中国科学: 数学 2018 年 第 48 卷 第 10 期: 1457～1480
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

齐型空间上的指数平方类的刻画与应用

献给王斯雷教授 85 华诞

吴良川[1], 颜立新[2*]

1. 北京大学北京国际数学研究中心, 北京 100871;
2. 中山大学数学学院, 广州 510275
E-mail: wulchuan@bicmr.pku.edu.cn, mcsylx@mail.sysu.edu.cn

收稿日期: 2017-06-23; 接受日期: 2017-11-14; 网络出版日期: 2018-10-11; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11371378) 和广东特支计划资助项目

摘要 本文在齐型空间 (X,d,μ) 上建立与经典二进平方函数相联系的指数平方类的三个等价刻画, 即指数平方可积性、好 λ 不等式及二进平方函数的 L^p 下界最佳估计. 该工作推广了著名的 $\mathbb{R}^n$ 上 Chang-Wilson-Wolff 定理. 作为应用, 本文建立了非负 Ricci 曲率 Riemann 流形上与 Laplace-Beltrami 算子相联系的平方函数的 L^p 下界最佳估计.

关键词 指数平方类 平方函数 好 λ 不等式 Laplace-Beltrami 算子 齐型空间

MSC (2010) 主题分类 42B20, 42B25, 47B38, 58G35

1 引言与主要结果

设 $0<\alpha<\infty$, Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上经典的平方函数 (Lusin 面积积分) $S_\alpha(f)$ 定义为

$$S_\alpha(f)(x)=\left(\iint_{|x-y|<\alpha t}|\psi_t*f(y)|^2t^{-1-n}\,dydt\right)^{1/2}, \tag{1.1}$$

其中 $\psi_t(x):=t\nabla_x p_t(x)$ 是向量值函数,

$$p_t(x)=c_n\frac{t}{(|x|^2+t^2)^{(n+1)/2}}$$

为经典 Poisson 核. 著名的 Chang-Wilson-Wolff 定理 (参见文献 [1, 定理 3.2]) 表明, 当 $S_\alpha(f)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 时, 函数 f 满足

$$\sup_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\exp\left(c\frac{|f-f_Q|^2}{\|S_\alpha f\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}\right)dx<C, \tag{1.2}$$

英文引用格式: Wu L C, Yan L X. Characterizations of the exponential square class on spaces of homogeneous type and applications (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1457–1480, doi: 10.1360/N012017-00136

© 2018《中国科学》杂志社

其中 Q 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的方体, $f_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q f dx$, c 与 C 是仅依赖于维数 n 和辐角 α 的常数. 称满足 (1.2) 的函数 f 属于指数平方类 (exponential square class). Chang-Wilson-Wolff 的结果有众多重要应用, 例如, Fefferman 和 Pipher [2] 关于奇异积分如 Hilbert 变换的 L^p 上界估计; 经典 Lusin 面积函数的 L^p 下界估计 [3,4]; 乘子的极大函数的 L^p 上界估计 [5].

在 Chang-Wilson-Wolff [1] 的文章中, $\mathbb{R}^n$ 的几何结构在 (1.2) 的证明中起到了关键的作用. 一个自然的问题是, 能否在齐型空间 (X,d,μ) 上建立与 (1.2) 类似的结论? 本文对该问题给出了一个肯定的回答. 进一步, 我们在齐型空间 (X,d,μ) 上建立与经典二进平方函数相联系的指数平方类的等价刻画: 指数平方可积性、好 λ 不等式和二进平方函数的 L^p 下界最佳估计.

首先回忆齐型空间和二进平方函数的定义. 令 (X,d) 是拟度量空间, 即 $d:X\times X\to[0,\infty)$ 满足: (i) $d(x,y)=d(y,x)\geqslant 0$, $\forall\, x,y\in X$; (ii) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$; (iii) 对任意的 $x,y,z\in X$, 有

$$d(x,y)\leqslant A_0(d(x,z)+d(z,y)), \tag{1.3}$$

其中常数 $A_0\geqslant 1$. 令 μ 是 X 上非负双倍 Borel 测度: 存在常数 C_μ 使得对任意 $x\in X$ 和 $r>0$, 有

$$0<V(x,2r)\leqslant C_\mu V(x,r)<\infty, \tag{1.4}$$

其中 $B(x,r):=\{y\in X:d(x,y)<r\}$, 且 $V(x,r):=\mu(B(x,r))$. 由 (1.4) 知, 存在依赖 C_μ 的常数 C 和 n, 使得对任意的 $\lambda\geqslant 1$ 和 $x\in X$, 有

$$0<V(x,\lambda r)\leqslant C\lambda^n V(x,r)<\infty. \tag{1.5}$$

称配备非负双倍 Borel 测度 μ 的拟度量空间 (X,d) 为 Coifman-Weiss 意义下的齐型空间 [6]. 下文总是令 A_0、C_μ 和 n 分别为 (1.3)–(1.5) 中的常数.

令 $\mathscr{D}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\mathscr{D}_k$ 是 (X,d,μ) 上的二进方体族 [7], 则其满足如下性质:

(i) 对任意的 $k\in\mathbb{Z}$, 有 $X=\bigcup_{Q\in\mathscr{D}_k}Q$, 且对每个 $Q\in\mathscr{D}_k$, 有 $c_1\delta^k\leqslant \operatorname{diam}(Q)\leqslant C_1\delta^k$, 其中 $\delta\in(0,1)$, c_1 和 C_1 是不依赖于 k 和 Q 的固定参数.

(ii) 对任意的 $k\in\mathbb{Z}$ 和 $Q\in\mathscr{D}_k$, 记 $Ch(Q)=\{P\in\mathscr{D}_{k+1}:P\subset Q\}$, 则 $Q=\bigcup_{P\in Ch(Q)}P$.

令 $f\in L^1_{\rm loc}(X,d\mu)$, 经典二进平方函数 $S_d(f)$ 定义为

$$S_d(f)(x):=\left(\sum_{Q\ni x,Q\in\mathscr{D}}\frac{\|a_Q(f)\|^2_{L^2(X)}}{\mu(Q)}\right)^{1/2},$$

其中

$$a_Q(f)(x):=\sum_{P\in Ch(Q)}(f_P-f_Q)\chi_P(x),$$

χ_P 表示 P 上的特征函数. 下文中, 当 $\mu(X)<\infty$ 时, 记 $f_X:=\mu(X)^{-1}\int_X f d\mu$; 否则记 $f_X:=0$.

本文的第一个结果如下.

定理 A (与二进平方函数相联系的指数平方类的等价刻画) 令 (X,d,μ) 是一个齐型空间, A_0 和 C_μ 分别是 (1.3) 和 (1.4) 中的常数. 对任意的 $f\in L^1_{\rm loc}(X,d\mu)$, 下述性质成立且相互等价:

(i) (指数平方可积性) 若 $0\neq\|S_d(f)\|_{L^\infty(X)}<\infty$, 则存在不依赖于 f 的常数 $\beta_1=\beta_1(A_0,C_\mu)$ 和 C_2, 使得

$$\sup_{Q\in\mathscr{D}}\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q\exp\left(\beta_1\frac{|f(x)-f_Q|^2}{\|S_d(f)\|^2_{L^\infty(X)}}\right)d\mu(x)\leqslant C_2. \tag{1.6}$$

(ii) (好 λ 不等式) 存在不依赖于 f 的常数 $C_3 = C_3(A_0, C_\mu)$、$C_4 = C_4(A_0, C_\mu)$ 和充分小的 $\gamma_1 = \gamma_1(A_0, C_\mu)$, 使得

$$\begin{aligned}&\mu(\{x \in X : (f - f_X)^*(x) > 2\lambda, S_d(f)(x) \leqslant \gamma_1\lambda\})\\&\quad\leqslant C_3 \exp\left(-\frac{C_4}{\gamma_1^2}\right)\mu(\{x \in X : (f - f_X)^*(x) > \lambda\}), \quad \forall\, \lambda > 0,\end{aligned} \tag{1.7}$$

其中 $f^*(x) = \sup_{P \ni x, P \in \mathscr{D}} |f_P|$ 是 f 的二进极大函数.

(iii) (二进平方函数的 L^p 下界最佳估计) 存在不依赖于 f 的常数 $C_5 = C_5(A_0, C_\mu)$, 使得

$$\|f - f_X\|_{L^p(X, d\mu)} \leqslant C_5 p^{1/2} \|S_d(f)\|_{L^p(X, d\mu)}, \quad p \to \infty. \tag{1.8}$$

定理 A 证明的关键是利用齐型空间上的 Haar 基理论 [8]. 本文第 3 节先运用 Haar 函数的性质来证明定理 A(i); 再利用二进方体族的结构与性质来刻画定理 A(i) 与 A(ii) 的等价性; 最后使用 Fefferman-Pipher 的方法 [2] 和 Stirling 公式来论证定理 A(i) 与 A(iii) 是等价的.

利用定理 A, 我们研究 Riemann 流形上与 Laplace-Beltrami 算子相联系的平方函数. 具体地, 令 M 是完备非紧且连通的 Riemann 流形, 记 μ 和 ∇ 分别是 M 上的测度和梯度. 假设 M 满足测度双倍条件 (1.4) 且 $\mu(M) = \infty$. 记 $|\cdot|$ 为切空间上的模, 定义 Laplace-Beltrami 算子 Δ 为 $L^2(M, d\mu)$ 上的自伴算子:

$$(\Delta f, f) = \||\nabla f|\|^2_{L^2(X, d\mu)}.$$

记热半群 $\mathrm{e}^{-t\Delta}$ 对应的核为 $p_t(x, y)$, $t > 0$, $x, y \in M$. 假设热核满足 Gauss 上界:

$$p_t(x, y) \leqslant \frac{C}{V(y, \sqrt{t})} \exp\left(-c\frac{d^2(x, y)}{t}\right), \quad \forall\, t > 0, \quad x, y \in M, \tag{1.9}$$

且有如下梯度估计:

$$|\nabla p_t(x, y)| \leqslant C\frac{C}{\sqrt{t}V(x, \sqrt{t})} \exp\left(-c\frac{d^2(x, y)}{t}\right), \quad \forall\, t > 0, \quad x, y \in M. \tag{1.10}$$

注意到满足上述条件 (1.4)、(1.9) 和 (1.10) 的流形总是存在的, 如 Ricci 曲率非负的完备非紧 Riemann 流形, 参见文献 [9,10]. 定义与算子 Δ 相联系的平方函数 $S_{\Delta,\alpha}(f)$ 为

$$S_{\Delta,\alpha}(f)(x) := \left(\int_0^\infty \int_{d(y,x)<\alpha t} |t^2 \Delta \mathrm{e}^{-t\sqrt{\Delta}} f(y)|^2 \frac{d\mu(y)}{V(x, t)} \frac{dt}{t}\right)^{1/2}, \quad \alpha > 0. \tag{1.11}$$

一个已知的事实是, 由于热核 $p_t(x, y)$ 满足 Gauss 上界 (1.9), 因此, 对任意的 $1 < p < \infty$ 和 $\alpha > 0$, 平方函数 $S_{\Delta,\alpha}$ 是 L^p 有界的, 且 $\|S_{\Delta,\alpha}(f)\|_p \leqslant Cp^{1/2}\|f\|_p$, 参见文献 [11–13]. 自然地, 我们关心 $S_{\Delta,\alpha}$ 的 L^p 下界有界性对 p 的依赖关系如何? 我们有如下结果.

定理 B 令 M 是完备非紧且连通的 Riemann 流形, 其测度 μ 满足双倍性质 (1.4), 且 M 上的热核 $p_t(x, y)$ 满足 Gauss 上界 (1.9) 和梯度估计 (1.10), 则存在正常数 $C = C(C_\mu, \alpha)$ 使得

$$\|f\|_{L^p(M, d\mu)} \leqslant Cp^{1/2}\|S_{\Delta,\alpha}(f)\|_{L^p(M, d\mu)}, \quad p \to \infty. \tag{1.12}$$

2 预备知识

本节介绍齐型空间 (X, d, μ) 上的二进方体族和 Haar 基理论. 需要指出的是, 这些理论在更一般的空间上也成立, 参见文献 [7,8]. 为与后文论证保持一致, 本节总限制在齐型空间的框架下来叙述.

2.1 齐型空间上的二进方体族

我们先回顾二进方体族的结构与性质.

