双分数 Brown 运动的连续模和不可微模

王文胜

杭州电子科技大学经济学院, 杭州 310018

E-mail: wswang@hdu.edu.cn

收稿日期: 2017-10-21; 接受日期: 2019-01-20; 网络出版日期: 2019-05-27

国家自然科学基金 (批准号: 11671115) 资助项目

摘要 令 $H \in (0, 1)$ 和 $K \in (0, 1]$ 是两个常数. 设 $B^{H,K} = \{B^{H,K}(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上指标为 H 和 K 的双分数 Brown 运动. 本文证明 $B^{H,K}$ 的整体和局部连续模定理, 并通过证明 $B^{H,K}$ 的小球常数存在, 来证明 $B^{H,K}$ 的不可微模定理. 上述结果表明双分数 Brown 运动的样本函数是几乎处处连续和几乎处处不可微的. 作为不可微模定理的一个应用, 本文证明 Tudor 和 Xiao (2008) 关于双分数 Brown 运动的最大值局部时的一致 Hölder 条件是最优的.

关键词 自相似 Gauss 过程 双分数 Brown 运动 小球概率 连续模 不可微模 局部时

MSC (2010) 主题分类 60G15, 60G17, 60F10, 60F15

1 引言

令 $H \in (0, 1)$ 和 $K \in (0, 1]$ 是两个常数. 设 $B_0^{H,K} = \{B_0^{H,K}(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上指标为 H 和 K 的双分数 Brown 运动, 即 $B_0^{H,K}$ 是中心化的实值 Gauss 过程, 其协方差函数是

$$R^{H,K}(s, t) := \frac{1}{2^K} [(s^{2H} + t^{2H})^K - |s - t|^{2HK}], \quad (1.1)$$

且 $B_0^{H,K}(0) = 0$.

令 $B_1^{H,K}, \dots, B_d^{H,K}$ 是 $B_0^{H,K}$ 的独立复制. 定义 $\mathbb{R}^d$ 值 Gauss 过程 $B^{H,K} = \{B^{H,K}(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ 如下:

$$B^{H,K}(t) = (B_1^{H,K}(t), \dots, B_d^{H,K}(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

由 (1.1) 容易知道, $B^{H,K}$ 是指数为 HK 的自相似 Gauss 过程, 即对任意的常数 $a > 0$, 成立

$$\{B^{H,K}(at), t \in \mathbb{R}_+\} \stackrel{d}{=} \{a^{HK} B^{H,K}(t), t \in \mathbb{R}_+\}, \quad (1.2)$$

英文引用格式: Wang W S. Continuity moduli and non-differentiability moduli for bifractional Brownian motion (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1209–1224, doi: 10.1360/SCM-2017-0717

其中 $X \stackrel{d}{=} Y$ 表示两个过程的有限维分布相同. 当 $K = 1$ 时, $B^{H,K}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上 Hurst 参数为 $H \in (0, 1)$ 的分数 Brown 运动; 当 $K \neq 1$ 时, $B^{H,K}$ 不具有平稳增量性. 事实上, 分数 Brown 运动是唯一的既是自相似的又具有平稳增量的 Gauss 过程 (参见文献 [1]).

双分数 Brown 运动 $B^{H,K} = \{B^{H,K}(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ 由文献 [2] 首先引入, 由于它是分数 Brown 运动的推广, 是自相似的但不具有平稳增量性, 从而引起了学者们的广泛关注. 例如, 文献 [3] 研究了 $B^{H,K}$ 的强变差性质并建立了关于 $B^{H,K}$ 的随机积分. 文献 [4] 证明了 $B^{H,K}$ 的 Chung 重对数律 (law of the iterated logarithm, LIL), 还研究了 $B^{H,K}$ 的局部时的存在性和正则性, 并研究了 $B^{H,K}$ 的图集、像集和水平集的 Hausdorff 和 Packing 维数. 文献 [5] 推导了 $B^{H,K}$ 的 Itô 公式和 Tanaka 公式. 文献 [6] 证明了 $B^{H,K}$ 等价于一个 Hurst 参数为 HK 的分数 Brown 运动加上一个绝对连续轨道的随机过程. 下文中, 这个分解公式对证明 $B^{H,K}$ 的小球常数存在性起到重要的作用. 文献 [7] 研究了 $B^{H,K}$ 的几乎处处 p 变差并研究了 H 和 K 的参数估计. 为了行文方便, 引用如下文献 [4] 中的 Chung 重对数律: 存在仅依赖于 H 和 K 的正的常数 $c_{1,1}$ 使得对任意 $s_0 \in \mathbb{R}_+$, 有

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq h} \frac{(\log \log(h^{-1}))^{HK}}{h^{HK}} |B_0^{H,K}(s_0 + t) - B_0^{H,K}(s_0)| = c_{1,1} \quad \text{a.s.} \quad (1.3)$$

本文研究 $B^{H,K}$ 的 Lévy 连续模定理和 Csörgő-Révész 不可微模定理. 结果如下:

定理 1.1 令 $H \in (0, 1)$ 和 $K \in (0, 1]$ 是两个常数. 设 $B_0^{H,K} = \{B_0^{H,K}(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上指标为 H 和 K 的双分数 Brown 运动, 则下列叙述成立:

(i) (整体连续模) 存在仅依赖于 H 和 K 的正的常数 $c_{1,2}$ 使得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq s \leq 1-h} \sup_{0 \leq t \leq h} \frac{|B_0^{H,K}(s+t) - B_0^{H,K}(s)|}{h^{HK}(\log(h^{-1}))^{1/2}} = c_{1,2} \quad \text{a.s.}; \quad (1.4)$$

(ii) (局部连续模, LIL) 存在仅依赖于 H 和 K 的正的常数 $c_{1,3}$ 使得对任意 $s_0 \in \mathbb{R}_+$, 有

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq h} \frac{|B_0^{H,K}(s_0+t) - B_0^{H,K}(s_0)|}{h^{HK}(\log \log(h^{-1}))^{1/2}} = c_{1,3} \quad \text{a.s.}; \quad (1.5)$$

(iii) (不可微模) 存在仅依赖于 H 和 K 的正的常数 $c_{1,4}$ 使得

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \inf_{0 \leq s \leq 1-h} \sup_{0 \leq t \leq h} \frac{(\log(h^{-1}))^{HK}}{h^{HK}} |B_0^{H,K}(s+t) - B_0^{H,K}(s)| = c_{1,4} \quad \text{a.s.} \quad (1.6)$$

注 1.1 (i) 对比 (1.4) 和 (1.5), 后者表明对任意给定的 s_0 , $B_0^{H,K}$ 的 (局部) 连续模是 $h^{HK}(\log \log(h^{-1}))^{1/2}$; 前者表明 $B_0^{H,K}$ 的 (整体) 连续模是 $h^{HK}(\log(h^{-1}))^{1/2}$.

(ii) 从后文中可以看到, (1.4) 中的常数满足 $c_{1,2} \in [\sqrt{2c_{3,3}}, 2^{1-K/2}]$, 其中 $c_{3,3}$ 定义在 (3.5) 中.

(iii) (1.6) 中的常数 $c_{1,4} = c_{2,2}^{HK}$, 其中 $c_{2,2}$ 是 Hurst 参数为 HK 的分数 Brown 运动的小球常数 (参见注 2.1). 因此, 由文献 [8] 知, (1.6) 中的常数 $c_{1,4}$ 有下面的解析表示:

$$c_{1,4} = \left(- \inf_{\varepsilon > 0} \varepsilon^{1/(HK)} \log \mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} |W_{H,K}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{a_{HK}} \right\} \right)^{HK}, \quad (1.7)$$

其中

$$a_{HK} = \Gamma\left(HK + \frac{1}{2}\right) \left((2HK)^{-1} + \int_{-\infty}^0 ((1-s)^{HK-1/2} - (-s)^{HK-1/2})^2 ds \right)^{-1/2},$$

$$W_{H,K}(t) = \frac{1}{\Gamma(HK + 1/2)} \int_0^t (t-s)^{HK-1/2} dB(s),$$

这里 $B(t)$ 是 Brown 运动. 对 $HK = 1/2$ 的情形, 由文献 [9, 10] 知, $c_{1,4} = \pi/\sqrt{8}$ 和 $a_{HK} = 1$. 对 $0 < HK < 1/2$ 的情形, 由文献 [11] 知,

$$\frac{0.08}{\sqrt{2HK}} \leq c_{1,4} \leq \frac{10}{\sqrt{2HK}}. \quad (1.8)$$

(iv) 由于小球常数存在, 利用 Borel-Cantelli 引理, 可以证明 Chung 重对数律, 从而, $c_{1,1} = c_{1,4}$.

