surfaces. *Comm Anal Geom*, 1996, 3: 543–554
- 12 Qing J, Tian G. Bubbling of the heat flows for harmonic maps from surfaces. *Comm Pure Appl Math*, 1997, 50: 295–310
- 13 Li Y X, Wang Y D. A weak energy identity and the length of necks for a sequence of Sacks-Uhlenbeck α -harmonic maps. *Adv Math*, 2010, 225: 1134–1184
- 14 Jost J, Liu L, Zhu M M. Asymptotic analysis and qualitative behavior at the free boundary for Sacks-Uhlenbeck α -harmonic maps. *MPI MIS Preprint* 71, 2017
- 15 Wang W D, Wei D Y, Zhang Z F. Energy identity for approximate harmonic maps from surfaces to general targets. *J Funct Anal*, 2017, 272: 776–803
- 16 Struwe M. On the evolution of harmonic mappings of Riemannian surfaces. *Comment Math Helv*, 1985, 60: 558–581
- 17 Struwe M. On the evolution of harmonic maps in higher dimensions. *J Differential Geom*, 1988, 28: 485–502
- 18 Chen Y M, Struwe M. Existence and partial regularity results for the heat flow for harmonic maps. *Math Z*, 1989, 201: 83–103
- 19 Morrey C B. Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Berlin: Springer-Verlag, 1986
- 20 Hélein F. Harmonic Maps, Conservation Laws and Moving Frames. *Cambridge Tracts in Mathematics*, vol. 150. Cambridge: Cambridge University Press, 2002
- 21 Rivière T. Conservation laws for conformally invariant variational problems. *Invent Math*, 2007, 168: 1–22
- 22 Schoen R, Uhlenbeck K. A regularity theory for harmonic maps. *J Differential Geom*, 1982, 17: 307–335
- 23 Evans L C. Partial regularity for stationary harmonic maps into spheres. *Arch Ration Mech Anal*, 1990, 116: 203–218
- 24 Bethuel F. On the singular set of stationary harmonic maps. *Manuscripta Math*, 1993, 78: 417–443
- 25 Chen Y M. Dirichlet problems for heat flows of harmonic maps in higher dimensions. *Math Z*, 1991, 208: 557–565
- 26 Chen Q, Jost J, Li J Y, et al. Dirac-harmonic maps. *Math Z*, 2006, 254: 409–432
- 27 Gu C H. On the Cauchy problem for harmonic maps defined on two-dimensional Minkowski space. *Comm Pure Appl Math*, 1980, 33: 727–737
- 28 Ginibre J, Velo G. The Cauchy problem for the $O(N)$, $CP(N-1)$, and $GC(N, p)$ models. *Ann Phys*, 1982, 142: 393–415
- 29 Shatah J. Weak solutions and development of singularities of the $SU(2)$ σ -model. *Comm Pure Appl Math*, 1988, 41: 459–469
- 30 Sideris T C. Global existence of harmonic maps in Minkowski space. *Comm Pure Appl Math*, 1989, 42: 1–13
- 31 Maldacena J. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv Theor Math Phys*, 1998, 2: 231–252
- 32 Alday L, Maldacena J. Null polygonal Wilson loops and minimal surfaces in anti-de-Sitter space. *J High Energy Phys*,

- 2009, 0911: 59pp
- 33 Siu Y T. The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds. *Ann of Math* (2), 1980, 112: 73–111
- 34 Jost J, Yau S T. A nonlinear elliptic system for maps from Hermitian to Riemannian manifolds and rigidity theorems in Hermitian geometry. *Acta Math*, 1993, 170: 221–254
- 35 Chen Q, Jost J, Wang G. A maximum principle for generalizations of harmonic maps in Hermitian, affine, Weyl, and Finsler geometry. *J Geom Anal*, 2015, 25: 2407–2426
- 36 Bryant R L. A duality theorem for Willmore surfaces. *J Differential Geom*, 1984, 20: 23–53
- 37 Rivière T. Analysis aspects of Willmore surfaces. *Invent Math*, 2008, 174: 1–45
- 38 O’Neill B. *Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity*. Pure and Applied Mathematics, vol. 103. Amsterdam: Academic Press, 1983
- 39 Zhu M M. Regularity for harmonic maps into certain pseudo-Riemannian manifolds. *J Math Pures Appl* (9), 2013, 99: 106–123
- 40 Han X L, Jost J, Liu L, et al. Global existence of the harmonic map heat flow into Lorentzian manifolds. *MPI MIS*, 2017, in press
- 41 Benci V, Fortunato D, Giannoni F. On the existence of multiple geodesics in static space-times. *Ann Inst H Poincaré (C) Non Linear Anal*, 1991, 8: 79–102
- 42 Greco C. The Dirichlet-problem for harmonic maps from the disk into a Lorentzian warped product. *Ann Inst H Poincaré (C) Non Linear Anal*, 1993, 10: 239–252
- 43 Greco C. A multiplicity result for the Dirichlet problem for harmonic maps from the disk into a Lorentzian warped product. *Nonlinear Anal*, 1997, 28: 1661–1668
- 44 Han X L, Liu L, Zhao L. A global weak solution for the Lorentzian harmonic map flow. *Sci China Math*, 2018, doi: 10.1007/s11425-018-9304-1
- 45 Isobe T. Optimal regularity of harmonic maps from a Riemannian manifold into a static Lorentzian manifold. *Pacific J Math*, 1997, 178: 71–93
- 46 Isobe T. Regularity of harmonic maps into a static Lorentzian manifold. *J Geom Anal*, 1998, 8: 447–463
- 47 Li J Y, Liu L. Partial regularity of harmonic maps from a Riemannian manifold into a Lorentzian manifold. *ArXiv:1704.08673*, 2017
- 48 Han X L, Zhao L, Zhu M M. Energy identity for harmonic maps into standard stationary Lorentzian manifolds. *J Geom Phys*, 2017, 114: 621–630
- 49 Han X, Jost J, Liu L, et al. Bubbling analysis for approximate Lorentzian harmonic maps from Riemann surfaces. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2017, 56: 175
- 50 Wang C Y, Lin F H. Energy identity of harmonic map flows from surfaces at finite singular time. *Calc Var Partial Differential Equations*, 1998, 6: 369–380

Lorentzian harmonic map and its heat flow

Xiaoli Han, Lei Liu & Liang Zhao

Abstract In this paper, we introduce the background of harmonic maps into Lorentzian manifolds, and introduce some recent progress on this topic, including existence in a fixed homotopy class, the global weak solution of the heat flow, and blow-up analysis.

Keywords harmonic map, Lorentzian manifold, heat flow

MSC(2010) 53C43, 58E20

doi: 10.1360/N012018-00106