定理 2.1 (参见文献 [7, 定理 2.2]) 假设常数 $0 < c_0 \leqslant C_0 < \infty$ 和 $\delta \in (0,1)$ 满足

$$12A_0^3 C_0 \delta \leqslant c_0,$$

其中 A_0 是 (1.3) 中的常数. 给定点集 $\{z_\beta^k\}$, $\beta \in \mathscr{J}_k$, 且对任意的 $k \in \mathbb{Z}$, 满足

$$d(z_{\beta_1}^k, z_{\beta_2}^k) \geqslant c_0 \delta^k \quad (\beta_1 \neq \beta_2), \quad \min_\beta d(x, z_\beta^k) < C_0 \delta^k, \quad \forall\, x \in X,$$

则可以构造 Borel 集 $Q_\beta^k \subset X$, 使得

(i) 若 $\ell \geqslant k$, 则 $Q_{\beta_2}^\ell \subseteq Q_{\beta_1}^k$ 或 $Q_{\beta_1}^k \cap Q_{\beta_2}^\ell = \emptyset$;

(ii) $X = \bigcup_{\beta \in \mathscr{J}_k} Q_\beta^k$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$;

(iii) $B(z_\beta^k, c_1 \delta^k) \subset Q_\beta^k \subset B(z_\beta^k, C_1 \delta^k)$, 其中 $c_1 := (3A_0^2)^{-1} c_0$, $C_1 := 2A_0 C_0$;

(iv) 若 $\ell \geqslant k$ 且 $Q_{\beta_2}^\ell \subseteq Q_{\beta_1}^k$, 则 $B(z_{\beta_2}^\ell, C_1 \delta^\ell) \subset B(z_{\beta_1}^k, C_1 \delta^k)$.

称 Q_β^k 是以 z_β^k 为中心、$\ell(Q_\beta^k) := \delta^k$ 为边长的第 k 代二进方体, 并称集合 $\{Q_\beta^k\}_{\beta,\, k}$ 是 (与参数 c_1、C_1 和 δ 相关联的) 二进方体族.

为方便进一步讨论, 须要求参数 $\delta > 0$ 充分小, 本文与文献 [14, 第 2.2 小节] 一致, 总是固定 $\delta \leqslant 10^{-3} A_0^{-10}$. 运用文献 [14, 第 2 节] 中的相关结论 (或参见文献 [7, 第 4 节]), 我们有如下结果.

定理 2.2 令 (X, d, μ) 为齐型空间并给定 $\delta \leqslant 10^{-3} A_0^{-10}$.

(i) 存在二进方体族

$$\mathscr{D} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathscr{D}_k, \quad \mathscr{D}_k = \{Q_\beta^k : \beta \in \mathscr{J}_k\},$$

其对应的参数为 $c_1 = (3A_0)^{-1}$、$C_1 = (4A_0)^2$ 和 δ, 且 Q_β^k 的中心 x_β^k 满足

$$d(x_{\beta_1}^k, x_{\beta_2}^k) \geqslant \delta^k \quad (\beta_1 \neq \beta_2), \quad \min_\beta d(x, x_\beta^k) < 2A_0 \delta^k, \quad \forall\, x \in X.$$

(ii) 存在相邻二进方体族 $\{\mathcal{D}^b : b = 1, 2, \ldots, L\}$, 它们对应的参数均为 $c_1 = 6^{-1} A_0^{-5}$、$C_1 = 6A_0^4$ 和 δ, 其中 $L = L(A_0, A_1, \delta)$ 是一个几何常数. 记 ${}^bQ_\beta^k \in \mathcal{D}^b$ 的中心为 ${}^bz_\beta^k$, 则有

$$d({}^bz_{\beta_1}^k, {}^bz_{\beta_2}^k) \geqslant (2A_0)^{-1} \delta^k, \quad \min_\alpha d(x, {}^bz_\beta^k) < 4A_0^2 \delta^k,$$

并且存在正常数 $c = c(c_1, C_1, \delta)$, 使得对每个球 $B = B(x, r_B) \subset X$, 存在 $b \in \{1, 2, \ldots, L\}$ 和 ${}^bQ \in \mathcal{D}^b$, 使得

$$B \subset {}^bQ \quad 且 \quad \operatorname{diam}({}^bQ) \leqslant c\, r_B.$$

对任意的 $\ell \geqslant 0$ 和 $Q \in \mathscr{D}_k$, 记

$$Ch^{(\ell)}(Q) = \{P \subset Q : P \in \mathscr{D}_{k+\ell}\}.$$

显然, $Ch^{(0)}(Q) = \{Q\}$. 当 $\ell = 1$ 时, 我们略去上标 "(1)", 即 $Ch(Q) = Ch^{(1)}(Q)$, 且称 $Ch(Q)$ 中的每个方体 P 是 Q 在 $\mathscr{D}$ 中的二进子方体. 同理, 对任意的 $b \in \{1, 2, \ldots, L\}$ 和 ${}^bQ \in \mathcal{D}^b$, 我们可类似地定义 $Ch^{(\ell)}({}^bQ)$.

2.2 齐型空间上 Haar 函数的构造与性质

令 $\mathscr{D}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\mathscr{D}_k$, $\mathscr{D}_k=\{Q_\beta^k:\beta\in\mathscr{J}_k\}$ 为齐型空间 (X,d,μ) 上一组二进方体族, 如定理 2.2(i) 所示. 对每个第 k 代二进方体 $Q\in\mathscr{D}_k$, 令

$$M_Q:=\#Ch(Q)=\#\{P\in\mathscr{D}_{k+1}:P\subset Q\}$$

表示 Q 的二进子方体的个数. 由定理 2.1(iii) 和几何双倍性质知, 存在一个几何常数 $M=M(A_0,A_1,\delta)$, 使得对任意的 $Q\in\mathscr{D}$, 有

$$1\leqslant M_Q\leqslant M. \tag{2.1}$$

进一步, 集合 $Ch(Q)$ 中元素存在一个排序 $\{Q_1,Q_2,\ldots,Q_{M_Q}\}$ 满足

$$\sum_{k=j}^{M_Q}\mu(Q_j)\geqslant[1-(j-1)M_Q^{-1}]\mu(Q),\quad\forall\, j=1,2,\ldots,M_Q, \tag{2.2}$$

参见文献 [8, 引理 4.5]. 对任意 $1\leqslant p\leqslant+\infty$, 记 $f\in L^p(X,d\mu)$ 的 L^p 模为 $\|f\|_p$, 并记 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $L^2(X,d\mu)$ 空间上的内积. 另外, 符号 $A\simeq B$ 表示存在正常数 C, 使得 $C^{-1}A\leqslant B\leqslant CA$.

下面介绍 Haar 函数的一些基本性质.

定理 2.3 (参见文献 [8, 定理 4.2]) 对每个 $Q\in\mathscr{D}$, 令

$$h_0^Q:=\mu(Q)^{-1/2}\chi_Q,$$

其中 χ_Q 表示 Q 上的特征函数. 对 $u=1,2,\ldots,M_Q-1$, 定义 Haar 函数

$$h_u^Q:=\begin{cases}0, & \text{若 } \mu(Q_u)=0,\\ a_u\chi_{Q_u}-b_u\chi_{E_{u+1}}, & \text{若 } \mu(Q_u)>0,\end{cases}$$

其中

$$a_u:=\frac{\mu(E_{u+1})^{1/2}}{\mu(Q_u)^{1/2}\mu(E_u)^{1/2}},\quad b_u:=\frac{\mu(Q_u)^{1/2}}{\mu(E_u)^{1/2}\mu(E_{u+1})^{1/2}},$$

且 $E_u=E_u(Q):=\bigcup_{j=u}^{M_Q}Q_j$, $Q_j\in Ch(Q)$ 并满足 (2.2). 上述函数 $h_u^Q:Q\in\mathscr{D}$ $(u=1,2,\ldots,M_Q-1)$ 满足如下性质:

(i) h_u^Q 是 X 上的 Borel 可测简单函数;

(ii) h_u^Q 紧支撑于 Q;

(iii) h_u^Q 在每个 $R\in Ch(Q)$ 上是常数;

(iv) $\int h_u^Q d\mu=0$, $\forall\, u=1,2,\ldots,M_Q-1$;

(v) $\langle h_u^Q,h_{u'}^Q\rangle=0$, 其中 $u\neq u'$, $u'\in\{0,1,\ldots,M_Q-1\}$;

(vi) 函数集 $\{h_u^Q:u=0,1,\ldots,M_Q-1\}$ 是空间 $V(Q)$ 上的正交基, 其中 $V(Q)$ 表示定义在 Q 上且在每个子方体 $P\in Ch(Q)$ 上为常数的函数全体组成的集合;

(vii) 对每个 $u=1,2,\ldots,M_Q-1$, 若 $h_u^Q\not\equiv 0$, 则

$$\|h_u^Q\|_{L^p(X,d\mu)}\simeq\mu(Q_u)^{1/p-1/2},\quad \text{当 } 1\leqslant p\leqslant\infty;$$

(viii) 对每个 $u=0,1,2,\ldots,M_Q-1$, 有

$$\|h_u^Q\|_{L^1(X,d\mu)}\cdot\|h_u^Q\|_{L^\infty(X,d\mu)}\simeq 1.$$

下面回顾 $L^p(X,d\mu)$ 函数的 Haar 基表示.

定理 2.4 (参见文献 [8, 定理 4.1]) 令 (X,d,μ) 为齐型空间. 当 $1<p<\infty$ 时, 对每个 $f\in L^p(X,d\mu)$, 有

$$f(x)=f_X+\sum_{Q\in\mathscr{D}}\sum_{u=1}^{M_Q-1}\langle f,h_u^Q\rangle h_u^Q(x),$$

其中级数在 L^p 范数和几乎处处意义下收敛.

注 2.5 对每个 $b\in\{1,2,\dots,L\}$, 当二进方体族 $\mathscr{D}$ 被替换成 $\mathcal{D}^b$ 时, 对每个 ${}^bQ\in\mathcal{D}^b$, 同样可定义 Haar 函数 $h_u^{{}^bQ}$, 且相应的定理 2.3 和 2.4 亦成立.

3 与二进平方函数相联系的指数平方类的三个等价刻画

本节仍令 (X,d,μ) 是 Coifman 与 Weiss 意义下的 (拟度量) 齐型空间, 记 A_0、C_μ 和 n 分别为 (1.3)–(1.5) 中的常数. 此外, 对 d 和 μ 不附加其他条件, 也不要求全空间 X 的测度是否有限.

固定参数 $\delta\leqslant 10^{-3}A_0^{-10}$, 令 $\mathscr{D}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\mathscr{D}_k$, $\mathscr{D}_k=\{Q_\beta^k\}_{\beta\in\mathscr{I}_k}$ 是 X 上的二进方体族, 如定理 2.2(i) 所示, 且记 $\ell(Q_\beta^k):=\delta^k$. 令 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(X,d\mu)$, 回顾 (与 $\mathscr{D}$ 相联系的) 经典二进平方函数为

$$S_d(f)(x)=\left(\sum_{Q\ni x,Q\in\mathscr{D}}\frac{\|a_Q(f)\|_{L^2(X)}^2}{\mu(Q)}\right)^{1/2},\tag{3.1}$$

其中鞅差 $a_Q(f)(x)=\sum_{P\in Ch(Q)}(f_P-f_Q)\chi_P(x)$.

本节的主要内容是证明定理 A, 即在齐型空间上证明, 若 $S_d(f)$ 有界, 则 f 属于指数平方类函数空间, 并且给出该性质的等价刻画: 好 λ 不等式及平方函数的 L^p 下界最佳估计. 为论证方便, 考虑由鞅差的 L^∞ 范数定义的二进平方函数

$$S(f)(x)=\left(\sum_{Q\ni x,Q\in\mathscr{D}}\|a_Q(f)\|_{L^\infty(Q)}^2\right)^{1/2}.\tag{3.2}$$

显然由定义知, $S_d(f)(x)\leqslant S(f)(x)$, $\forall\,x\in X$. 另一方面, 对每个 $Q_{\beta_1}^k\in\mathscr{D}$, 存在某个 $Q_{\beta_2}^{k+1}\in Ch(Q_{\beta_1}^k)$ 使得 $\|a_{Q_{\beta_1}^k}(f)\|_{L^\infty}=a_{Q_{\beta_1}^k}(f)(x)$, $\forall\,x\in Q_{\beta_2}^{k+1}$. 因此, 结合 μ 的双倍性质和定理 2.2(i) 可知,

$$\begin{aligned}\frac{\|a_{Q_{\beta_1}^k}(f)\|_{L^2(Q_{\beta_1}^k)}^2}{\mu(Q_{\beta_1}^k)}&\geqslant\|a_{Q_{\beta_1}^k}(f)\|_{L^\infty}^2\frac{\mu(Q_{\beta_2}^{k+1})}{\mu(Q_{\beta_1}^k)}\\&\geqslant\|a_{Q_{\beta_1}^k}(f)\|_{L^\infty}^2\frac{V(x_{\beta_2}^{k+1},(3A_0)^{-1}\delta^{k+1})}{V(x_{\beta_1}^k,(4A_0)^2\delta^k)}\\&\geqslant C(A_0,C_\mu,\delta)\,\|a_{Q_{\beta_1}^k}(f)\|_{L^\infty}^2.\end{aligned}$$

注意到参数 δ 已经固定, 故存在正常数 $C_6=C_6(A_0,C_\mu)<1$ 使得

$$C_6S(f)(x)\leqslant S_d(f)(x)\leqslant S(f)(x),\quad\forall\,x\in X.\tag{3.3}$$

因此, 为证明定理 A, 只需论证当平方函数 $S_d(f)$ 被替换成 $S(f)$ 时, 定理 A 仍成立即可.