(v) (1.6) 意味着样本函数 $t \mapsto B_0^{H,K}(t)$ 是几乎处处不可微的. 同时, 它表明 $B_0^{H,K}$ 的样本函数的粗糙度是 $f(h) := (\log(h^{-1}))^{HK}/h^{HK}$. 由此, 通常称函数 $f(h)$ 是 $B_0^{H,K}$ 的不可微模. 对 $H = 1/2$ 和 $K = 1$ (即 Brown 运动) 情形, (1.6) 是在 $\lim$ (极限) 意义下成立 (参见文献 [9]). 自然地, 对 $H \neq 1/2$ 或 $K \neq 1$ 情形, 也希望 (1.6) 是在 $\lim$ 意义下成立, 但我们的证明方法不能证明 (1.6) 在 $\lim$ 意义下成立. 在此, 我们作为一个开放的问题留待解决.

Brown 运动 (即 $H = 1/2$ 和 $K = 1$ 情形) 的整体连续模 (参见 (1.4)) 是由文献 [12] 证明的 (参见文献 [10, 第 26–28 页]). Brown 运动的局部连续模 (参见 (1.5)) 是由文献 [12, 13] 证明的. Brown 运动的不可微模 (参见 (1.6)) 是由文献 [9] 证明的. 并且知道 $c_{1,1} = c_{1,4} = \pi/\sqrt{8}$, $c_{1,2} = c_{1,3} = \sqrt{2}$. 由于这些开创性的工作, Gauss 过程 (场) 的 (整体和局部) 连续模及不可微模引起了概率论与随机过程领域的学者们的极大兴趣. 对于相关背景, 可参见文献 [14–18]. 下面回顾与本文密切相关的一些工作, 文献 [19] 证明了增量负相关的 l^p 值 Gauss 过程的整体连续模; 文献 [20] 证明了增量负相关的 l^∞ 值 Gauss 过程的整体连续模; 文献 [18] 证明了具有平稳增量的各向异性的 Gauss 随机场的整体和局部连续模. 尽管有如此多的一般结果, 但是由于双分数 Brown 运动不具有平稳增量性和增量负相关性, 因此, 上述的一般结果并不适用于双分数 Brown 运动.

对于 Gauss 过程或场的局部时, 也有一些关于整体和局部连续模的优雅的工作. 例如, 文献 [21–23] 研究了 Brown 运动局部时的整体连续模; 文献 [24] 研究了 Brown 运动局部时的局部连续模; 文献 [25] 得到了一般的具有平稳增量 Gauss 过程的局部时的整体和局部连续模的上界.

然而, 与 Gauss 过程的整体和局部连续模的深入研究相比较, 对 Gauss 过程的不可微模一直以来尚没有系统地研究. 依本文作者的观点看, 是由 Gauss 过程样本轨道的相依结构太复杂且缺少可用的 0-1 律或难以证明小球常数的存在性等原因引起的. 直到最近, 有一些进展. 文献 [26] 证明了分数 Brown 运动的不可微模. 但该文献中还没有关于自相似但不具有平稳增量的 Gauss 过程的不可微模定理. 文献 [27] 证明了关于随机过程 (不一定是 Gauss) 的不可微模的一个下界. 应用该文献中的定理 2.1 可以得到 $B_0^{H,K}$ 的不可微模的下界, 但上界是未知的.

本文的另一个动机是研究双分数 Brown 运动的最大值局部时的一致 Hölder 条件. 它的上界由文献 [4] 证明, 然而, 正如文献 [4, 注 4.2] 所陈述的, 关于它的下界的证明仍旧是未知的, 且对这个问题的解决关键是 $B^{H,K}$ 的不可微模. 本文利用定理 1.1(iii), 证明双分数 Brown 运动的最大值局部时的一致 Hölder 条件的下界, 从而得到了确切的一致 Hölder 条件, 对文献 [4] 中提出的问题给出正面的回答.

本文中, 记 c 是一个通用的正的有限常数, 它的每一次出现可表示不同的数. 在第 i 节中更加具体的正的有限常数记作 $c_{i,1}, c_{i,2}, \dots$.

2 小球常数的存在性

正如前面提到的, 小球常数的存在性意味着不可微模的常数存在. 文献 [8] (或文献 [28, 定理 6.9])

证明了分数 Brown 运动 $B_0^H := B_0^{H,1}$ 的小球常数存在性. 该文献证得: 存在仅依赖于 H 的常数 $c_{2,1}$ 使得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1/H} \log P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} |B_0^H(t)| \leq \varepsilon \right\} = -c_{2,1}. \quad (2.1)$$

文献 [4] 证明了如下双分数 Brown 运动 $B_0^{H,K}$ 的小球概率估计:

$$\begin{aligned} -\infty &< \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1/(HK)} \log P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} |B_0^{H,K}(t)| \leq \varepsilon \right\} \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1/(HK)} \log P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} |B_0^{H,K}(t)| \leq \varepsilon \right\} \\ &< 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

本节证明下面关于 $B_0^{H,K}$ 的小球常数存在的命题, 它意味着 (2.2) 的极限存在.

命题 2.1 令 $H \in (0, 1)$ 和 $K \in (0, 1]$ 是两个常数. 设 $B_0^{H,K} = \{B_0^{H,K}(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上指标为 H 和 K 的双分数 Brown 运动, 则存在仅依赖于 H 和 K 的正的常数 $c_{2,2}$ 使得对任意 $s_0 \in \mathbb{R}_+$, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1/(HK)} \log P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} |B_0^{H,K}(s_0 + t) - B_0^{H,K}(s_0)| \leq \varepsilon \right\} = -c_{2,2}. \quad (2.3)$$

注 2.1 由命题 2.1 的证明知, $c_{2,2}$ 是 Hurst 参数为 HK 的分数 Brown 运动的小球常数, 其表达式参见注 1.1(3).

为了证明命题 2.1, 需要如下两个引理. 第一个引理来自文献 [29] (或文献 [30]), 第二个引理来自文献 [31] (或文献 [28, 定理 3.7]).

引理 2.1 设 $X = \{X_t, t \in T\}$ 是中心化 Gauss 过程. 对 $\varepsilon > 0$, 记 $N(T, d; \varepsilon)$ 是在 (伪) 度量 $d(s, t) = (E[|X_s - X_t|^2])^{1/2}$ 下半径为 ε 、覆盖为 T 的最小球覆盖数. 假定存在 $\mathbb{R}_+$ 上非负函数 ψ 使得 $N(T, d; \varepsilon) \leq \psi(\varepsilon)$ 且存在常数 $1 < c_{2,3} \leq c_{2,4} < \infty$ 使得 $c_{2,3}\psi(\varepsilon) \leq \psi(\varepsilon/2) \leq c_{2,4}\psi(\varepsilon)$, 那么对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$P \left\{ \sup_{s, t \in T} |X_s - X_t| \leq \varepsilon \right\} \geq \exp(-c_{2,5}\psi(\varepsilon)). \quad (2.4)$$

引理 2.2 设 X 和 Y 是具有范数 $\|\cdot\|$ 的可分 Banach 空间 E 中的两个中心化的 Gauss 随机向量. 若

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\tau \log P\{\|X\| \leq \varepsilon\} = -c_{2,6}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\tau \log P\{\|Y\| \leq \varepsilon\} = 0,$$

其中 $0 < \tau < \infty$ 和 $0 < c_{2,6} < \infty$, 则有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\tau \log P\{\|X + Y\| \leq \varepsilon\} = -c_{2,6}. \quad (2.5)$$

命题 2.1 的证明 我们利用文献 [6] 中的双分数 Brown 运动的分解公式来证明我们的结果. 设 $B_0^{H,K} = \{B_0^{H,K}(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ 是 Hurst 参数为 HK 的分数 Brown 运动, $W = \{W(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ 是标准 Brown 运动且与 $B_0^{H,K}$ 相互独立. 对 $K \in (0, 1)$, 定义 Gauss 过程 $X^K = \{X^K(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ 如下:

$$X^K(t) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t}) \lambda^{-\frac{1+K}{2}} dW(\lambda),$$

则 X^K 是中心化 Gauss 过程且其协方差函数是

$$\begin{aligned} C^K(t, s) &:= \mathbb{E}[X^K(t)X^K(s)] = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\lambda s})\lambda^{-1-K}d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(1-K)}{K}[t^K + s^K - (t+s)^K], \end{aligned}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数. 由 (1.1) 知,

$$R^{H,K}(s, t) = \frac{1}{2^K}[(s^{2H} + t^{2H})^K - s^{2HK} - t^{2HK}] + \frac{1}{2^K}[s^{2HK} + t^{2HK} - |s - t|^{2HK}].$$

因此, 有 (参见文献 [6])

$$\{B_0^{H,K}(t), t \in \mathbb{R}_+\} \stackrel{d}{=} \left\{ 2^{\frac{1-K}{2}} B_0^{HK}(t) + \sqrt{\frac{K2^{-K}}{\Gamma(1-K)}} X^K(t^{2H}), t \in \mathbb{R}_+ \right\}. \quad (2.6)$$

这意味着 $B_0^{H,K}$ 事实上等于一个 Hurst 参数为 HK 的分数 Brown 运动再加上 W^K .