进一步, 一个重要的事实是对每个 $Q \in \mathscr{D}$, 有

$$a_Q(f)(x) = \sum_{u=1}^{M_Q-1} \langle f, h_u^Q \rangle h_u^Q, \tag{3.4}$$

参见文献 [8, (4.6)].

利用 (3.3) 和 (3.4), 定理 A 的证明结构安排如下. 我们先证明指数平方可积性 (1.6), 然后依次证明 (1.6) 与好 λ 不等式 (1.7) 和二进平方函数的 L^p 下界最佳估计 (1.8) 分别等价. 证明的关键是利用 Haar 函数的基本性质及二进方体的结构和性质.

3.1 与二进平方函数相联联系的指数平方可积定理

为证明定理 A(i), 我们需要下述两个结果.

引理 3.1 (参见文献 [4, 引理 4.2]) 令 (Ω, ν) 是一个概率空间, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个可测函数. 若 $|f(x)| \leqslant t$, $\forall\, x \in \Omega$, 且

$$\int_\Omega f(x) d\nu(x) = 0,$$

则

$$\int_\Omega \exp(f(x)) d\nu(x) \leqslant \cosh(t).$$

命题 3.2 令 (X, d, μ) 是齐型空间. 若 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, d\mu)$ 且 $0 \neq \|S(f)\|_{L^\infty(X)} < \infty$, 则对任意的二进方体 $Q \in \mathscr{D}$, $\lambda > 0$ 和 $0 < v \leqslant \|S(f)\|_{L^\infty}$, 有

$$\mu(\{x \in Q : |f - f_Q| > \lambda, S(f)(x) \leqslant v\}) \leqslant 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2v^2}\right) \mu(Q). \tag{3.5}$$

证明 运用 Haar 函数的性质 (见定理 2.3), 我们将修正文献 [4, 定理 3.2] 的论证方法来证明本命题.

步骤 1 任给 $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, d\mu)$ 且 $0 \neq \|S(g)\|_{L^\infty(X)} < \infty$, 证明

$$\int_Q \exp\left(g(x) - g_Q - \frac{1}{2} S^2(g)(x)\right) d\mu(x) \leqslant \mu(Q) \tag{3.6}$$

对每个 $Q \in \mathscr{D}$ 恒成立. 注意到存在某个 $k_0 \in \mathbb{Z}$ 使得 $Q \in \mathscr{D}_{k_0}$. 令 $\widetilde{g} := (g - g_Q)\chi_Q$, 则 $g(x) - g_Q = \widetilde{g}(x)$, $x \in Q$. 利用定理 2.3(iii) 和 2.3(iv) 知,

$$\begin{aligned}
&\langle \widetilde{g}, h_u^R \rangle = 0, \quad R \in \mathscr{D}_j, \quad j < k_0, \quad u = 1, 2, \ldots, M_R - 1, \\
&\langle \widetilde{g}, h_u^P \rangle = \langle g, h_u^P \rangle, \quad P \in \mathscr{D}_j, \quad j \geqslant k_0, \quad P \subset Q, \quad u = 1, 2, \ldots, M_P - 1,
\end{aligned}$$

且

$$\langle \widetilde{g}, h_u^P \rangle = 0, \quad P \in \mathscr{D}_j, \quad j \geqslant k_0, \quad P \cap Q = \emptyset, \quad u = 1, 2, \ldots, M_P - 1,$$

故结合定义可知, $\operatorname{supp} S(\widetilde{g}) \subset Q$, 且

$$S(\widetilde{g})(x) \leqslant S(g)(x), \quad x \in Q.$$

另外, 令 $g_0 \equiv 0$ 并作

$$g_k := g_{k-1} + \sum_{P \in Ch^{(k-1)}(Q)} \sum_{u=1}^{M_P-1} \langle \widetilde{g}, h_u^p \rangle h_u^P, \quad k \geqslant 1.$$

我们有如下性质:

(P1) 对任意的 $k \geqslant 0$, g_k 在每个 $R \in Ch^{(k)}(Q)$ 上取常数, 且

$$g_{k+1}(x) - g_k(x) \equiv \sum_{u=1}^{M_R-1} \langle \widetilde{g}, h_u^R \rangle h_u^R, \quad x \in R, \quad R \in Ch^{(k)}(Q).$$

再结合定理 2.3(iv) 可知,

$$\int_R g_{k+1}(x) - g_k(x) d\mu(x) = 0, \quad R \in Ch^{(k)}(Q).$$

同时, 由定理 2.3(iii) 得 $g_{k+1} - g_k$ 在每个 $R_i \in Ch(R)$ 上取常数, 其中 $R \in Ch^{(k)}(Q)$. 不妨设 x_{R_i} 为 R_i 的中心, 则有

$$g_{k+1}(x) - g_k(x) = \sum_{u=1}^{M_R-1} \langle \widetilde{g}, h_u^R \rangle h_u^R(x_{R_i}) =: c_{R_i}, \quad x \in R_i, \quad i = 1, 2, \ldots, M_R.$$

(P2) 对任意的 $k \geqslant 1$, $S(g_k)$ 在每个 $P \in Ch^{(k-1)}(Q)$ 上取常数. 进一步, 对每个 $x \in R$, 其中 $R \in Ch^{(k)}(Q)$, $k \geqslant 0$, 有

$$S^2(g_{k+1})(x) - S^2(g_k)(x) \equiv \left\| \sum_{u=1}^{M_R-1} \langle \widetilde{g}, h_u^R \rangle h_u^R \right\|_{L^\infty(R)}^2 = \max_{1 \leqslant i \leqslant M_R} \{c_{R_i}^2\}.$$

(P3) 对任意的 $k \geqslant 1$ 和 $x \in Q$, 有 $g_k(x) = (\widetilde{g})_P$, 其中 $P \in Ch^{(k)}(Q)$ 且 $x \in P$. 由 $\widetilde{g} \in L^1(X, d\mu)$ 且 μ 满足双倍性质, 易知

$$\lim_{k \to \infty} g_k(x) = \widetilde{g}(x), \quad \text{a.e.} \quad x \in Q.$$

又由 $\{S(g_k)(x)\}$ 是单调非减数列且 $S(\widetilde{g}) \in L^\infty$ 知,

$$\lim_{k \to \infty} S(g_k)(x) = S(\widetilde{g})(x), \quad \text{a.e.} \quad x \in Q.$$

由引理 3.1 及上述性质 (P1)–(P3) 知, 对任意的 $R \in Ch^{(k)}(Q)$, $k \geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}
&\int_R \exp\left(g_{k+1} - g_k - \frac{1}{2}(S^2(g_{k+1}) - S^2(g_k))\right) d\mu(x) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2} \max_{1 \leqslant i \leqslant M_R} \{c_{R_i}^2\}\right) \int_R \exp(g_{k+1} - g_k)\, d\mu(x) \\
&\leqslant \exp\left(-\frac{1}{2} \max_{1 \leqslant i \leqslant M_R} \{c_{R_i}^2\}\right) \cosh\left(\max_{1 \leqslant i \leqslant M_R} \{c_{R_i}\}\right) \mu(R) \\
&\leqslant \mu(R),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中最后一个不等式利用了 $\cosh(c) \leqslant \mathrm{e}^{c^2/2}$.

由 (P1) 和 (P2) 可知, $g_k - \frac{1}{2}S^2(g_k)$ 在每个 $R \in Ch^{(k)}(Q)$ 上都是常数, 再结合 (3.7) 知, 对每个 $k \geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}\int_Q \exp\left(g_{k+1} - \frac{1}{2}S^2(g_{k+1})\right)d\mu(x) &= \sum_{R\in Ch^{(k)}(Q)} \int_R \exp\left(g_{k+1} - \frac{1}{2}S^2(g_{k+1})\right)d\mu(x)\\ &\leqslant \sum_{R\in Ch^{(k)}(Q)} \int_R \exp\left(g_k - \frac{1}{2}S^2(g_k)\right)d\mu(x)\\ &= \int_Q \exp\left(g_k - \frac{1}{2}S^2(g_k)\right)d\mu(x),\end{aligned}$$

即数列 $\{\int_Q \exp(g_{k+1} - \frac{1}{2}S^2(g_{k+1}))d\mu(x)\}_{k\geqslant 0}$ 是非增的. 因此, 利用 Fatou 引理可得

$$\begin{aligned}\int_Q \exp\left(g(x) - g_Q - \frac{1}{2}S^2(g)(x)\right)d\mu(x) &\leqslant \int_Q \exp\left(\widetilde{g}(x) - \frac{1}{2}S^2(\widetilde{g})(x)\right)d\mu(x)\\ &\leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_Q \exp\left(g_k(x) - \frac{1}{2}S^2(g_k)(x)\right)d\mu(x)\\ &\leqslant \int_Q \exp\left(g_0(x) - \frac{1}{2}S^2(g_0)(x)\right)d\mu(x)\\ &= \mu(Q),\end{aligned}$$

从而 (3.6) 获证.

步骤 2 令 $g = \lambda v^{-2} f$ 并代入 (3.6) 得

$$\begin{aligned}\mu(Q) &\geqslant \int_{\{x\in Q: f-f_Q>\lambda, S(f)(x)\leqslant v\}} \exp\left(\frac{\lambda}{v^2}(f - f_Q) - \frac{\lambda^2}{2v^4}S^2(f)(x)\right)d\mu(x)\\ &\geqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2v^2}\right)\mu(\{x\in Q: f - f_Q > \lambda, S(f)(x)\leqslant v\}).\end{aligned}$$

同理, 令 $g = -\lambda v^{-2} f$, 同样有

$$\mu(\{x\in Q: f - f_Q < -\lambda, S(f)(x)\leqslant v\}) \leqslant \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2v^2}\right)\mu(Q).$$

至此, (3.5) 成立, 命题 3.2 得证. □

利用上述命题 3.2, 下面证明定理 A(i).

定理 A(i) 的证明 由命题 3.2 可知, 若 $0 \neq \|S(f)\|_{L^\infty(Q)} < \infty$, 则

$$\mu(\{x\in Q: |f - f_Q| > \lambda\}) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\|S(f)\|^2_{L^\infty(Q)}}\right)\mu(Q), \quad \forall \lambda > 0.$$

运用 L^p 范数的分布表示公式 (参见文献 [15, 定理 1.13]) 知, 存在 $\beta_2 \in (0, 1/2)$ 和 $C_7 = C_7(\beta_2)$, 使得

$$\sup_{Q\in\mathscr{D}} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \exp\left(\beta_2 \frac{|f(x) - f_Q|^2}{\|S(f)\|^2_{L^\infty(Q)}}\right)d\mu(x) \leqslant C_7. \tag{3.8}$$

再结合 (3.3) 中的第一个不等式知, 当取 $C_2 = C_7$ 且 $\beta_1 = \beta_2 C_6^2$ 时, (1.6) 成立, 其中 C_6 是 (3.3) 中的常数. 至此我们完成定理 A(i) 的证明. □

3.2 指数平方可积与好 λ 不等式的等价性

本小节将证明指数平方可积性 (1.6) 与好 λ 不等式 (1.7) 是等价的. 由于 (1.6) 与 (3.8) 是等价的, 我们通过修正文献 [1,4] 中的论证方法来证明 (3.8) 蕴含 (1.7). 反过来, 我们可证明 (1.7) 蕴含 (1.6).

为论证需要, 我们定义截断型二进极大函数 $f^{*,Q}$ 为

$$f^{*,Q}(x)=\sup_{P\ni x,P\in\mathscr{D},P\subset Q}|f_P|,$$

其中 $f\in L^1_{\rm loc}(X)$, $Q\in\mathscr{D}$.

定理 A(i)⇒A(ii) 的证明 首先考虑 $\mu(X)=\infty$ 的情形, 此时对 $f\in L^1_{\rm loc}(X,d\mu)$, 按约定 $f_X=0$.

由 (3.3) 知, 要证定理 A(ii) 是成立的, 只需论证下述与 $S(f)$ 相联系的好 λ 不等式: 存在正常数 $C_8=C_8(A_0,C_\mu,C_7)$ 和 $C_9=C_9(\beta_2)$, 其中 β_2 和 C_7 是 (3.8) 中的常数, 使得对任意的 $\lambda>0$ 和 $\gamma_2\in(0,1/10)$, 有

$$\begin{aligned}&\mu(\{x\in X:f^*(x)>2\lambda,S(f)(x)\leqslant\gamma_2\lambda\})\\&\quad\leqslant C_8\exp\left(-\frac{C_9}{\gamma_2^2}\right)\mu(\{x\in X:f^*(x)>\lambda\}).\end{aligned}\tag{3.9}$$

为证明 (3.9), 不妨假设

$$0<\mu(\{x\in X:f^*(x)>\lambda\})<\infty.\tag{3.10}$$

令 $\{Q_{\lambda,i}\}$ 是 $\mathscr{D}$ 中使得 $|f_{Q_{\lambda,i}}|>\lambda$ 成立的极大二进方体集, 由 (3.10) 知这样的 $Q_{\lambda,i}$ 是存在的. 进一步, 由二进方体族的结构可知这些 $Q_{\lambda,i}$ 是互不相交的, 且

$$\{x\in X:f^*(x)>\lambda\}=\bigcup_i Q_{\lambda,i}.$$

因此, 为证 (3.9), 只需证明

$$\mu(\{x\in Q_{\lambda,i}:f^*(x)>2\lambda,S(f)(x)\leqslant\gamma_2\lambda\})\leqslant C_8\exp\left(-\frac{C_9}{\gamma_2^2}\right)\mu(Q_{\lambda,i}).\tag{3.11}$$

对上述每个 $Q_{\lambda,i}$ 都成立.

对每个点 $x\in Q_{\lambda,i}$, $Q_{\lambda,i}$ 的选取方式蕴含着 $|f_Q|\leqslant\lambda$ 对每个真包含 $Q_{\lambda,i}$ 的方体 $Q\in\mathscr{D}$ 都成立. 因此,

$$f^*(x)=\sup_{P\ni x,\,P\in\mathscr{D}}|f_P|=\sup_{P\ni x,P\in\mathscr{D},\,P\subset Q_{\lambda,i}}|f_P|=:f^{*,Q_{\lambda,i}}(x),\quad x\in Q_{\lambda,i}.\tag{3.12}$$

对每个 $P\in\mathscr{D}$, 记 P 的二进父方体为 $\widehat{P}$, 即 $P\in Ch(\widehat{P})$. 若 $|f_{Q_{\lambda,i}}|\geqslant 1.1\lambda$, 则

$$\|a_{\widehat{Q}_{\lambda,i}}(f)\|_{L^\infty}\geqslant|f_{Q_{\lambda,i}}-f_{\widehat{Q}_{\lambda,i}}|\geqslant|f_{Q_{\lambda,i}}|-|f_{\widehat{Q}_{\lambda,i}}|\geqslant 0.1\lambda.$$

从而, 对任意的 $x\in Q_{\lambda,i}$, 恒有 $S(f)(x)\geqslant 0.1\lambda>\gamma_2\lambda$, 则 (3.11) 中左边的点集是空集. 因此, 我们只需考虑 $|f_{Q_{\lambda,i}}|<1.1\lambda$. 再结合 (3.12) 可得

$$\begin{aligned}&\{x\in Q_{\lambda,i}:f^*(x)>2\lambda,S(f)(x)\leqslant\gamma_2\lambda\}\\&\quad=\{x\in Q_{\lambda,i}:f^{*,Q_{\lambda,i}}(x)>2\lambda,\ S(f)(x)\leqslant\gamma_2\lambda\}\end{aligned}$$

$$\subset \{x \in Q_{\lambda,i} : (f - f_{Q_{\lambda,i}})^{*,Q_{\lambda,i}}(x) > 0.9\lambda, S(f)(x) \leqslant \gamma_2\lambda\}.$$

为证明 (3.11), 我们只需证对每个 $Q_{\lambda,i}$, 有

$$\mu(\{x \in Q_{\lambda,i} : (f - f_{Q_{\lambda,i}})^{*,Q_{\lambda,i}}(x) > 0.9\lambda, S(f)(x) \leqslant \gamma_2\lambda\}) \leqslant C_8 \exp\Big(-\frac{C_9}{\gamma_2^2}\Big)\mu(Q_{\lambda,i}).$$

令

$$g(x) = (f(x) - f_{Q_{\lambda,i}})\chi_{Q_{\lambda,i}}(x).$$

由定理 2.3(iv) 知,

$$\langle g, h_u^R\rangle = \langle f, h_u^R\rangle, \quad R \in \mathscr{D}, \quad R \subset Q_{\lambda,i}, \quad u = 1, 2, \ldots, M_R - 1,$$

进一步, 运用定理 2.3(iii) 可得

$$\langle g, h_u^R\rangle = 0, \quad R \in \mathscr{D}, \quad Q_{\lambda,i} \subsetneqq R, \quad u = 1, 2, \ldots, M_R - 1.$$

因此, 当 $x \in Q_{\lambda,i}$ 时, $S(g)(x) \leqslant S(f)(x)$; 且 $x \notin Q_{\lambda,i}$ 时, $S(g)(x) = 0$. 同时,

$$g^*(x) = g^{*,Q_{\lambda,i}}(x) = (f - f_{Q_{\lambda,i}})^{*,Q_{\lambda,i}}(x), \quad x \in Q_{\lambda,i}.$$

综上所述, 下面只需证

$$\mu(\{x \in Q_{\lambda,i} : g^{*,Q_{\lambda,i}}(x) > 0.9\lambda, S(g)(x) \leqslant \gamma_2\lambda\}) \leqslant C_8 \exp\Big(-\frac{C_9}{\gamma^2}\Big)\mu(Q_{\lambda,i}).$$

记 $\{Q_{\lambda,i}^j\}$ 为 $Q_{\lambda,i}$ 的子方体集 (称 $Q_{\lambda,i}^j$ 是 $Q_{\lambda,i}$ 的一个子方体, 如果存在 $\ell_j \geqslant 1$ 使得 $Q_{\lambda,i}^j \in Ch^{(\ell_j)}(Q_{\lambda,i})$), 使得

$$\begin{aligned} &\sum_{P:Q_{\lambda,i}^j \subsetneqq P} \Big\| \sum_{u=1}^{M_P-1} \langle g, h_u^P\rangle h_u^P \Big\|_{L^\infty}^2 \leqslant (\gamma_2\lambda)^2, \\ &\sum_{P:Q_{\lambda,i}^j \subset P} \Big\| \sum_{u=1}^{M_P-1} \langle g, h_u^P\rangle h_u^P \Big\|_{L^\infty}^2 > (\gamma_2\lambda)^2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

不妨假设 $\mathcal{R}_{\lambda,i} := Q_{\lambda,i} \setminus \bigcup_j Q_{\lambda,i}^j$ 是非空集. 显然, $S(g)(x) \leqslant \gamma_2\lambda$ 当且仅当 $x \in \mathcal{R}_{\lambda,i}$, 从而,

$$\{x \in Q_{\lambda,i} : g^{*,Q_{\lambda,i}}(x) > 0.9\lambda, S(g)(x) \leqslant \gamma_2\lambda\} = \{x \in \mathcal{R}_{\lambda,i} : g^{*,Q_{\lambda,i}}(x) > 0.9\lambda\}.$$

定义

$$g_s(x) = \begin{cases} g_{Q_{\lambda,i}^j}, & x \in Q_{\lambda,i}^j, \\ g(x), & \text{其他}. \end{cases}$$

给定 $x \in \mathcal{R}_{\lambda,i}$, 对每个包含 x 的二进方体 $P \in \mathscr{D}$, 要么 $Q_{\lambda,i}^j \cap P = \emptyset$, 要么 $Q_{\lambda,i}^j \subset P$, 故

$$(g_s)_P = \frac{1}{\mu(P)}\Big\{\int_{P\cap\mathcal{R}_{\lambda,i}} g(x)d\mu(x) + \sum_{j:Q_{\lambda,i}^j \subset P} \int_{Q_{\lambda,i}^j} g_{Q_{\lambda,i}^j} d\mu(x)\Big\} = g_P. \tag{3.14}$$

从而, 当 $x \in \mathcal{R}_{\lambda,i}$ 时, $g^{*,Q_{\lambda,i}}(x) = (g_s)^{*,Q_{\lambda,i}}(x)$, 因此,

$$\begin{aligned}\{x \in \mathcal{R}_{\lambda,i} : g^{*,Q_{\lambda,i}}(x) > 0.9\lambda\} &= \{x \in \mathcal{R}_{\lambda,i} : (g_s)^{*,Q_{\lambda,i}}(x) > 0.9\lambda\} \\ &\subset \{x \in Q_{\lambda,i} : (g_s)^{*,Q_{\lambda,i}}(x) > 0.9\lambda\}.\end{aligned}$$

下面估计 $S(g_s)(x)$, 其中 $x \in Q_{\lambda,i}$.

情形 1 存在 j 使得 $x \in Q^j_{\lambda,i}$.

由定理 2.3(iv) 及 g_s 的定义可知,

$$S(g_s)(x)^2 = \sum_{P \ni x, P \in \mathscr{D}, Q^j_{\lambda,i} \subsetneqq P} \left\| \sum_{u=1}^{M_P-1} \langle g_s, h^P_u \rangle h^P_u \right\|^2_{L^\infty}.$$

对每个满足 $Q^j_{\lambda,i} \subsetneqq P$ 的方体 $P \in \mathscr{D}$, 注意到这些 $Q^j_{\lambda,i}$ 互不相交, 故要么 $Q^k_{\lambda,i} \cap P = \emptyset$, 要么 $Q^k_{\lambda,i} \subsetneqq P$, 其中 $k \neq j$. 再结合定理 2.3(iii) 可推导出

$$\langle g_s, h^p_u \rangle = \langle g, h^p_u \rangle, \quad u = 1, 2, \ldots, M_P - 1.$$

故利用 (3.13) 知 $S(g_s)(x) \leqslant \gamma_2 \lambda$, 其中 $x \in Q_{\lambda,i}$.

情形 2 $x \in \mathcal{R}_{\lambda,i}$.

易验证对每个包含 x 的 $P \in \mathscr{D}$, 有

$$\langle g_s, h^P_u \rangle = \langle g, h^P_u \rangle, \quad u = 1, 2, \ldots, M_P - 1.$$

这说明了当 $x \in \mathcal{R}_{\lambda,i}$ 时, 有 $S(g_s)(x) = S(g)(x) \leqslant \gamma_2 \lambda$.

由上述情形 1 和 2 知, 任给 $x \in Q_{\lambda,i}$, 恒有 $S(g_s)(x) \leqslant \gamma_2 \lambda$. 进一步, 运用定理 3.2 可推出

$$\{x \in Q_{\lambda,i} : (g_s)^{*,Q_{\lambda,i}}(x) > 0.9\lambda\} = \{x \in Q_{\lambda,i} : (g_s)^{*,Q_{\lambda,i}}(x) > 0.9\lambda, S(g_s)(x) \leqslant \gamma_2 \lambda\}.$$

另外, 注意到对每个 $\theta > 0$ 和 $x \in Q_{\lambda,i}$, 由指数函数的凸性可知, 对任意的 $P \in \mathscr{D}$, 其中 P 满足 $x \in P$ 且 $P \subset Q_{\lambda,i}$, 则有

$$\begin{aligned}\exp(\theta|(g_s)_P|^2) &\leqslant \exp(\theta(|g_s|^2)_P) \leqslant (\exp(\theta|g_s|^2))_P \leqslant [\exp(\theta|g_s|^2)]^{*,Q_{\lambda,i}}(x) \\ &= [\exp(\theta|g_s|^2)\chi_{Q_{\lambda,i}}]^{*,Q_{\lambda,i}}(x) \leqslant [\exp(\theta|g_s|^2)\chi_{Q_{\lambda,i}}]^*(x).\end{aligned}$$

因此,

$$\exp\{\theta[(g_s)^{*,Q_{\lambda,i}}(x)]^2\} \leqslant [\exp(\theta|g_s|^2)\chi_{Q_{\lambda,i}}]^*(x), \quad x \in Q_{\lambda,i}, \quad \theta > 0.$$

故取定

$$\theta = \frac{\beta_2}{2\|S(g_s)\|^2_{L^\infty(Q_{\lambda,i})}},$$

其中 β_2 是 (3.8) 中的常数, 可得

$$\begin{aligned}&\mu(\{x \in Q_{\lambda,i} : (g_s)^{*,Q_{\lambda,i}}(x) > 0.9\lambda,\ S(g_s)(x) \leqslant \gamma_2\lambda\}) \\ &\quad \leqslant \mu\left(\left\{x \in Q_{\lambda,i} : \exp\left(\frac{\beta_2}{2}\frac{[(g_s)^{*,Q_{\lambda,i}}(x)]^2}{\|S(g_s)\|^2_{L^\infty(Q_{\lambda,i})}}\right) > \exp\left(\frac{0.81\beta_2}{2\gamma_2^2}\right)\right\}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \mu\bigg(\bigg\{x\in Q_{\lambda,i}:\bigg[\exp\bigg(\frac{\beta_2}{2}\frac{|g_s|^2}{\|S(g_s)\|^2_{L^\infty(Q_{\lambda,i})}}\bigg)\chi_{Q_{\lambda,i}}\bigg]^*(x)>\exp\bigg(\frac{0.81\beta_2}{2\gamma_2^2}\bigg)\bigg\}\bigg)\\
&\leqslant \exp\bigg(-\frac{0.81\beta_2}{\gamma_2^2}\bigg)\int_{Q_{\lambda,i}}\bigg\{\bigg[\exp\bigg(\frac{\beta_2}{2}\frac{|g_s|^2}{\|S(g_s)\|^2_{L^\infty(Q_{\lambda,i})}}\bigg)\chi_{Q_{\lambda,i}}\bigg]^*\bigg\}^2(x)d\mu(x)\\
&\leqslant C_{10}\exp\bigg(-\frac{0.81\beta_2}{\gamma_2^2}\bigg)\int_X\bigg[\exp\bigg(\frac{\beta_2}{2}\frac{|g_s|^2}{\|S(g_s)\|^2_{L^\infty(Q_{\lambda,i})}}\bigg)\chi_{Q_{\lambda,i}}\bigg]^2(x)d\mu(x),
\end{aligned}
$$

其中最后一个不等式利用了二进极大函数的 L^2 有界性, 且 $C_{10}=C_{10}(A_0,C_\mu)$ 仅依赖于常数 A_0 和 C_μ, 参见文献 [16, 定理 1.3].