这样, 由引理 2.2 和 (2.1) 知, 只需证明对任意 $s_0 \in \mathbb{R}_+$, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1/(HK)} \log \mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} |X^K((s_0 + t)^{2H}) - X^K(s_0^{2H})| \leq \varepsilon \right\} = 0. \quad (2.7)$$

为了证明 (2.7), 将对 $Z^K(\cdot) := X^K((s_0 + \cdot)^{2H}) - X^K(s_0^{2H})$ 和 $T = [0, 1]$ 应用引理 2.1. 下面分 $K \in (0, 1/2]$ 和 $K \in (1/2, 1]$ 两种情形来证明.

首先考虑 $K \in (0, 1/2]$ 情形. 对 $s, t \in [0, 1]$ 及 $s \leq t$, 令 $d_{H,K}^2(s, t) := \mathbb{E}[(Z^K(s) - Z^K(t))^2]$, 则有

$$\begin{aligned} d_{H,K}^2(s, t) &= \mathbb{E}[(X^K((s_0 + s)^{2H}) - X^K((s_0 + t)^{2H}))^2] \\ &= \mathbb{E}[(X^K((s_0 + s)^{2H}))^2] + \mathbb{E}[(X^K((s_0 + t)^{2H}))^2] - 2\mathbb{E}[X^K((s_0 + s)^{2H})X^K((s_0 + t)^{2H})] \\ &= 2((s_0 + s)^{2H} + (s_0 + t)^{2H})^K - 2^K(s_0 + s)^{2HK} - 2^K(s_0 + t)^{2HK} \\ &\leq 2^K((s_0 + t)^{2HK} - (s_0 + s)^{2HK}) \\ &\leq c_{2,7}((s_0 + t)^H - (s_0 + s)^H)^{2K}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

这里为了得到最后的不等式, 利用了下面的不等式: 对任意 $u \in [0, 1]$, 有

$$1 - u^{2K} \leq 4(1 - u)^{2K}. \quad (2.9)$$

这样, 如果选取 $u = (\frac{s_0 + s}{s_0 + t})^H$, 那么 (2.8) 中的最后的不等式成立. 下面验证 (2.9). 如果 $u \in [0, 1/2]$, 则有 $1 - u^{2K} \leq 1$ 和 $(1 - u)^{2K} \geq 2^{-2K}$, 这意味着 (2.9) 成立. 当 $u \in (1/2, 1]$ 情形时, 令 $f(u) = 4(1 - u)^{2K} - 1 + u^{2K}$. 由于 $2K - 1 \leq 0$, 因此有 $u^{2K-1} \leq 2^{1-2K}$ 和 $(1 - u)^{2K-1} \geq 1$, 从而有

$$f'(u) = -8K(1 - u)^{2K-1} + 2Ku^{2K-1} < 0.$$

因此, 对任意 $u \in (1/2, 1]$, 有 $f(u) \geq f(1) = 0$. 这样验证了 (2.9) 成立.

在 (2.8) 中令 $s = 0$, 有 $d_{H,K}(0, t) \leq c_{2,7}^{1/2}((s_0 + t)^H - s_0^H)^K$. 对 (小的) $\varepsilon \in (0, 1)$, 以递推地方式定义 $0 = t_{-1} < t_0 < t_1 < \cdots$: 定义 $t_0 = ((c_{2,7}^{-1/2}\varepsilon)^{1/K} + s_0^H)^{1/H} - s_0$ 使得 $d_{H,K}(0, t_0) \leq \varepsilon$, 再定义 t_i , $i = 1, 2, \dots$, 使得

$$c_{2,7}^{1/2}((s_0 + t_i)^H - (s_0 + t_{i-1})^H)^K = \varepsilon.$$

令 $N(\varepsilon) = \min\{n : t_n > 1\}$, 则对 $1 \leq i \leq N(\varepsilon)$, 有

$$(s_0 + t_i)^H - (s_0 + t_{i-1})^H = c_{2,7}^{-1/(2K)} \varepsilon^{1/K}.$$

这样, 有

$$(s_0 + t_{N(\varepsilon)-1})^H = c_{2,7}^{-1/(2K)} \varepsilon^{1/K} N(\varepsilon) + s_0^H \leq (s_0 + 1)^H.$$

因此, 得到

$$N(\varepsilon) \leq \frac{c_{2,7}^{1/(2K)} ((s_0 + 1)^H - s_0^H)}{\varepsilon^{1/K}}.$$

把 t_i ($0 \leq i \leq N(\varepsilon) - 1$) 作为中心点, 得到 $N(T, d_{H,K}; \varepsilon) \leq N(\varepsilon) \leq c_{2,7}^{1/(2K)} ((s_0 + 1)^H - s_0^H) / \varepsilon^{1/K}$. 这样, 在引理 2.1 中应用 $\psi(\varepsilon) = c_{2,7}^{1/(2K)} ((s_0 + 1)^H - s_0^H) / \varepsilon^{1/K}$, 可得

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |X^K((s_0 + t)^{2H}) - X^K(s_0^{2H})| \leq \varepsilon\right\} \geq \exp\left(-\frac{c_{2,8}}{\varepsilon^{1/K}}\right). \quad (2.10)$$

因此, 由 (2.10) 知, 对 $K \in (0, 1/2]$ 情形, (2.7) 成立.

其次考虑 $K \in (1/2, 1]$ 情形. 此情形下的证明与上面完全类似. 此时, 不同的地方是要把 (2.8) 的最后不等式换成如下: 对任意 $s, t \in [0, 1]$ 和 $s \leq t$, 有

$$d_{H,K}^2(s, t) \leq c_{2,9}((s_0 + t)^{2K} - (s_0 + s)^{2K})^H. \quad (2.11)$$

这里, 为了得到这个不等式, 使用了与 (2.8) 最后不等式完全相同的证明, 只需将该证明过程中的 H 和 $2K$ 分别换成 $2K$ 和 H 即可.

在 (2.11) 中令 $s = 0$, 则有 $d_{H,K}(0, t) \leq c_{2,9}^{1/2} ((s_0 + t)^{2K} - s_0^{2K})^{H/2}$. 对 (小的) $\varepsilon \in (0, 1)$, 以递推地方式定义 $0 = t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots$: 定义 $t_0 = ((c_{2,9}^{-1/2} \varepsilon)^{2/H} + s_0^{2K})^{1/(2K)} - s_0$ 使得 $d_{H,K}(0, t_0) \leq \varepsilon$, 再定义 $t_i, i = 1, 2, \dots$, 使得

$$c_{2,9}^{1/2} ((s_0 + t_i)^{2K} - (s_0 + t_{i-1})^{2K})^{H/2} = \varepsilon.$$

令 $N(\varepsilon) = \min\{n : t_n > 1\}$, 则对 $1 \leq i \leq N(\varepsilon)$, 有

$$(s_0 + t_i)^{2K} - (s_0 + t_{i-1})^{2K} = c_{2,9}^{-1/H} \varepsilon^{2/H}.$$

这样, 有

$$(s_0 + t_{N(\varepsilon)-1})^{2K} = c_{2,9}^{-1/H} \varepsilon^{2/H} N(\varepsilon) + s_0^{2K} \leq (s_0 + 1)^{2K}.$$

因此, 得到

$$N(\varepsilon) \leq \frac{c_{2,9}^{1/H} ((s_0 + 1)^{2K} - s_0^{2K})}{\varepsilon^{2/H}}.$$

把 t_i ($0 \leq i \leq N(\varepsilon) - 1$) 作为中心点, 得到 $N(T, d_{H,K}; \varepsilon) \leq N(\varepsilon) \leq c_{2,9}^{1/H} ((s_0 + 1)^{2K} - s_0^{2K}) / \varepsilon^{2/H}$. 这样, 在引理 2.1 中应用 $\psi(\varepsilon) = c_{2,9}^{1/(2H)} ((s_0 + 1)^K - s_0^K) / \varepsilon^{1/H}$, 可得

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |X^K((s_0 + t)^{2H}) - X^K(s_0^{2H})| \leq \varepsilon\right\} \geq \exp\left(-\frac{c_{2,10}}{\varepsilon^{2/H}}\right). \quad (2.12)$$

这样, 有

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1/(HK)} \log P\left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |X^K((s_0 + t)^{2H}) - X^K(s_0^{2H})| \leq \varepsilon\right\} \geq 0. \quad (2.13)$$

这里, 为了得到 (2.13), 需要注意到对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$, $H \in (0, 1]$ 和 $K \in (1/2, 1]$, 有

$$\varepsilon^{1/(HK)} > \varepsilon^{2/H},$$

再利用 (2.12) 即可. 因此, 由 (2.13) 知, 对 $K \in (1/2, 1]$ 情形, (2.7) 成立. 命题 2.1 证毕. $\square$

3 定理 1.1 的证明

为了证明定理 1.1, 需要一些引理. 首先是下面 $B_0^{H,K}$ 的 Fernique 型不等式.

引理 3.1 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正的常数 $c_{3,1}$ 使得对任意 $T \geq 0$, $a > 0$ 和 $x \geq x_0 > 0$ 对某一个 $x_0 > 0$, 有

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{0 \leq s \leq a} |B_0^{H,K}(t+s) - B_0^{H,K}(t)| \geq xa^{HK}\right\} \leq c_{3,1} \left(\frac{T}{a} + 1\right) e^{-\frac{x^2}{2^{2-K} + \varepsilon}}. \quad (3.1)$$

证明 由文献 [2] 知, 对任意 $s, t \in \mathbb{R}_+$, 有

$$2^{-K}|t-s|^{2HK} \leq \mathbb{E}[(B_0^{H,K}(t) - B_0^{H,K}(s))^2] \leq 2^{1-K}|t-s|^{2HK}. \quad (3.2)$$

因此, 由关于正态分布函数 $\Phi(x)$ 的基本不等式: 对任意 $x > 0$, 有 $1 - \Phi(x) < (1/x)e^{-x^2/2}$, 可得对任意 $t \in \mathbb{R}_+$, $h > 0$ 及 $x \geq x^* > 0$ 对某一个 $x^* > 0$, 有

$$\mathbb{P}\{|B_0^{H,K}(t+h) - B_0^{H,K}(t)| \geq xh^{HK}\} \leq c_{3,2} e^{-\frac{x^2}{2^{2-K}}}.$$

这样, 由文献 [32, 定理 2.1] (取 $\sigma_1(x) = \sqrt{2^{K-1}}x^{HK}$ 和 $\sigma_2(\cdot) \equiv 0$) 知, (3.1) 成立. $\square$

下面的引理来自文献 [33, 定理 1.1]. 它是 Gauss 相关不等式, 对 $B_0^{H,K}$ 的不可微模的上界的证明起着重要的作用.

引理 3.2 设 $\mathbf{X}^T = (\mathbf{X}_1^T, \mathbf{X}_2^T)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上均值为 $\mathbf{0}$ 的 Gauss 随机向量, 其中 $\mathbf{X}_1 = (X_1, \dots, X_k)^T$, $\mathbf{X}_2 = (X_{k+1}, \dots, X_n)^T$, $1 \leq k < n$, 则对任意 $x > 0$, 有

$$\mathbb{P}(\|\mathbf{X}\|_\infty \leq x) \leq \phi \mathbb{P}(\|\mathbf{X}_1\|_\infty \leq x) \mathbb{P}(\|\mathbf{X}_2\|_\infty \leq x), \quad (3.3)$$

其中 $\|\mathbf{x}\|_\infty$ 表示向量 $\mathbf{x}$ 的最大范数,

$$\phi = \left(\frac{\det(\mathbb{E}[\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1^T]) \det(\mathbb{E}[\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_2^T])}{\det(\mathbb{E}[\mathbf{X} \mathbf{X}^T])} \right)^{1/2}. \quad (3.4)$$

这里及下文中, $\det(A)$ 表示方阵 A 的行列式.

下面的引理来自文献 [4, 命题 2.1]. 它是 $B_0^{H,K}$ 的强局部非确定性, 对 $B_0^{H,K}$ 的整体连续模的证明起着重要的作用.

引理 3.3 令 a 和 r_0 是两个正实数, 则对任意的 $t \in [a, 1]$ 和 $0 < r \leq \min\{t, r_0\}$, 有下式成立:

$$\text{Var}(B_0^{H,K}(t) | B_0^{H,K}(s) : s \in [a, 1], r \leq |s-t| \leq r_0) \geq c_{3,3} r^{2HK}. \quad (3.5)$$

定理 1.1 的证明 由于 (1.5) 的证明完全类似于 (1.6). 因此, 仅证明 (1.4) 和 (1.6).

首先证明 (1.4). 为了简化记号, 令

$$\varphi(h) := h^{HK}(\log(h^{-1}))^{1/2}, \quad \Theta_h(B_0^{H,K}) := \sup_{0 \leq s \leq 1-h} \sup_{0 \leq t \leq h} \frac{|B_0^{H,K}(s+t) - B_0^{H,K}(s)|}{\varphi(h)}.$$

我们声明下面二式成立:

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \Theta_h(B_0^{H,K}) \leq c_{3,4} \quad \text{a.s.}, \quad (3.6)$$

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \Theta_h(B_0^{H,K}) \geq c_{3,5} \quad \text{a.s.}, \quad (3.7)$$

其中 $c_{3,4} = 2^{1-K/2}$, $c_{3,5} = \sqrt{2c_{3,3}}$, 这里 $c_{3,3}$ 由 (3.5) 给定. 这样, 由 (3.6) 和 (3.7) 及文献 [15, 引理 7.1.1] 知, (1.4) 成立且 $c_{1,2} \in [\sqrt{2c_{3,3}}, 2^{1-K/2}]$.

因此, 剩下的仅需证明 (3.6) 和 (3.7). 首先证明 (3.6). 利用引理 3.1 和通常的 Borel-Cantelli 引理, 可得 (3.6). 这里不给出证明细节, 将它留给有兴趣的读者.

其次证明 (3.7). 令 $1 < \theta < 2$ 是常数. 对 $n \geq 1$, 令 $h_n = \theta^{-(n+1)}$. 由于对任意 $0 < h < 1$, 总存在整数 $n \geq 2$ 使得 $h_n < h \leq h_{n-1}$, 又由于 $\varphi(h)$ 是不减的, 因此有

$$\begin{aligned} \liminf_{h \rightarrow 0} \Theta_h(B_0^{H,K}) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{h_n < h \leq h_{n-1}} \Theta_h(B_0^{H,K}) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq \lfloor \theta^n/2 \rfloor} \frac{|B_0^{H,K}((\theta^n - i + 1)\theta^{-n}) - B_0^{H,K}((\theta^n - i)\theta^{-n})|}{\varphi(h_{n-1})} \\ &=: \liminf_{n \rightarrow \infty} J_n. \end{aligned} \quad (3.8)$$

这里及下文中, 记号 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示取整数部分.

对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$, 有

$$\begin{aligned} P(J_n \leq (1 - \varepsilon)c_{3,5}) &= P\left(\left\{ \frac{|B_0^{H,K}(1) - B_0^{H,K}(1 - \theta^{-n})|}{\varphi(h_{n-1})} \leq (1 - \varepsilon)c_{3,5} \right\} \right. \\ &\quad \left. \cap \left\{ \max_{2 \leq i \leq \lfloor \theta^n/2 \rfloor} \frac{|B_0^{H,K}((\theta^n - i + 1)\theta^{-n}) - B_0^{H,K}((\theta^n - i)\theta^{-n})|}{\varphi(h_{n-1})} \leq (1 - \varepsilon)c_{3,5} \right\} \right) \\ &=: P(B_n) \cdot P(A_n | B_n), \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中 A_n 和 B_n 是如下两个事件:

$$\begin{aligned} A_n &:= \left\{ \frac{|B_0^{H,K}(1) - B_0^{H,K}(1 - \theta^{-n})|}{\varphi(h_{n-1})} \leq (1 - \varepsilon)c_{3,5} \right\}, \\ B_n &:= \left\{ \max_{2 \leq i \leq \lfloor \theta^n/2 \rfloor} \frac{|B_0^{H,K}((\theta^n - i + 1)\theta^{-n}) - B_0^{H,K}((\theta^n - i)\theta^{-n})|}{\varphi(h_{n-1})} \leq (1 - \varepsilon)c_{3,5} \right\}. \end{aligned}$$

由条件期望的光滑性和引理 3.3 (取 $r = \theta^{-n}$ 和 $I = (1/2, 1]$), 有

$$\begin{aligned} &\text{Var}\left(B_0^{H,K}(1) - B_0^{H,K}(1 - \theta^{-n}) \mid B_0^{H,K}(1 - \theta^{-n}), B_0^{H,K}((\theta^n - i)\theta^{-n}), 2 \leq i \leq \left\lfloor \frac{\theta^n}{2} \right\rfloor\right) \\ &= \text{Var}\left(B_0^{H,K}(1) \mid B_0^{H,K}(1 - \theta^{-n}), B_0^{H,K}((\theta^n - i)\theta^{-n}), 2 \leq i \leq \left\lfloor \frac{\theta^n}{2} \right\rfloor\right) \\ &\geq c_{3,3}\theta^{-2HKn}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