接下来, 注意到 $(g_s)_{Q_{\lambda,i}}=0$, 且利用定理 A(i) 证明中的 (3.8) 可推知,

$$
\begin{aligned}
&\mu(\{x\in Q_{\lambda,i}:(g_s)^{*,Q_{\lambda,i}}(x)>0.9\lambda,\ S(g_s)(x)\leqslant\gamma_2\lambda\})\\
&\quad\leqslant C_{10}\exp\bigg(-\frac{0.81\beta_2}{\gamma_2^2}\bigg)\int_{Q_{\lambda,i}}\bigg[\exp\bigg(\beta_2\frac{|g_s-(g_s)_{Q_{\lambda,i}}|^2}{\|S(g_s)\|^2_{L^\infty(Q_{\lambda,i})}}\bigg)\bigg]^2(x)d\mu(x)\\
&\quad\leqslant C_7C_{10}\exp\bigg(-\frac{0.81\beta_2}{\gamma_2^2}\bigg)\mu(Q_{\lambda,i}).
\end{aligned}
$$

故当 $\mu(X)=\infty$ 时, 取 $C_8=C_7\,C_{10}$ 且 $C_9=0.81\beta_2$, 则 (3.9) 成立.

当 $\mu(X)<\infty$ 时, 令 $h=f-f_X$, 由定义知 $S(f)=S(h)$. 不妨令 $\{x\in X:h^*(x)>\lambda\}\neq\emptyset$, 并作 $\{P_{\lambda,i}\}$ 是满足 $|h_{P_{\lambda,i}}|>\lambda$ 的 $\mathscr{D}$ 中的极大二进方体集. 由 $\int_X h\,d\mu=0$ 知 $P_{\lambda,i}\neq X$. 该事实允许我们利用 $\mu(X)=\infty$ 时的论证方法来证明 (3.9) 在 $\mu(X)<\infty$ 时亦成立, 不再赘述.

综上所述, (3.9) 成立, 故定理 A(i) 可推导出定理 A(ii). □

为说明定理 A(i) 与 A(ii) 是等价的, 下面只需证明定理 A(ii) 蕴含 A(i).

定理 A(ii)⇒A(i) 的证明 因为 (3.9) 与定理 A(ii) 是等价的, 我们只需证明 (3.9) 蕴含了 (3.8) 即可.

对每个 $\lambda>0$ 和 $\gamma_3\in[2,\infty)$, 有 $2\gamma_2/\gamma_3\in(0,1/10)$, 其中 $\gamma_2\in(0,1/10)$ 是 (3.9) 中的常数. 运用 (3.9) 可知,

$$
\begin{aligned}
&\mu(\{x\in X:(f-f_X)^*(x)>\gamma_3\lambda,S(f)(x)\leqslant\gamma_2\lambda\})\\
&\quad=\mu\bigg(\bigg\{x\in X:(f-f_X)^*(x)>2\frac{\gamma_3\lambda}{2},S(f)(x)\leqslant\frac{2\gamma_2}{\gamma_3}\frac{\gamma_3\lambda}{2}\bigg\}\bigg)\\
&\quad\leqslant C_8\exp\bigg(-\frac{C_9\gamma_3^2}{4\gamma_2^2}\bigg)\mu\bigg(\bigg\{x\in X:(f-f_X)^*(x)>\frac{\gamma_3\lambda}{2}\bigg\}\bigg).
\end{aligned}\tag{3.15}
$$

对任意满足 $0\neq\|S(f)\|_{L^\infty(Q)}<\infty$ 的 $Q\in\mathscr{D}$, 令 $\widetilde{f}=(f-f_Q)\chi_Q$. 显然有

$$\|S(\widetilde{f})\|_{L^\infty(Q)}\leqslant\|S(f)\|_{L^\infty(Q)},\quad(\widetilde{f})_X=0,$$

且对任意 $\lambda>0$, 有

$$\{x\in X:(\widetilde{f})^*(x)>\lambda\}\subset Q.$$

利用这些估计和 (3.15), 并取 $\gamma_2=1/20$, $\lambda=20\,\|S(f)\|_{L^\infty(Q)}$, 易验证对 $\gamma_3\geqslant 2$, 有

$$\mu(\{x\in Q:|f(x)-f_Q|>20\,\gamma_3\,\|S(f)\|_{L^\infty(X)}\})$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \mu\left(\left\{x\in X:(\widetilde{f}-(\widetilde{f})_X)^*(x)>20\,\gamma_3\,\|S(f)\|_{L^\infty(X)}, S(\widetilde{f})(x)\leqslant \frac{1}{10\gamma_3}(10\gamma_3\|S(f)\|_{L^\infty(Q)})\right\}\right)\\
&\leqslant C_8\exp(-100\,C_9\gamma_3^2)\,\mu(\{x\in X:(\widetilde{f}-(\widetilde{f})_X)^*(x)>10\,\gamma_3\,\|S(f)\|_{L^\infty(X)}\})\\
&\leqslant C_8\exp(-100\,C_9\gamma_3^2)\,\mu(Q).
\end{aligned}
$$

因此, 可取 $\beta_3\in(0,C_9/4)$, 从而可得

$$
\begin{aligned}
&\int_Q \exp\left(\beta_3\frac{|f(x)-f_Q|^2}{\|S(f)\|^2_{L^\infty(Q)}}\right)d\mu(x)\\
&\quad\leqslant \exp(1{,}600\beta_3)\mu(\{x\in Q:|f-f_Q|\leqslant 40\,\|S(f)\|_{L^\infty(Q)}\})\\
&\qquad+\int_2^\infty 800\,\beta_3\gamma_3\exp(400\,\beta_3\gamma_3^2)\mu(\{x\in Q:|f(x)-f_Q|>20\gamma_3\|S(f)\|_{L^\infty(X)}\})d\gamma_3\\
&\quad\leqslant C_{11}\mu(Q),
\end{aligned}
$$

其中 $C_{11}=C_{11}(C_8,C_9,\beta_3)$, 故 (3.8) 成立, 证明完毕. □

3.3 指数平方可积与平方函数的 L^p 下界最佳估计的等价性

本小节将证明指数平方可积性 (1.6) 与二进平方函数 S_d 的 L^p 下界最佳估计 (1.8) 是等价的. 为此, 先运用 Fefferman-Pipher 方法[2] 来证明好 λ 不等式 (1.7) 可推导出 (1.8), 从而, (1.6) 蕴含了 (1.8). 然后使用 Stirling 公式证明 (1.8) 可推导出 (1.6).

为论证需要, 我们介绍下述辅助泛函和估计. 对任意 $Q\in\mathscr{D}$ 和非负可测函数 $W\in L^1_{\rm loc}(X,d\mu)$, $0<\eta\leqslant 1$, 定义泛函 $Y_\eta(Q,W)$ 如下:

$$
Y_\eta(Q,W)=\begin{cases}\dfrac{\int_Q W(x)\log^\eta(\mathrm{e}+W(x)/W_Q)d\mu(x)}{\int_Q W(x)d\mu(x)}, & \displaystyle\int_Q W(x)d\mu(x)>0,\\ 1, & \displaystyle\int_Q W(x)d\mu(x)=0.\end{cases}\tag{3.16}
$$

泛函 $Y_\eta(Q,W)$ 首次出现在文献 [17] 中 ($\eta=1$ 情形), 并在文献 [3] 中被进一步研究, 所涉底空间均为配备 Lebesgue 测度的 Euclid 空间. 如文献 [3] 中所示, 该泛函反映了函数 W 在 Q 上的 "峰度系数" (非 A_∞ 行为).

引理 3.3 给定 $Q\in\mathscr{D}$ 和 $E\subset Q$. 若 $Y_\eta(Q,W)\leqslant y_0$ 且 $a>0$ 使得

$$
\mu(E)\leqslant C_{12}\exp(-a)\,\mu(Q),
$$

则存在正常数 $C_{13}=C_{13}(C_{12},\eta)$, 使得

$$
W(E)\leqslant C_{13}\,a^{-\eta}y_0W(Q),\tag{3.17}
$$

其中 $W(E):=\int_E W(x)d\mu(x)$.

证明 该引理的证明可参见文献 [4, 第 45 页]. 事实上, 若 $W(Q)=0$, 则 $W(E)=W(Q)=0$, 从而, 显然有 (3.17). 因此, 只需考虑 $W(Q)>0$ 的情形. 任给 $\lambda>0$, 令

$$
Q_\lambda:=\{x\in Q:W(x)>\exp(\lambda)W_Q\}.
$$

则有

$$W(E)=W(E\cap Q_{a/2})+W(E\setminus Q_{a/2}).$$

由 (3.16) 知, $(a/2)^\eta W(E\cap Q_{a/2})\leqslant y_0W(Q)$, 即 $W(E\cap Q_{a/2})\leqslant 2^\eta a^{-\eta}y_0W(Q)$.

另一方面, 注意到 $y_0=Y_\eta(Q,W)\geqslant 1$, 则

$$W(E\setminus Q_{a/2})\leqslant \exp\left(\frac{a}{2}\right)\mu(Q)^{-1}W(Q)\,\mu(E)\leqslant C_{12}\exp\left(-\frac{a}{2}\right)W(Q)\leqslant C_{14}a^{-\eta}y_0W(Q),$$

其中 $C_{14}=C_{14}(C_{12},\eta)$. 取 $C_{13}=2^\eta+C_{14}$, (3.17) 成立, 得证. □

利用上述引理, 下面证明定理 A(i) 蕴含定理 A(iii).

定理 A(i)⇒A(iii) 的证明 由 Fefferman-Pipher 证明 Hilbert 变换 L^p 有界性的方法 (参见文献 [2, 第 356 和 357 页]) 知, 为证定理 A(iii), 只需如下加权估计成立:

$$\|f-f_X\|_{L^2(X,Wd\mu)}\leqslant C\,\|W\|_{A_1}^{1/2}\|S_d(f)\|_{L^2(X,Wd\mu)},\tag{3.18}$$

其中 A_1 是经典的 Muckenhoupt 权空间. 事实上, 对任意的 $f\in L^p(X,d\mu)$, $p>2$, 有

$$\|f-f_X\|_{L^p(X,d\mu)}^2=\sup_{\substack{\|\varphi\|_{L^{(p/2)'}(X,d\mu)}=1\\ \varphi\geqslant 0}}\int_X|f-f_X|^2\varphi\,d\mu.\tag{3.19}$$

对任意非负的 $L^{(p/2)'}(X,d\mu)$ 函数 φ 且 $\|\varphi\|_{L^{(p/2)'}(X,d\mu)}=1$, 令

$$v=\varphi+\frac{M(\varphi)}{2\|M\|_{L^{(p/2)'}(X,d\mu)}}+\frac{M\circ M(\varphi)}{(2\|M\|_{L^{(p/2)'}(X,d\mu)})^2}+\cdots,$$

其中 M 是经典 Hardy-Littlewood 极大函数. 显然, $\|v\|_{L^{(p/2)'}(X,d\mu)}\leqslant 2$ 且

$$\|v\|_{A_1}\leqslant 2\|M\|_{L^{(p/2)'}(X,d\mu)\to L^{(p/2)'}(X,d\mu)}=O(p),\quad 当\ p\to\infty.$$

若 (3.18) 成立, 则

$$\int_X|f-f_X|^2\varphi\,d\mu\leqslant\int_X|f-f_X|^2vd\mu\leqslant C\|v\|_{A_1}\int_X|S_d(f)|^2v\,d\mu\leqslant Cp\|S_d(f)\|_{L^p(X,d\mu)}^2.$$

结合 (3.19) 知定理 A(iii) 成立. 故我们只需证明 (3.18) 成立.