这样, 由于 $c_{3,5} = \sqrt{2c_{3,3}}$, 条件期望的光滑性, 以及 Gauss 随机变量的条件分布仍旧是 Gauss 的, 因此,

$$P(A_n | B_n) \leq P(N(0, 1) \leq (1 - \varepsilon)\sqrt{2}(\log(h_{n-1}^{-1}))^{1/2}),$$

其中 $N(0, 1)$ 是标准正态随机变量. 由于对任意 $x > 0$, 有 $P(N(0, 1) > x) \geq (2\pi)^{-1/2}(1-x^{-2})x^{-1}e^{-x^2/2}$, 又 $1-x \leq e^{-x}$, 因此,

$$P(A_n | B_n) \leq 1 - P(N(0, 1) > (1 - \varepsilon)\sqrt{2}(\log(h_{n-1}^{-1}))^{1/2}) \leq 1 - \theta^{-(1-\varepsilon/2)^2 n} \leq \exp(-\theta^{-(1-\varepsilon/2)^2 n}). \quad (3.11)$$

因此, 由 (3.9) 和 (3.11), 得到

$$P(J_n \leq (1 - \varepsilon)c_{3,5}) \leq \exp(-\theta^{-(1-\varepsilon/2)^2 n}) \cdot P(B_n).$$

重复上述讨论, 可得

$$P(J_n \leq (1 - \varepsilon)c_{3,5}) \leq \exp\left(-\left\lfloor \frac{\theta^n}{2} \right\rfloor \cdot \theta^{-(1-\varepsilon/2)^2 n}\right) \leq \exp(-c\theta^{(1-(1-\varepsilon/2)^2)n}).$$

这样, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} P(J_n \leq (1 - \varepsilon)c_{3,5}) < \infty$. 由 Borel-Cantelli 引理, 得到

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} J_n \geq (1 - \varepsilon)c_{3,5} \quad \text{a.s.} \quad (3.12)$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$. 由 (3.8) 和 (3.12) 知, (3.7) 成立. (1.4) 证毕.

下面证明 (1.6). 为了简化记号, 令

$$\gamma(h) := \frac{(\log(h^{-1}))^{HK}}{h^{HK}}, \quad A_h(s) := \sup_{0 \leq t \leq h} |B_0^{H,K}(s+t) - B_0^{H,K}(s)|, \quad I(h) := \inf_{0 \leq s \leq 1-h} A_h(s).$$

这样, 为证 (1.6), 只需证明下面二式:

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \gamma(h)I(h) \geq c_{2,2}^{HK} \quad \text{a.s.}, \quad (3.13)$$

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \gamma(h)I(h) \leq c_{2,2}^{HK} \quad \text{a.s.} \quad (3.14)$$

首先证明 (3.13). 令 $1 < \theta < 2$ 是常数. 对 $n \geq 1$, 令 $h_n = \theta^{-n}$. 定义

$$s_i = s_i(n) = ih_n(\log(h_n^{-1}))^{-3}, \quad i = 0, 1, \dots, \\ \rho_n := \lfloor h_n^{-1}(\log(h_n^{-1}))^3 \rfloor.$$

令 $0 < \xi < c_{2,2}$ 是常数. 考虑事件

$$E_n := \left\{ \gamma(h_n) \min_{0 \leq i \leq \rho_n} A_{h_n}(s_i) \leq \xi^{HK} \right\}.$$

由 $B_0^{H,K}$ 的自相似性和命题 2.1, 可得

$$P\{E_n\} \leq (\rho_n + 1) \exp\left(-\frac{c_{2,2}}{\xi} \log(h_n^{-1})\right) \leq c_{3,6} n^3 \theta^{-(c_{2,2}/\xi-1)n}.$$

由于 $c_{2,2}/\xi > 1$, 因此, $\sum_{n=1}^{\infty} P\{E_n\} < \infty$. 由 Borel-Cantelli 引理, 得到

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma(h_n) \min_{0 \leq i \leq \rho_n} A_{h_n}(s_i) \geq \xi^{HK} \quad \text{a.s.} \quad (3.15)$$

注意到

$$\begin{aligned}
 \liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma(h_n) I(h_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma(h_n) \min_{0 \leq i \leq \rho_n} \inf_{s_i \leq s \leq s_{i+1}} A_{h_n}(s) \\
 &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma(h_n) \min_{0 \leq i \leq \rho_n} A_{h_n}(s_i) - 2 \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma(h_n) \max_{0 \leq i \leq \rho_n} \sup_{s_i \leq s \leq s_{i+1}} |B_0^{H,K}(s) - B_0^{H,K}(s_i)| \\
 &=: L_1 - L_2.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

由引理 3.1 和通常 Borel-Cantelli 引理的讨论, 可得

$$L_3 := \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma(h_n) \sup_{0 \leq s \leq 1} \sup_{0 \leq t \leq \frac{1}{\rho_n}} |B_0^{H,K}(s+t) - B_0^{H,K}(s)| = 0 \quad \text{a.s.}$$

由于 $L_2 \leq 2L_3$, 因此,

$$L_2 = 0 \quad \text{a.s.} \tag{3.17}$$

由 (3.15)–(3.17), 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma(h_n) I(h_n) \geq \xi^{HK} \quad \text{a.s.} \tag{3.18}$$

这样, 由 (3.18) 和通常的单调性, 得到

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \gamma(h) I(h) \geq \xi^{HK} \quad \text{a.s.} \tag{3.19}$$

因此, 在 (3.19) 中令 $\xi \uparrow c_{2,2}$, 有 (3.13) 成立.

其次证明 (3.14). 为了证明 (3.14), 我们利用文献 [34] 中的上极限随机分形理论. 对 $n \geq 1$, 令 $h_n = 2^{-n}$, $\vartheta := \vartheta_n = |\log(h_n)|^{-2}$, $\beta_n := \lfloor 1/(h_n \vartheta) \rfloor$. 令 $\mathcal{F}_n := \{1, \dots, \beta_n\}$, 及

$$t_{i,n} = ih_n \vartheta, \quad i \in \mathcal{F}_n.$$

给定 $\varepsilon > 0$. 对 $i \in \mathcal{F}_n$, 定义 Bernoulli 随机变量 $\chi_{i,n}$, 其值是 1, 如果下面的事件成立:

$$\gamma(h_n) \max_{1 \leq k \leq \vartheta^{-1}} |B_0^{H,K}(t_{i,n} + kh_n \vartheta) - B_0^{H,K}(t_{i,n})| \leq (1 + \varepsilon) c_{2,2}^{HK}, \tag{3.20}$$

否则, 其值是 0. 令 $S_n := \sum_{i=1}^{\beta_n} \chi_{i,n}$, 它是前 β_n 步中 (3.20) 成立的 i 的个数.

令 $p_{i,n} := \mathbb{E}[\chi_{i,n}]$. 由 (2.3), 可得

$$\begin{aligned}
 p_{i,n} &= \mathbb{P}(\chi_{i,n} = 1) \\
 &\geq \mathbb{P}(\gamma(h_n) A_{h_n}(t_{i,n}) \leq (1 + \varepsilon) c_{2,2}^{HK}) \\
 &= \exp((1 + o(1))(\log(h_n))(1 + \varepsilon)^{-1/(HK)}), \quad \text{当 } n \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

下面希望证明 $S_n > 0$ 对无穷多个 n 成立. 为此, 首先估计

$$\text{Var}(S_n) = \sum_{i,j \in \mathcal{F}_n} \text{Cov}(\chi_{i,n}, \chi_{j,n}) = \sum_{i=1}^{\beta_n} \text{Cov}(\chi_{i,n}, \chi_{i,n}) + 2 \sum_{i=1}^{\beta_n} \sum_{j=i+1}^{\beta_n} \text{Cov}(\chi_{i,n}, \chi_{j,n}). \tag{3.22}$$

令 $\mu > 2/(1 - HK)$ 是常数及 $\nu_n = |\log(h_n)|^{\mu+1}$, $n \geq 1$. 我们声明: 对任意 $\delta > 0$, 当 $j > i \geq \nu_n$ 和 $j - i \geq \nu_n$ 时, 有

$$\mathbb{P}(\chi_{i,n} = 1, \chi_{j,n} = 1) \leq (1 + \delta) \mathbb{P}(\chi_{i,n} = 1) \mathbb{P}(\chi_{j,n} = 1). \tag{3.23}$$

这样, 我们先来完成 (3.14) 的证明, (3.23) 的证明将在后面进行.