注意到对每个 $\lambda>0$ 和 $\gamma_1\in(0,C_6/10)$, 由 (3.3) 知,

$$\begin{aligned}&W(\{x\in X:(f-f_X)^*(x)>2\lambda,S_d(f)(x)\leqslant\gamma_1\lambda\})\\&\quad\leqslant\sum_i W\left(\left\{x\in Q_{\lambda,i}:(f-f_X)^*(x)>2\lambda,S(f)(x)\leqslant\left(\frac{\gamma_1}{C_6}\right)\lambda\right\}\right),\end{aligned}\tag{3.20}$$

其中 $\{Q_{\lambda,i}\}$ 是 $\mathscr{D}$ 中使得 $|(f-f_X)_{Q_{\lambda,i}}|>\lambda$ 成立的极大二进方体集. 注意到我们已证明定理 A(i) 可推导出 (3.11), 则对每个 $Q_{\lambda,i}$, 有

$$\mu\left(\left\{x\in Q_{\lambda,i}:(f-f_X)^*(x)>2\lambda,S(f)(x)\leqslant\left(\frac{\gamma_1}{C_6}\right)\lambda\right\}\right)\leqslant C_8\exp\left(-\frac{C_6^2C_9}{\gamma_1^2}\right)\mu(Q_\lambda,i).\tag{3.21}$$

另一方面, 易验证存在常数 $C_{15}=C_{15}(A_0,C_\mu)\geqslant 1$, 使得对每个二进方体 $Q\in\mathscr{D}$, 如果 $W(Q)\neq 0$, 那么,

$$\int_Q W(x)\log\left(\mathrm{e}+\frac{W(x)}{W_Q}\right)d\mu(x)\leqslant C_{15}\int_Q M(W\chi_Q)d\mu(x)\leqslant C_{15}\,\|W\|_{A_1}W(Q).$$

又 $\|W\|_{A_1}\geqslant 1$ 恒成立, 故结合泛函 $Y_1(Q,W)$ 的定义知,

$$Y_1(Q,W)\leqslant C_{15}\|W\|_{A_1},\quad \forall\, Q\in\mathscr{D}. \tag{3.22}$$

将 (3.21) 和 (3.22) 代入引理 3.3 知, 对每个 $Q_{\lambda,i}$, 有

$$W\left(\left\{x\in Q_{\lambda,i}:(f-f_X)^*(x)>2\lambda, S(f)(x)\leqslant\left(\frac{\gamma_1}{C_6}\right)\lambda\right\}\right)\leqslant C_{16}\gamma_1^2\|W\|_{A_1}W(Q_{\lambda,i}),$$

其中 $C_{16}=C_{16}(C_6,C_8,C_9)$. 取 $\gamma_1=\frac{C_6}{\sqrt{100(1+C_{16})\|W\|_{A_1}}}\in(0,C_6/10)$ 并将上式代入 (3.20) 得

$$\begin{aligned}&W\left(\left\{x\in X:(f-f_X)^*(x)>2\lambda, S_d(f)(x)\leqslant\frac{C_6}{\sqrt{100(1+C_{16})\|W\|_{A_1}}}\lambda\right\}\right)\\&\leqslant\frac{C_6^2}{100}W(\{x\in X:(f-f_X)^*(x)>\lambda\})\\&<\frac{1}{100}W(\{x\in X:(f-f_X)^*(x)>\lambda\}).\end{aligned}$$

再结合经典的好 λ 不等式[18] 可知 (3.18) 成立, 证明完毕. □

为证明定理 A(i) 与 A(iii) 等价, 下面只需证定理 A(iii) 蕴含定理 A(i).

定理 A(iii)⇒A(i) 的证明 为说明当 $0\neq\|S_d(f)\|_{L^\infty(X)}<\infty$ 时 (1.6) 成立, 对每个 $Q\in\mathscr{D}$, 令 $g=(f-f_Q)\chi_Q$. 易验证: 当 $P\in Ch^{(\ell)}(Q)$ $(\ell\geqslant 1)$ 时, $g_P=f_P-f_Q$; 否则, 若 $R\in\mathscr{D}$ 不是 Q 的真子集, 则 $g_R=0$. 这些事实结合 S_d 的定义可知, 当 $x\in Q$ 时, $S_d(g)(x)\leqslant S_d(f)(x)$, 且当 $x\notin Q$ 时, $S_d(g)(x)=0$.

因此, 对任意的 $k\geqslant 2$, 有

$$\|S_d(g)\|_{L^k(X)}\leqslant\|S_d(f)\|_{L^\infty(X)}\,\mu(Q)^{1/k}.$$

进一步, 由定理 A(iii) 可知, 存在正常数 $C_{17}=C_{17}(C_5)$ 使得

$$\|g-g_X\|_{L^k(X)}=\|f-f_Q\|_{L^k(Q)}\leqslant C_{17}\,k^{1/2}\|S_d(f)\|_{L^\infty(X)}\,\mu(Q)^{1/k},\quad\forall\, k\geqslant 2.$$

再结合 Chebyshev 不等式可知,

$$\begin{aligned}\int_Q\exp(|f-f_Q|)d\mu(x)&\leqslant\mathrm{e}^2\mu(Q)+\sum_{k=2}^{\infty}\mathrm{e}^{k+1}\mu(\{x\in Q:k\leqslant|f-f_Q|<k+1\})\\&\leqslant\mathrm{e}^2\mu(Q)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{k+1}}{k^{2k}}\,C_{17}^{2k}\,(2k)^k\,\|S_d(f)\|_{L^\infty(X)}^{2k}\,\mu(Q)\\&=\mathrm{e}^2\mu(Q)+\mathrm{e}\mu(Q)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2C_{17}^2\|S_d(f)\|_{L^\infty(X)}^2)^k}{(k/\mathrm{e})^k}.\end{aligned}\tag{3.23}$$

回顾 Stirling 公式

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k!}{\sqrt{2\pi k}(k/\mathrm{e})^k}=1,$$

故存在正常数 C_{18}, 使得对每个正整数 k, 有

$$\frac{k!}{\sqrt{k}} \leqslant C_{18}\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k.$$

将之代入 (3.23) 可推出

$$\begin{aligned}\int_Q \exp(|f-f_Q|)d\mu(x) &\leqslant \mathrm{e}^2\mu(Q) + 2\mathrm{e}C_{17}^2C_{18}\|S_d(f)\|_{L^\infty(X)}^2\mu(Q)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2C_{17}^2\|S_d(f)\|_{L^\infty(X)}^2)^{k-1}}{(k-1)!}\\ &\leqslant \mathrm{e}^2\mu(Q) + \mathrm{e}C_{18}(2C_{17}^2\|S_d(f)\|_{L^\infty(X)}^2)\exp(2C_{17}^2\|S_d(f)\|_{L^\infty(X)}^2)\mu(Q)\\ &\leqslant (\mathrm{e}^2+\mathrm{e}C_{18})\exp(4C_{17}^2\|S_d(f)\|_{L^\infty(X)}^2)\mu(Q),\end{aligned}$$

其中第二个不等式运用了指数函数的 Taylor 展开公式, 第三个不等式成立是因为 $t<\mathrm{e}^t$, $\forall\, t\in\mathbb{R}$.

因此,

$$\int_Q \exp(|f-f_Q| - 4C_{17}^2\|S_d(f)\|_{L^\infty(X)}^2)d\mu(x) \leqslant (\mathrm{e}^2+\mathrm{e}C_{18})\,\mu(Q).$$

由命题 3.2 证明中步骤 2 可得定理 A(i), 证毕. □

注 3.4 由定理 2.2(ii) 知, X 上存在相邻二进方体族 $\{\mathcal{D}^b: b=1,2,\ldots,L\}$, 且每个 $\mathcal{D}^b$ 是与参数 $c_1=6^{-1}A_0^{-5}$、$C_1=6A_0^4$ 和 δ 相联系的二进方体族. 故与 S_d 和 S 相类似, 我们可以定义与 $\mathcal{D}^b$ 相联系的二进平方函数 S_d^b 和 S^b, 例如,

$$S^b(f)(x) = \Bigg(\sum_{{}^bQ\ni x,\,{}^bQ\in\mathcal{D}^b}\|a_{{}^bQ}(f)\|_{L^\infty({}^bQ)}^2\Bigg)^{1/2} = \Bigg(\sum_{{}^bQ\ni x,\,{}^bQ\in\mathcal{D}^b}\Bigg\|\sum_{u=1}^{M_{{}^bQ}-1}\langle f, h_u^{{}^bQ}\rangle h_u^{{}^bQ}\Bigg\|_{L^\infty({}^bQ)}^2\Bigg)^{1/2}. \tag{3.24}$$

显然, 存在正常数 $C_b<1$ 使得

$$C_bS^b(f)(x) \leqslant S_d^b(f)(x) \leqslant S^b(f)(x).$$

由于定理 A 的证明仅依赖于 Haar 函数和二进方体的性质, 故结合注 2.5 知, 将定理 A 中的方体 $Q\in\mathscr{D}$、极大函数 f^* 和平方函数 $S_d(f)$ 分别替换成 ${}^bQ\in\mathcal{D}^b$、$f^{b*}(x):=\sup_{{}^bP\ni x,\,{}^bP\in\mathcal{D}^b}|f_{{}^bP}|$ 和 $S_d^b(f)$ (或 $S^b(f)$) 时, 定理 A 仍成立.

4 非紧流形上平方函数的 L^p 下界最佳估计

令 M 是完备非紧且连通的 Riemann 流形, μ 和 ∇ 分别是 M 上的测度和梯度. 假设 M 满足测度双倍条件 (1.4), $\mu(M)=\infty$, 且 M 上的热核 $p_t(x,y)$ 满足 Gauss 上界 (1.9) 和梯度估计 (1.10).

本节的目的是证明定理 B. 为此一个重要的观察是 M 上的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 满足守恒律

$$\mathrm{e}^{-t\Delta}1 = 1, \quad \forall\, t>0, \tag{4.1}$$

参见文献 [19, (1.5)]. 另外, 算子 Δ 满足有限速度传播性质, 即存在正常数 c_0, 使得 $\cos(t\sqrt{\Delta})$ 对应的核 $K_{\cos(t\sqrt{\Delta})}$ 满足

$$\text{(FS)} \qquad \operatorname{supp} K_{\cos(t\sqrt{\Delta})} \subset \{(x,y)\in M\times M: d(x,y)\leqslant c_0t\},$$

参见文献 [20–22]. 由于 c_0 的具体的数值不是本质的, 本节总是令 $c_0=1$.

由 Fourier 逆变换公式知, 若 F 是有界 Borel 偶函数且 $\widehat{F}\in L^1(\mathbb{R})$, 可用 $\cos(t\sqrt{\Delta})$ 来表示 $F(\sqrt{\Delta})$. 具体地,

$$F(\sqrt{\Delta})=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{F}(t)\cos(t\sqrt{\Delta})\,dt,$$

再结合有限速度传播性质知,

$$K_{F(\sqrt{\Delta})}(x,y)=(2\pi)^{-1}\int_{d(x,y)\leqslant|t|}\widehat{F}(t)K_{\cos(t\sqrt{\Delta})}(x,y)\,dt.$$

引理 4.1 令 M 是完备非紧且连通的 Riemann 流形, 其测度 μ 满足双倍性质 (1.4), 且 M 上的热核 $p_t(x,y)$ 满足 Gauss 上界 (1.9) 和梯度估计 (1.10). 令 $\rho>0$, $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 是实值偶函数并满足 $\mathrm{supp}\phi\in(-\rho,\rho)$, 作 $\varphi=\widehat{\phi}$. 对每个 $t>0$ 及 $k=0,1,2,\ldots$, 令 $\psi_k(t\sqrt{\Delta})=(t^2\Delta)^k\varphi(t\sqrt{\Delta})$, 则有

(i) 算子 $\psi_k(t\sqrt{\Delta})$ 对应的核 $K_{\psi_k(t\sqrt{\Delta})}(x,y)$ 满足

$$\mathrm{supp}\ K_{\psi_k(t\sqrt{\Delta})}\subset\{(x,y)\in M\times M: d(x,y)\leqslant\rho t\},$$

且

$$|K_{\psi_k(t\sqrt{\Delta})}(x,y)|\leqslant\frac{C(C_\mu,k,\rho)}{V(x,t)},\quad\forall\,t>0,\quad\forall\,x,y\in M;$$

(ii) 算子 $\psi_k(s\sqrt{\Delta})\psi_k(t\sqrt{\Delta})$ 对应的核 $K_{\psi_k(s\sqrt{\Delta})\psi_k(t\sqrt{\Delta})}(x,y)$ 满足

$$|K_{\psi_k(s\sqrt{\Delta})\psi_k(t\sqrt{\Delta})}(x,y)|\leqslant\min\left(\frac{s}{t},\frac{t}{s}\right)\frac{C(C_\mu,k,\rho)}{V(x,\max(s,t))},\quad\forall\,s,t>0,\quad\forall\,x,y\in M;$$

(iii) 对任意的 $x,x',y\in M$ 和 $t>0$, 有

$$|K_{\psi_k(t\sqrt{\Delta})}(x,y)-K_{\psi_k(t\sqrt{\Delta})}(x',y)|\leqslant\min\left\{\frac{d(x,x')}{t},1\right\}\frac{C(C_\mu,k,\rho)}{V(y,t)}.\tag{4.2}$$

证明 引理 4.1(i) 的证明是标准的, 可参见文献 [21,23]. 引理 4.1(ii) 可利用文献 [24, 引理 2.3] 的论证技巧得到. 另外, 运用梯度估计 (1.10) 并直接计算即可得引理 4.1(iii). □

令 $\psi:=\psi_1$ 如引理 4.1 所示, 即对参数 $\rho>0$, 令 $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 是实值偶函数, 且 $\mathrm{supp}\ \phi\in(-\rho,\rho)$, 并作 $\psi(s):=s^2\widehat{\phi}(s)$, $s\in\mathbb{R}$. 由谱理论 [25,26] 知, 对每个 $f\in L^2(M)$, 如下 Calderón 再生公式:

$$f=c_\psi\lim_{\substack{\varepsilon\to0+\\N\to\infty}}\int_\varepsilon^N\psi(t\sqrt{\Delta})\,t^2\Delta\,\mathrm{e}^{-t\sqrt{\Delta}}f\frac{dt}{t}\tag{4.3}$$

在 $L^2(M)$ 范数意义下收敛.

注意到 (M,d,μ) 是齐型空间且相应常数 $A_0=1$, 故可构造 M 上与参数 $\delta\leqslant10^{-3}$ 相联系的二进方体族

$$\mathscr{D}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\mathscr{D}_k,\quad\mathscr{D}_k=\{Q_\beta^k:\beta\in\mathscr{J}_k\}.$$

对每个 $Q_\beta^k\in\mathscr{D}_k$, $k\in\mathbb{Z}$, $\beta\in\mathscr{J}_k$, 定义

$$T_\rho(Q_\beta^k):=\{(x,t)\in M\times(0,\infty):x\in Q_\beta^k,\rho^{-1}\delta^{k+1}\leqslant t<\rho^{-1}\delta^k\},\tag{4.4}$$

其中 $\rho>0$ 是 ϕ 支撑集中相关的参数, 见引理 4.1. 从而,

$$M\times(0,\infty)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\bigcup_{\beta\in\mathscr{J}_k}T_\rho(Q_\beta^k).$$

对任意的 $Q_{\beta_1}^k,Q_{\beta_2}^\ell\in\mathscr{D}$, 其中 $\beta_1\neq\beta_2$ 或 $k\neq\ell$, 显然有 $T_\rho(Q_{\beta_1}^k)\cap T_\rho(Q_{\beta_2}^\ell)=\emptyset$. 因此, 由 (4.3) 知, 对每个 $f\in L^2(M)$, 有

$$\begin{aligned}
f(x) &= c_\psi\iint_{X\times(0,\infty)}K_{\psi(t\sqrt{\Delta})}(x,y)(t^2\Delta\,\mathrm{e}^{-t\sqrt{\Delta}}f(y))\frac{d\mu(y)dt}{t}\\
&= c_\psi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\beta\in\mathscr{J}_k}\iint_{T_\rho(Q_\beta^k)}K_{\psi(t\sqrt{\Delta})}(x,y)(t^2\Delta\,\mathrm{e}^{-t\sqrt{\Delta}}f(y))\frac{d\mu(y)dt}{t}\\
&=:\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\beta\in\mathscr{J}_k}a_{\rho,Q_\beta^k}(f)(x)\\
&=:\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\beta\in\mathscr{J}_k}\lambda_{\rho,Q_\beta^k}\,b_{\rho,Q_\beta^k}(f)(x),
\end{aligned}\tag{4.5}$$

其中

$$a_{\rho,Q_\beta^k}(f)(x)=c_\psi\iint_{T_\rho(Q_\beta^k)}K_{\psi(t\sqrt{\Delta})}(x,y)(t^2\Delta\,\mathrm{e}^{-t\sqrt{\Delta}}f(y))\frac{d\mu(y)dt}{t},\tag{4.6}$$

$$\lambda_{\rho,Q_\beta^k}=\left(\iint_{T_\rho(Q_\beta^k)}|t^2\Delta\,\mathrm{e}^{-t\sqrt{\Delta}}f(y)|^2\frac{d\mu(y)dt}{t}\right)^{1/2},\tag{4.7}$$

且

$$b_{\rho,Q_\beta^k}(f)=\begin{cases}0, & \lambda_{\rho,Q_\beta^k}=0,\\ \lambda_{\rho,Q_\beta^k}^{-1}a_{\rho,Q_\beta^k}(f), & \lambda_{\rho,Q_\beta^k}\neq 0.\end{cases}\tag{4.8}$$

我们有如下关于 $b_{\rho,Q_\beta^k}(f)$ 的基本性质.

引理 4.2 令 M 是完备非紧且连通的 Riemann 流形, 其测度 μ 满足双倍性质 (1.4), 且 M 上的热核 $p_t(x,y)$ 满足 Gauss 上界 (1.9) 和梯度估计 (1.10). 任给 $k\in\mathbb{Z}$ 和 $\beta\in\mathscr{J}_k$, 由 (4.8) 定义的函数 $b_{\rho,Q_\beta^k}(f)$ 满足如下性质:

(i) $\operatorname{supp} b_{\rho,Q_\beta^k}(f)\subset B(x_\beta^k,17\delta^k)$;

(ii) $\|b_{\rho,Q_\beta^k}(f)\|_\infty\leqslant C(C_\mu,\rho)\,\mu(Q_\beta^k)^{-1/2}$;

(iii) 对任意的 $x,x'\in M$, 有

$$|b_{\rho,Q_\beta^k}(f)(x)-b_{\rho,Q_\beta^k}(f)(x')|\leqslant C(C_\mu,\rho)\min\left\{\frac{d(x,x')}{\delta^k},1\right\}\mu(Q_\beta^k)^{-1/2};$$

(iv) $\int_M b_{\rho,Q_\beta^k}(f)(x)d\mu(x)=0$.

证明 由 $T_\rho(Q_\beta^k)$ 和 $b_{\rho,Q_\beta^k}(f)$ 的定义, 结合引理 4.1(i) 和定理 2.2(i) 可知,

$$\operatorname{supp} b_{\rho,Q_\beta^k}(f)\subset\{x\in M:d(x,Q_\beta^k)\leqslant\delta^k\}\subset\{x\in M:d(x,B(x_\beta^k,16\delta^k))\leqslant\delta^k\}=B(x_\beta^k,17\delta^k),$$

故引理 4.2(i) 得证.

关于引理 4.2(ii) 和 4.2(iii), 运用引理 4.1(i) 和 4.1(iii) 并结合双倍性质 (1.4), 直接计算可得, 也可参见文献 [27].

下面证明引理 4.2(iv). 记 $K_{t^2\Delta \mathrm{e}^{-t\Delta}}(x,y)$ 为 $t\Delta\,\mathrm{e}^{-t\Delta}$ 对应的核, 结合热核守恒律 (4.1) 及

$$t\Delta \mathrm{e}^{-t\Delta} = -t\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{-t\Delta}$$

可知

$$\int_M K_{t\Delta\,\mathrm{e}^{-t\Delta}}(x,y)d\mu(y) = 0, \quad \forall\, t>0, \quad x\in M. \tag{4.9}$$

回顾 $\psi(s)=\psi_1(s)=s^2\widehat{\phi}(s)=s^2\psi_0(s)$, $s\in\mathbb{R}$, 其中 ψ_0、ψ_1 和 ϕ 是引理 4.1 中定义的函数. 任给 $m\geqslant n/2+1$ 和 $t>0$, 其中 n 是 (1.5) 中常数. 由谱理论知,

$$\psi(t\sqrt{\Delta}) = (t\sqrt{\Delta})^2(1+t^2\Delta)^{-m}((1+t^2\Delta)^m\psi_0(t\sqrt{\Delta})),$$

且

$$(t\sqrt{\Delta})^2(1+t^2\Delta)^{-m} = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty (t^2 s\Delta \mathrm{e}^{-t^2 s\Delta})\mathrm{e}^{-s}s^{m-2}ds.$$

再结合 (4.9) 和 Fubini 定理可推导出, 对任意的 $t>0$ 和 $y\in M$, 有

$$\int_M K_{\psi(t\sqrt{\Delta})}(x,y)d\mu(x) = 0.$$

从而引理 4.2(iv) 得证. 综上, 引理 4.2 证毕. □

结合定理 2.1(iii)、2.2(i) 和引理 4.2(i) 可知, 当 $\lambda_{\rho,\,Q^k_\beta}\neq 0$ 时,

$$B\left(x^k_\beta, \frac{\delta^k}{3}\right) \subset Q^k_\beta \subset \operatorname{supp} b_{\rho,\,Q^k_\beta}(f) \subset B(x^k_\beta, 17\delta^k).$$

再运用定理 2.2(ii) 可推导知, 存在某个映射

$$E_1 : \mathscr{D} \to \bigcup_{b=1}^{L} \mathcal{D}^b$$

满足: 对每个 $Q^k_\beta\in\mathscr{D}$, 存在 $b\in\{1,2,\ldots,L\}$ 使得 $E_1(Q^k_\beta)\in\mathcal{D}^b$, $\operatorname{supp} b_{Q^k_\beta}(f)\subset E_1(Q^k_\beta)$ 且 $\operatorname{diam}(E_1(Q))\leqslant C_\delta\delta^k$, 其中常数 C_δ 不依赖于 Q^k_β 和参数 ρ. 在此基础上, 我们可定义与 Δ 相联系的离散型平方函数

$$\mathscr{A}_{\Delta,\,\rho}(f)(x) := \left(\sum_{Q\in\mathscr{D}} \frac{|\lambda_{\rho,\,Q}|^2}{\mu(Q)}\chi_{E_1(Q)}(x)\right)^{1/2}. \tag{4.10}$$

另外注意到 $\mathscr{A}_{\Delta,\,\rho}(f)$ 的定义与引理 4.1 中的参数 ρ 相关. 进一步, 利用双倍性质 (1.4) 可知,

$$\mathscr{A}_{\Delta,\,\rho}(f)(x) \simeq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\rho^{-1}\delta^{k+1}}^{\rho^{-1}\delta^k}\int_{\Omega_k(x)} |t^2\Delta\,\mathrm{e}^{-t\sqrt{\Delta}}f(y)|^2\frac{d\mu(y)}{V(x,t)}\frac{dt}{t}\right)^{1/2},$$

其中

$$\Omega_k(x) = \bigcup_{Q\in\mathscr{D}_k,\,x\in E_1(Q)} Q.$$

对每个 $\alpha>0$, 运用映射 E_1 的定义和性质可知, 可选定某个 $\rho=\rho(\alpha,\delta)$ 使得对任意的 $(y,t)\in\Omega_k(x)\times[\rho^{-1}\delta^{k+1},\rho^{-1}\delta^k)$, 有 $d(x,y)<\alpha t$.

该事实说明, 对每个 $\alpha>0$, 可选定参数 $\rho=\rho(\alpha,\delta)$, 使得

$$\mathscr{A}_{\Delta,\rho}(f)(x)\leqslant CS_{\Delta,\alpha}(f)(x),\quad \forall\, f\in L^2(M), \tag{4.11}$$

其中 $C=C(C_\mu,\alpha)$.

定理 B 的证明 任给 $f\in L^p(M)$, 其中 p 充分大且固定, 不妨设 $p>2$. 显然存在子列 $\{f_k\}$, 其中每个 f_k 都是 $L^p(M)\cap L^2(M)$ 函数, 且

$$\|f\|_{L^p(M)}=\lim_{k\to\infty}\|f_k\|_{L^p(M)}.$$

再结合 $S_{\Delta,\alpha}$ 的 L^p 有界性 [11–13] 可知,

$$\|S_{\Delta,\alpha}f\|_{L^p(M)}=\lim_{k\to\infty}\|S_{\Delta,\alpha}f_k\|_{L^p(M)}.$$

因此, 为证明定理 B, 只需考虑 $f\in L^p(M)\cap L^2(M)$ 的情形, 此时一个可利用的关键估计是 (4.11).

运用估计 (4.11), 只需证当用 $\mathscr{A}_{\Delta,\rho}(f)$ 替换 $S_{\Delta,\alpha}(f)$ 时, (1.12) 亦成立, 其中参数 $\rho=\rho(\alpha,\delta)$ 的取值满足 (4.11) 即可. 下面的论证中总是固定参数 ρ 使得 (4.11) 成立.