由 (3.23) 知, 对任意 $i, j \in \mathcal{F}_n$, $j > i \geq \nu_n$, $j - i \geq \nu_n$, 有

$$\text{Cov}(\chi_{i,n}, \chi_{j,n}) \leq \delta \mathbb{E}[\chi_{i,n}] \mathbb{E}[\chi_{j,n}].$$

这样, 可得

$$\text{Var}(S_n) \leq 2\delta \left(\sum_{i=1}^{\beta_n} p_{i,n} \right)^2 + \sum_{i=1}^{\beta_n} \text{Cov}(\chi_{i,n}, \chi_{i,n}) + 2 \sum_{i=1}^{\nu_n} \sum_{j=i+1}^{\beta_n} \text{Cov}(\chi_{i,n}, \chi_{j,n}) + 2 \sum_{i=\nu_n+1}^{\beta_n} \sum_{j=i+1}^{i+\nu_n} \text{Cov}(\chi_{i,n}, \chi_{j,n}).$$

对右边的协方差, 利用下面的事实: $\text{Cov}(\chi_{i,n}, \chi_{j,n}) \leq \mathbb{E}[\chi_{i,n}] = p_{i,n}$, 得到

$$\text{Var}(S_n) \leq 2\delta \left(\sum_{i=1}^{\beta_n} p_{i,n} \right)^2 + 5\nu_n \sum_{i=1}^{\beta_n} p_{i,n}. \quad (3.24)$$

由 Paley-Zygmund 不等式 (参见文献 [35, 第 8 页]), 有

$$\mathbb{P}(S_n > 0) \geq \frac{(\mathbb{E}[S_n])^2}{\mathbb{E}[S_n^2]}.$$

这样, 由 (3.24) 和 $\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^{\beta_n} p_{i,n}$, 有

$$\mathbb{P}(S_n = 0) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{(\mathbb{E}[S_n])^2} \leq 2\delta + \frac{5\nu_n}{\mathbb{E}[S_n]}.$$

因此, 由 (3.21) 和 δ 的任意性, 有

$$\mathbb{P}(S_n = 0) \rightarrow 0, \quad \text{当 } n \rightarrow \infty.$$

由 Fatou 引理, 可得

$$\mathbb{P}(S_n > 0 \text{ i.o.}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n > 0) = 1.$$

这意味着

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma(h_n) \min_{i \in \mathcal{F}_n} \max_{1 \leq k \leq \vartheta^{-1}} |B_0^{H,K}(t_{i,n} + kh_n\vartheta) - B_0^{H,K}(t_{i,n})| \leq (1 + \varepsilon) c_{2,2}^{HK} \quad \text{a.s.} \quad (3.25)$$

从而, 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma(h_n) \inf_{0 \leq s \leq 1} \max_{1 \leq k \leq \vartheta^{-1}} |B_0^{H,K}(s + kh_n\vartheta) - B_0^{H,K}(s)| \leq (1 + \varepsilon) c_{2,2}^{HK} \quad \text{a.s.} \quad (3.26)$$

注意到

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma(h_n) I(h_n) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma(h_n) \inf_{0 \leq s \leq 1} \max_{1 \leq k \leq \vartheta^{-1}} \sup_{(k-1)\vartheta \leq u \leq k\vartheta} |B_0^{H,K}(s + uh_n) - B_0^{H,K}(s)| \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma(h_n) \inf_{0 \leq s \leq 1} \max_{1 \leq k \leq \vartheta^{-1}} |B_0^{H,K}(s + kh_n\vartheta) - B_0^{H,K}(s)| \\ &\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma(h_n) \sup_{0 \leq s \leq 1} \max_{1 \leq k \leq \vartheta^{-1}} \sup_{(k-1)\vartheta \leq u \leq k\vartheta} |B_0^{H,K}(s + uh_n) - B_0^{H,K}(s + kh_n\vartheta)| \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma(h_n) \inf_{0 \leq s \leq 1} \max_{1 \leq k \leq \vartheta^{-1}} |B_0^{H,K}(s + kh_n\vartheta) - B_0^{H,K}(s)| \end{aligned}$$

$$+ \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma(h_n) \sup_{0 \leq s \leq 2} \sup_{0 \leq t \leq h_n \vartheta} |B_0^{H,K}(s+t) - B_0^{H,K}(s)|. \quad (3.27)$$

由引理 3.1 及通常的 Borel-Cantelli 引理, 可得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma(h_n) \sup_{0 \leq s \leq 2} \sup_{0 \leq t \leq h_n \vartheta} |B_0^{H,K}(s+t) - B_0^{H,K}(s)| = 0 \quad \text{a.s.} \quad (3.28)$$

因此, 由 (3.26)–(3.28), (3.14) 成立.

剩下的只需证明 (3.23). 定义

$$u_{i,n} = i\vartheta, \quad i \in \mathcal{F}_n,$$

及 Gauss 过程 $Z_{i,n}^{H,K}$:

$$Z_{i,n}^{H,K}(t) = B_0^{H,K}(u_{i,n} + t) - B_0^{H,K}(u_{i,n}), \quad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

由 (1.1), 对 $i, j \in \mathcal{F}_n$ 和 $s, t \in [0, 1]$, 有

$$\mathbb{E}[Z_{i,n}^{H,K}(s)Z_{j,n}^{H,K}(t)] = 2^{-K}(C_{i,j,n}^{H,K}(s, t) + D_{i,j,n}^{H,K}(s, t)), \quad (3.29)$$

其中

$$\begin{aligned} C_{i,j,n}^{H,K}(s, t) &:= -|(u_{j,n} - u_{i,n}) + (t - s)|^{2HK} + |(u_{j,n} - u_{i,n}) - s|^{2HK} \\ &\quad + |(u_{j,n} - u_{i,n}) + t|^{2HK} - |u_{j,n} - u_{i,n}|^{2HK}, \\ D_{i,j,n}^{H,K}(s, t) &:= [(u_{i,n} + s)^{2H} + (u_{j,n} + t)^{2H}]^K - [(u_{i,n} + s)^{2H} + u_{j,n}^{2H}]^K \\ &\quad - [u_{i,n}^{2H} + (u_{j,n} + t)^{2H}]^K + (u_{i,n}^{2H} + u_{j,n}^{2H})^K. \end{aligned}$$

这样, 由 Taylor 展式, 对 $i < j$ 和 $s \leq t$, 有

$$\begin{aligned} C_{i,j,n}^{H,K}(s, t) &= 2HKs\{|(u_{j,n} - u_{i,n}) + (t - \theta_1 s)|^{2HK-1} - |(u_{j,n} - u_{i,n}) - \theta_2 s|^{2HK-1}\} \\ &= 2HK(2HK - 1)s(t - \theta_1 s + \theta_2 s)|(u_{j,n} - u_{i,n}) + \theta_3(t - \theta_1 s + \theta_2 s)|^{2HK-2}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} D_{i,j,n}^{H,K}(s, t) &= K\{[(u_{i,n} + s)^{2H} + u_{j,n}^{2H} + \theta_4((u_{j,n} + t)^{2H} - u_{j,n}^{2H})]^{K-1} \times [(u_{j,n} + t)^{2H} - u_{j,n}^{2H}] \\ &\quad - [u_{i,n}^{2H} + u_{j,n}^{2H} + \theta_5((u_{j,n} + t)^{2H} - u_{j,n}^{2H})]^{K-1} [(u_{j,n} + t)^{2H} - u_{j,n}^{2H}]\} \\ &= K(K-1)[u_{i,n}^{2H} + u_{j,n}^{2H} + (\theta_5 + \theta_6(\theta_4 - \theta_5))((u_{j,n} + t)^{2H} - u_{j,n}^{2H}) \\ &\quad + \theta_6((u_{i,n} + s)^{2H} - u_{i,n}^{2H})]^{K-2} \\ &\quad \times [((u_{i,n} + s)^{2H} - u_{i,n}^{2H}) + (\theta_4 - \theta_5)((u_{j,n} + t)^{2H} - u_{j,n}^{2H})][(u_{j,n} + t)^{2H} - u_{j,n}^{2H}] \\ &= 4H^2K(K-1)[u_{i,n}^{2H} + u_{j,n}^{2H} + (\theta_5 + \theta_6(\theta_4 - \theta_5))((u_{j,n} + t)^{2H} - u_{j,n}^{2H}) \\ &\quad + \theta_6((u_{i,n} + s)^{2H} - u_{i,n}^{2H})]^{K-2} \\ &\quad \times [s(u_{i,n} + \theta_7 s)^{2H-1} + (\theta_4 - \theta_5)t(u_{j,n} + \theta_8 t)^{2H-1}](u_{j,n} + \theta_9 t)^{2H-1}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

其中 $\theta_\ell \in [0, 1]$ ($1 \leq \ell \leq 9$). 这样, 由于 $K \in (0, 1]$, 因此有

$$|D_{i,j,n}^{H,K}(s, t)| \leq 4H^2K(1-K)u_{j,n}^{2H(K-2)}[(u_{i,n} + \theta_7 s)^{2H-1} + (u_{j,n} + \theta_8 t)^{2H-1}](u_{j,n} + \theta_9 t)^{2H-1}. \quad (3.32)$$

考虑 Gauss 随机向量 $\mathbf{X}_1^T := (Z_{i,n}^{H,K}(\vartheta), Z_{i,n}^{H,K}(2\vartheta), \dots, Z_{i,n}^{H,K}(1))$ 和 $\mathbf{X}_2^T := (Z_{j,n}^{H,K}(\vartheta), Z_{j,n}^{H,K}(2\vartheta), \dots, Z_{j,n}^{H,K}(1))$. 令 $\mathbf{X}^T = (\mathbf{X}_1^T, \mathbf{X}_2^T)$, Σ 记 $\mathbf{X}$ 的协方差矩阵, 则

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_2^T & \Sigma_1 \end{pmatrix},$$

其中 $\Sigma_1 = E[\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1^T] = E[\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_2^T]$, $\Sigma_2 = E[\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2^T]$. 为了方便, 记 $\psi(h_n) = (1 + \varepsilon)(c_{2,2}/|\log(h_n)|)^{HK}$. 由引理 3.2, 可得

$$\begin{aligned} & P\left(\max_{1 \leq k \leq \vartheta^{-1}} |Z_{i,n}^{H,K}(k\vartheta)| \leq \psi(h_n), \max_{1 \leq m \leq \vartheta^{-1}} |Z_{j,n}^{H,K}(m\vartheta)| \leq \psi(h_n)\right) \\ & \leq \phi P\left(\max_{1 \leq k \leq \vartheta^{-1}} |Z_{i,n}^{H,K}(k\vartheta)| \leq \psi(h_n)\right) P\left(\max_{1 \leq m \leq \vartheta^{-1}} |Z_{j,n}^{H,K}(m\vartheta)| \leq \psi(h_n)\right), \end{aligned} \quad (3.33)$$

其中

$$\phi = \left(\frac{\det(\Sigma_1) \det(\Sigma_1)}{\det(\Sigma)} \right)^{1/2}.$$

考虑 $(2\vartheta^{-1}) \times (2\vartheta^{-1})$ 矩阵 Σ 的行列式, 有

$$\det(\Sigma) = [\det(\Sigma_1)]^2 - [\det(\Sigma_2)]^2. \quad (3.34)$$

我们声明下面的三个事实:

(i) 协方差矩阵 Σ_1 的行列式可以表示成

$$\det(\Sigma_1) = \text{Var}(Z_{i,n}^{H,K}(\vartheta)) \prod_{j=2}^{\vartheta^{-1}} \text{Var}(Z_{i,n}^{H,K}(j\vartheta) \mid Z_{i,n}^{H,K}(\vartheta), \dots, Z_{i,n}^{H,K}((j-1)\vartheta)),$$

其中 $\text{Var}(U)$ 和 $\text{Var}(U \mid V)$ 分别表示 U 的方差和给定 V 的条件下 U 的条件方差.

(ii) $B_0^{H,K}$ 的强局部非确定性 (见 (3.5)) 意味着

$$\text{Var}(Z_{i,n}^{H,K}(j\vartheta) \mid Z_{i,n}^{H,K}(\vartheta), \dots, Z_{i,n}^{H,K}((j-1)\vartheta)) \geq c_{3,7} \vartheta^{2HK}.$$

(iii) Hadamard 不等式 (参见文献 [36, 第 506 页]) 意味着

$$\det(\Sigma_2) \leq \left(\prod_{k=1}^{\vartheta^{-1}} \left(\sum_{m=1}^{\vartheta^{-1}} |a_{km}|^2 \right) \right)^{1/2},$$

其中 $a_{km} = E[Z_{i,n}^{H,K}(k\vartheta) Z_{j,n}^{H,K}(m\vartheta)]$, $i, j \in \mathcal{F}_n$, $i < j$, $1 \leq k \leq m \leq \vartheta^{-1}$.

由 (i) 和 (ii), 有

$$\det(\Sigma_1) \geq (c_{3,7} \vartheta^{2HK})^{\vartheta^{-1}}. \quad (3.35)$$

由 (3.30), 对任意 $i, j \in \mathcal{F}_n$, $j - i \geq \nu_n$, $1 \leq k \leq m \leq \vartheta^{-1}$, 有

$$\begin{aligned} |C_{i,j,n}^{H,K}(k\vartheta, m\vartheta)| &= |2HK(2HK-1)k(m-\theta_1k+\theta_2k)\vartheta^2| |(j-i)\vartheta + \theta_3(m-\theta_1k+\theta_2k)\vartheta|^{2HK-2} \\ &\leq 2^{K-1} |\log(h_n)|^{-(\mu-2)(2-2HK)}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

同样, 由 (3.32), 对任意 $i, j \in \mathcal{F}_n$, $j > i \geq \nu_n$, $1 \leq k \leq m \leq \vartheta^{-1}$, 有

$$\begin{aligned} |D_{i,j,n}^{H,K}(k\vartheta, m\vartheta)| &\leq 4H^2K(1-K)j^{2H(K-2)}[(i+\theta_7k)^{2H-1} + (j+\theta_8m)^{2H-1}](j+\theta_9m)^{2H-1}\vartheta^{2HK-2} \\ &\leq 2^{K-1}|\log(h_n)|^{-(\mu-2)(2-2HK)}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

这里, 最后的不等式对 $2H-1 < 0$ 情形成立是显然的; 对 $2H-1 \geq 0$ 情形成立是由于

$$j^{2H(K-2)}[(i+\theta_7k)^{2H-1} + (j+\theta_8m)^{2H-1}](j+\theta_9m)^{2H-1} \leq c_{3,8}j^{2HK-2}.$$

这样, 由 (3.29)、(3.36) 和 (3.37), 可得

$$|a_{km}| \leq |\log(h_n)|^{-(\mu-2)(2-2HK)}. \quad (3.38)$$

因此, 由 (3.38) 和 (iii), 有

$$\det(\Sigma_2) \leq |\log(h_n)|^{-(\mu-2)(2-2HK)\vartheta^{-1}}\vartheta^{\frac{1}{2}\vartheta^{-1}}. \quad (3.39)$$

由 (3.39) 和 (3.35) 知, 存在常数 a_n 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时 $a_n \rightarrow 0$, 及

$$\det(\Sigma_2) \leq a_n \det(\Sigma_1). \quad (3.40)$$

这样, 由 (3.34) 和 (3.40), 得到

$$\det(\Sigma) \geq (1 - a_n^2)[\det(\Sigma_1)]^2. \quad (3.41)$$

从而, 有 $\phi \leq (1 - a_n^2)^{-1/2}$. 由此, 由 (3.33), 可得

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq \vartheta^{-1}} |Z_{i,n}^{H,K}(k\vartheta)| \leq \psi(h_n), \max_{1 \leq m \leq \vartheta^{-1}} |Z_{j,n}^{H,K}(m\vartheta)| \leq \psi(h_n)\right) \\ &\leq (1 - a_n^2)^{-1/2} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq \vartheta^{-1}} |Z_{i,n}^{H,K}(k\vartheta)| \leq \psi(h_n)\right) \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq m \leq \vartheta^{-1}} |Z_{j,n}^{H,K}(m\vartheta)| \leq \psi(h_n)\right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

由于当 $n \rightarrow \infty$ 时 $(1 - a_n^2)^{-1/2} = 1 + o(1)$, 由 (3.42) 和 (1.2), (3.23) 成立. (3.14) 证毕. $\square$

4 局部时的 Hölder 条件

令 $H \in (0, 1)$ 和 $K \in (0, 1]$ 是两个常数. 设 $B^{H,K} = \{B^{H,K}(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上指数为 H 和 K 的双分数 Brown 运动. 对任意闭区间 $I \subset \mathbb{R}_+$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$, $B^{H,K}$ 的局部时 $L(x, I)$ 是占有测度 μ_I 的密度, 其中

$$\mu_I(A) = \int_I \mathbb{I}_A B^{H,K}(s) ds, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

由文献 [37, 定理 6.4] 知, 如下占有密度公式成立: 对任意 $I \times \mathbb{R}^d$ 上的 Borel 函数 $g(t, x) \geq 0$, 成立

$$\int_I g(t, B^{H,K}(t)) dt = \int_{\mathbb{R}^d} \int_I g(t, x) L(x, dt) dx.$$

由引理 3.3 和文献 [37, 定理 21.9] 知, 如果 $1/(HK) > d$, 那么 $B^{H,K}$ 存在局部时 $L(x, t) := L(x, [0, t])$, $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$. 对 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 定义最大值局部时 $L^*(B) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} L(x, B)$. 文献 [4] 证明了 对任意有限区间 $I \subseteq \mathbb{R}$, 存在正的常数 $c_{4,1}$ 使得

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{t \in I} \frac{L^*(B(t, r))}{\varphi_1(r)} \leq c_{4,1} \quad \text{a.s.}, \quad (4.1)$$

其中 $B(t, r) = (t - r, t + r)$ 和 $\varphi_1(r) = r^{1-HKd}(\log(r^{-1}))^{HKd}$.