对每个 $b\in\{1,2,\ldots,L\}$、$N\in\mathbb{N}$ 和 $f\in L^p(M)\cap L^2(M)$, 令

$$f_{b,N}(x):=\sum_{|k|\leqslant N}\sum_{E_1(Q)\in\mathcal{D}_k^b}\lambda_{\rho,Q}\,b_{\rho,Q}(f)(x),$$

并形式地定义

$$\mathscr{A}_{\Delta,\rho}(f_{b,N})(x):=\left(\sum_{|k|\leqslant N}\sum_{E_1(Q)\in\mathcal{D}_k^b}\frac{|\lambda_{\rho,Q}|^2}{\mu(Q)}\chi_{E_1(Q)}(x)\right)^{1/2}.$$

我们断言: 存在不依赖于 f、b 和 N 的常数 $C_{19}=C_{19}(C_\mu,\alpha)>0$ 使得

$$S^b(f_{b,N})(x)\leqslant C_{19}\,\mathscr{A}_{\Delta,\rho}(f_{b,N})(x), \tag{4.12}$$

其中 S^b 的定义如注 3.4 所示. 事实上, 任给 $P\in\mathcal{D}^b$, 不妨记 $P\in\mathcal{D}_{k_P}^b$ 且令 x_P 表示 P 的中心. 结合引理 4.2、定理 2.3 和注 2.5 知,

$$\begin{aligned}|a_P(f_{b,N})(x)|&=\left|\sum_{|k|\leqslant N}\sum_{\substack{E_1(Q)\in\mathcal{D}_k^b\\P\subset E_1(Q)}}\lambda_{\rho,Q}\sum_{u=1}^{M_P-1}\langle b_{\rho,Q}(f),h_u^P\rangle h_u^P(x)\right|\\&=\left|\sum_{|k|\leqslant N}\sum_{\substack{E_1(Q)\in\mathcal{D}_k^b\\P\subset E_1(Q)}}\lambda_{\rho,Q}\sum_{u=1}^{M_P-1}\langle b_{\rho,Q}(f)-b_{\rho,Q}(f)(x_P),h_u^P\rangle h_u^P(x)\right|\\&\leqslant C(C_\mu,\rho)\sum_{|k|\leqslant N}\sum_{\substack{E_1(Q)\in\mathcal{D}_k^b\\P\subset E_1(Q)}}(M_P-1)|\lambda_{\rho,Q}|\frac{\operatorname{diam}(E_1(Q))}{\operatorname{diam}(P)\mu(E_1(Q))^{1/2}}.\end{aligned}$$

由双倍性质知, 存在正常数 $M_L=M_L(C_\mu,\delta)$ 和 $N_L=M_L(C_\mu,\delta)$ 使得

$$1\leqslant M_P\leqslant M_L,\quad \forall\, P\in\mathcal{D}^b,\quad \forall\, b\in\{1,2,\ldots,L\},$$

且

$$0 \leqslant \#\{Q \in \mathscr{D} : E_1(Q) = R\} \leqslant N_L, \quad \forall\, R \in \mathcal{D}^b, \quad \forall\, b \in \{1, 2, \ldots, L\}.$$

从而,

$$\begin{aligned}
(S^b(f_{b,N}))^2(x) &= \sum_{P\in\mathcal{D}^b} \|a_P(f_{b,N})\|_\infty^2 \chi_P(x) \\
&\leqslant CM_L^2 \sum_{P\in\mathcal{D}^b} \Bigg(\sum_{|k|\leqslant N} \sum_{\substack{E_1(Q)\in\mathcal{D}_k^b \\ P\subset E_1(Q)}} |\lambda_{\rho,\,Q}| \frac{\operatorname{diam}(E_1(Q))}{\operatorname{diam}(P)} \frac{\mu(P)^{1/2}}{\mu(E_1(Q))^{1/2}} \chi_{E_1(Q)}(x) \Bigg)^2 \\
&\leqslant CM_L^2 \sum_{P\in\mathcal{D}^b} \sum_{-N\leqslant k\leqslant \min\{N,k_P\}} 2^{k_P-k} \Bigg(\sum_{\substack{E_1(Q)\in\mathcal{D}_k^b \\ P\subset E_1(Q)}} |\lambda_{\rho,\,Q}| \delta^{k_P-k} \frac{1}{\mu(E_1(Q))^{1/2}} \chi_{E_1(Q)}(x) \Bigg)^2 \\
&\leqslant CM_L^2 N_L \sum_{P\in\mathcal{D}^b} \sum_{-N\leqslant k\leqslant \min\{N,k_P\}} 2^{k_P-k} \sum_{\substack{E_1(Q)\in\mathcal{D}_k^b \\ P\subset E_1(Q)}} |\lambda_{\rho,\,Q}|^2 \delta^{2(k_P-k)} \frac{1}{\mu(E_1(Q))} \chi_{E_1(Q)}(x) \\
&= CM_L^2 N_L \sum_{|k|\leqslant N} \sum_{E_1(Q)\in\mathcal{D}_k^b} \Bigg(\sum_{P\in\mathcal{D}^b : P\subset E_1(Q)} (2\delta^2)^{k_P-k} \Bigg) \frac{|\lambda_{\rho,\,Q}|^2}{\mu(E_1(Q))} \chi_{E_1(Q)}(x) \\
&\leqslant CM_L^2 N_L \sum_{|k|\leqslant N} \sum_{E_1(Q)\in\mathcal{D}_k^b} \frac{|\lambda_{\rho,\,Q}|^2}{\mu(E_1(Q))} \chi_{E_1(Q)}(x) \\
&= CM_L^2 N_L (\mathscr{A}_{\Delta,\,\rho}(f_{b,N}))^2(x).
\end{aligned}$$

故 (4.12) 得证.

注意到 $f = \lim_{N\to\infty} \sum_{b=1}^L f_{b,N}$ 在 $L^2(M)$ 范数意义下收敛, 且由 Riesz 定理可知存在子序列 $\{|\sum_{b=1}^L f_{b,N_i}|^p\}_i$ 使得

$$|f(x)|^p = \lim_{i\to\infty} \left| \sum_{b=1}^L f_{b,N_i}(x) \right|^p$$

对几乎处处 $x \in M$ 成立. 进一步, 运用 Fatou 引理可知,

$$\|f\|_{L^p(M)} \leqslant \varliminf_{i\to\infty} \left\| \sum_{b=1}^L f_{b,N_i} \right\|_{L^p(M)},$$

且对每个 $b \in \{1, 2, \ldots, L\}$、$N_i \in \mathbb{N}$ 和 $x \in M$, 有

$$\mathscr{A}_{\Delta,\rho}(f_{b,N_i})(x) \leqslant \mathscr{A}_{\Delta,\,\rho}(f)(x).$$

综上, 结合定理 A(iii) 和注 3.4 知, 当 $p \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(M,d\mu)} &\leqslant \varliminf_{i\to\infty} \left\| \sum_{b=1}^L f_{b,N_i} \right\|_{L^p(M)} \leqslant \sum_{b=1}^L \varliminf_{i\to\infty} \|f_{b,N_i}\|_{L^p(M)} \\
&\leqslant Cp^{1/2} \sum_{b=1}^L \varliminf_{i\to\infty} \|S^b(f_{b,N_i})\|_{L^p(M)} \\
&\leqslant Cp^{1/2} \sum_{b=1}^L \|\mathscr{A}_{\Delta,\rho}(f_{b,N})\|_{L^p(M)}
\end{aligned}$$

$$\leqslant Cp^{1/2}\|\mathscr{A}_{\Delta,\rho}(f)\|_{L^p(M)}.$$

结合 (4.11) 知定理 B 得证. □

致谢 作者感谢陈鹏有益的讨论.

参考文献

1 Chang S Y A, Wilson J M, Wolff T H. Some weighted norm inequalities concerning the Schrödinger operators. Comment Math Helv, 1985, 60: 217–246

2 Fefferman R, Pipher J. Multiparameter operators and sharp weighted inequalities. Amer J Math, 1997, 119: 337–369

3 Wilson J M. Weighted norm inequalities for the continuous square function. Trans Amer Math Soc, 1989, 314: 661–692

4 Wilson J M. Weighted Littlewood-Paley Theory and Exponential-Square Integrability. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1924. Berlin: Springer, 2008

5 Grafakos L, Honzík P, Seeger A. On maximal functions for Mikhlin-Hörmander multipliers. Adv Math, 2006, 204: 363–378

6 Coifman R R, Weiss G. Analyse Harmonique Hon-Commutative Sur Certains Espaces Homogènes. Lecture Notes in Mathematics, vol. 242. Berlin: Springer, 1971

7 Hytönen T, Kairema A. Systems of dyadic cubes in a doubling metric space. Colloq Math, 2012, 126: 1–33

8 Kairema A, Li J, Pereyra M C, et al. Haar bases on quasi-metric measure spaces, and dyadic structure theorems for function spaces on product spaces of homogeneous type. J Funct Anal, 2016, 271: 1793–1843

9 Li P, Yau S T. On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. Acta Math, 1986, 156: 153–201

10 Ouhabaz E M. Analysis of Heat Equations on Domains. London Mathematical Society Monographs, vol. 31. Princeton: Princeton University Press, 2005

11 Auscher P. On Necessary and Sufficient Conditions for L^p-Estimates of Riesz Transforms Associated to Elliptic Operators on $\mathbb{R}^n$ and Related Estimates. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 186. Providence: Amer Math Soc, 2007

12 Auscher P, Hofmann S, Martell J M. Vertical versus conical square functions. Trans Amer Math Soc, 2012, 364: 5469–5489

13 Gong R M, Yan L X. Weighted L^p estimates for the area integral associated to self-adjoint operators. Manuscripta Math, 2014, 144: 25–49

14 Auscher P, Hytönen T. Orthonormal bases of regular wavelets in spaces of homogeneous type. Appl Comput Harmon Anal, 2013, 34: 266–296

15 Lieb E H, Loss M. Analysis, 2nd ed. Providence: Amer Math Soc, 2001

16 Hytönen T, Pérez C, Rela E. Sharp reverse Hölder property for A_∞ weights on spaces of homogeneous type. J Funct Anal, 2012, 263: 3883–3899

17 Wilson J M. A sharp inequality for the square function. Duke Math J, 1987, 55: 879–887

18 Stein E M. Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton: Princeton University Press, 1993

19 Auscher P, Coulhon T, Duong X T, et al. Riesz transform on manifolds and heat kernel regularity. Ann Sci Éc Norm Supér, 2004, 37: 911–957

20 Cheeger J, Gromov M, Taylor M. Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds. J Differential Geom, 1982, 17: 15–53

21 Sikora A. Riesz transform, Gaussian bounds and the method of wave equation. Math Z, 2004, 247: 643–662

22 Coulhon T, Sikora A. Gaussian heat kernel upper bounds via the Phragmén-Lindelöf theorem. Proc Lond Math Soc (3), 2008, 96: 507–544

23 Hofmann S, Lu G Z, Mitrea D, et al. Hardy Spaces Associated to Nonnegative Self-Adjoint Operators Satisfying Davies-Gaffney Estimates. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 214. Providence: Amer Math Soc, 2011

24 Song L, Yan L X. A maximal function characterization for Hardy spaces associated to nonnegative self-adjoint operators satisfying Gaussian estimates. Adv Math, 2016, 287: 463–484

25 Albrecht D, Duong X T, McIntosh A. Operator theory and harmonic analysis. In: Proceedings of the Centre for Mathematics and its Applications, Australian National University, vol. 34. Instructional Workshop on Analysis and Geometry, Part III (Canberra, 1995). Canberra: Australian National University, 1996, 77–136

26 Yosida K. Functional Analysis, 5th ed. Berlin: Springer-Verlag, 1978

27 Chen P, Duong X T, Wu L C, et al. Exponential-square integrability, weighted inequalities for the square functions associated to operators and applications. ArXiv:1609.01516, 2016

Characterizations of the exponential square class on spaces of homogeneous type and applications

Liangchuan Wu & Lixin Yan

Abstract Let (X, d, μ) be a space of homogeneous type. We establish three equivalent characterizations of the exponential square class associated to the classical dyadic square function on (X, d, μ): exponential square integrability, improved good-λ inequalities, and the sharp L^p lower bound for the classical dyadic square function. This result generalizes the famous Chang-Wislon-Wolff theorem on $\mathbb{R}^n$. We then apply this result to obtain sharp L^p estimates for the square function associated to the Laplace-Beltrami operator on Riemannian manifolds with nonnegative Ricci curvature.

Keywords **exponential square class, square functions, good-λ inequality, Laplace-Beltrami operators, spaces of homogeneous type**

MSC(2010) **42B20, 42B25, 47B38, 58G35**

doi: 10.1360/N012017-00136