正如在引言中提到的, (4.1) 的下界是未知的. 作为定理 1.1(iii) 的应用, 我们有如下的 $B^{H,K}$ 的最大值局部时的一致 Hölder 条件.

定理 4.1 如果 $1/(HK) > d$, 那么对任意有限区间 $I \subseteq \mathbb{R}$, 存在正的常数 $c_{4,1}$ 和 $c_{4,2}$ 使得

$$c_{4,2} \leq \limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{t \in I} \frac{L^*(B(t, r))}{\varphi_1(r)} \leq c_{4,1} \quad \text{a.s.} \quad (4.2)$$

证明 由 (4.1) 知, 只需证明 (4.2) 的左边不等式. 由 (1.6) 知, 对任意有限区间 $I \subseteq \mathbb{R}$, 有

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \inf_{t \in I} \sup_{s \in B(t, r)} \frac{(\log r^{-1})^{HK}}{r^{HK}} |B^{H,K}(s) - B^{H,K}(t)| \leq c_{4,3} \quad \text{a.s.} \quad (4.3)$$

由局部时的定义, 对任意区间 $Q \subseteq \mathbb{R}_+$, 可得

$$|Q| = \int_{\overline{X(Q)}} L(x, Q) dx \leq L^*(Q) \cdot \left(\sup_{s, t \in Q} |X(s) - X(t)| \right)^d, \quad (4.4)$$

其中 $\overline{X(Q)}$ 是 $X(Q) = \{X(t), t \in Q\}$ 的闭包. 这样, 在 (4.4) 中取 $Q = B(t, r)$, 由 (4.3), 得到 (4.2) 左边不等式成立. 定理 4.1 证毕. $\square$

致谢 诚挚感谢审稿人对本文提出宝贵的修改意见.

参考文献

- Samorodnitsky G, Taqqu M S. Stable non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance. New York: Chapman & Hall, 1994
- Houdré C, Villa J. An example of infinite dimensional quasi-helix. Contemp Math, 2003, 336: 195–202
- Russo F, Tudor C A. On the bifractional Brownian motion. Stoch Process Appl, 2006, 5: 830–856
- Tudor C A, Xiao Y. Sample path properties of bifractional Brownian motion. Bernoulli, 2008, 14: 865–898
- Es-Sebaïy K, Tudor C A. Multidimensional bifractional Brownian motion: Itô and Tanaka's formulas. Stoch Dyn, 2007, 3: 365–388
- Lei P, Nualart D. A decomposition of the bifractional Brownian motion and some applications. Statist Probab Lett, 2009, 79: 619–624
- Wang W. On p -variation of bifractional Brownian motion. Appl Math J Chinese Univ Ser A, 2011, 26: 127–141
- Li W V, Linde W. Existence of small ball constants for fractional Brownian motions. C R Acad Sci Ser I Math, 1998, 326: 1329–1334
- Csörgő M, Révész P. How small are the increments of a Wiener process? Stoch Process Appl, 1979, 8: 119–129
- Csörgő M, Révész P. Strong Approximations in Probability and Statistics. New York: Academic Press, 1981
- Shao Q M. Bounds and estimators of a basic constant in extreme value theory of Gaussian processes. Statist Sinica, 1996, 7: 245–257
- Lévy P. Théorie de l'addition des Variables Aléatoires. Paris: Gauthier-Villars, 1937
- Lévy P. Procesus Stochastique et Mouvement Brownien. Paris: Gauthier-Villars, 1948
- Lin Z, Lu C R, Zhang L X. Path Properties of Gaussian Processes. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2001
- Marcus M B, Rosen J. Markov Processes, Gaussian Processes, and Local Times. Cambridge: Cambridge University Press, 2006
- Khoshnevisan D. Multiparameter Processes: An Introduction to Random Fields. New York: Springer-Verlag, 2002
- Xiao Y. Sample path properties of anisotropic Gaussian random fields. In: A Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1962. New York: Springer, 2009, 145–212
- Meerschaert M M, Wang W, Xiao Y. Fernique type inequality and moduli of continuity for anisotropic Gaussian random fields. Tran Amer Math Soc, 2013, 365: 1081–1107
- Csörgő M, Shao Q M. Strong limit theorems for large and small increments of l^p -valued Gaussian processes. Ann Probab, 1993, 21: 1958–1990

- 20 Csörgő M, Lin Z, Shao Q M. Path properties for l^∞ -valued Gaussian processes. *Proc Amer Math Soc*, 1994, 121: 225–236
- 21 Hawkes J. A lower Lipschitz condition for the stable subordinator. *Z Wahrscheinlichkeitstheorie Verw Gebiete*, 1971, 17: 23–32
- 22 Perkins E. The exact Hausdorff measure of the level sets of Brownian motion. *Z Wahrscheinlichkeitstheorie Verw Gebiete*, 1981, 58: 373–388
- 23 Csáki E, Csörgő M, Földes A, et al. How big are the increments of the local times of a Wiener process? *Ann Probab*, 1983, 11: 593–608
- 24 Kesten H. An iterated logarithm law for local time. *Duke Math J*, 1965, 32: 447–456
- 25 Csörgő M, Lin Z Y, Shao Q M. On moduli of continuity for local times of Gaussian processes. *Stochastic Process Appl*, 1995, 58: 1–21
- 26 Wang W, Xiao Y. The Csörgő-Révész moduli of non-differentiability of fractional Brownian motion. *Stat Probab Lett*, 2019, in press
- 27 Csörgő M, Shao Q M. On almost sure limit inferior for B-valued stochastic processes and applications. *Probab Theory Related Fields*, 1994, 99: 29–54
- 28 Li W V, Shao Q M. Gaussian processes: Inequalities, small ball probabilities and applications. In: *Stochastic Processes: Theory and Methods. Handbook of Statistics*, vol. 19. Amsterdam: North-Holland, 2001, 533–597
- 29 Talagrand M. New Gaussian estimates for enlarged balls. *Geom Funct Anal*, 1993, 3: 502–526
- 30 Talagrand M. Lower classes for fractional Brownian motion. *J Theoret Probab*, 1996, 9: 191–213
- 31 Li W V. A Gaussian correlation inequality and its applications to small ball probabilities. *Electron Commun Probab*, 1999, 4: 111–118
- 32 Csáki E, Csörgő M, Shao Q M. Fernique type inequalities and moduli of continuity for l^2 -valued Ornstein-Uhlenbeck processes. *Ann Inst H Poincaré Probab Statist*, 1992, 28: 479–517
- 33 Shao Q M. A Gaussian correlation inequality and its applications to the existence of small ball constant. *Stochastic Process Appl*, 2003, 107: 269–287
- 34 Khoshnevisan D, Peres Y, Xiao Y. Limsup random fractals. *Elect J Probab*, 2000, 5: 1–24
- 35 Kahane J P. *Some Random Series of Functions*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1985
- 36 Horn R A, Johnson C R. *Matrix Analysis*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013
- 37 Geman D, Horowitz J. Occupation densities. *Ann Probab*, 1980, 8: 1–67

Continuity moduli and non-differentiability moduli for bifractional Brownian motion

Wensheng Wang

Abstract Let $B^{H,K} = \{B^{H,K}(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ be a bifractional Brownian motion with indices $H \in (0,1)$ and $K \in (0,1]$ in $\mathbb{R}^d$. We establish the global and local moduli of continuity for $B^{H,K}$. By proving the existence of the small ball constants for $B^{H,K}$, we establish the moduli of non-differentiability for $B^{H,K}$. These results confirm that almost all sample functions of bifractional Brownian motion are continuous and nowhere differentiability. As an application of the modulus of non-differentiability, we prove that the uniform Hölder condition for the maximum local times of bifractional Brownian motion obtained in Tudor and Xiao (2008) is optimal.

Keywords self-similar Gaussian processes, bifractional Brownian motion, small ball probability, moduli of continuity, moduli of non-differentiability, local times

MSC(2010) 60G15, 60G17, 60F10, 60F15

doi: 10.1360/SCM-2017-0717