三维不可压 Navier-Stokes 方程关于速度场单分量在各向异性临界空间中的正则性准则

献给杨乐教授 80 华诞

刘彦麟^{1,2}, 张平^{1,3*}

1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;

2. 中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026;

3. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049

E-mail: liuyanlin3.14@126.com, zp@amss.ac.cn

收稿日期: 2018-01-31; 接受日期: 2018-03-23; 网络出版日期: 2018-08-13; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11731007 和 11688101) 资助项目

摘要 给定初始涡度场 ω_0 属于 $L^{\frac{3}{2}} \cap L^2$, 本文证明若三维不可压 Navier-Stokes 方程的 Fujita-Kato 解在有限时刻 T^* 处发生爆破, 则对任意 $p \in [4, \infty]$, $q_1 \in [1, 2]$, $\mu > 0$, $q_2 \in [2, (1/p + \mu)^{-1}]$, $\kappa \in [1, \infty]$, 以及任意单位向量 e , $(v(t) | e)_{\mathbb{R}^3}$ 的 $L^p(0, T^*; L^{\frac{3p}{p-2}} \cap (\dot{B}_{q_1, \kappa}^{\mu + \frac{2}{p} + \frac{2}{q_1} - 1})_h(\dot{B}_{q_2, \kappa}^{\frac{1}{q_2} - \mu})_v)$ 范数等于无穷.

关键词 Navier-Stokes 方程 正则性准则 临界空间 各向异性的 Littlewood-Paley 分解

MSC (2010) 主题分类 35Q30, 76D03

1 引言

考虑三维不可压 Navier-Stokes 方程:

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_t v + \operatorname{div}(v \otimes v) - \Delta v + \nabla p = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v|_{t=0} = v_0, \end{cases}$$

它描述的是黏性不可压缩流体的运动, 其中 $v = (v^1, v^2, v^3)$ 表示流体的速度场, p 表示数量压力项.

众所周知, 三维不可压 Navier-Stokes 方程的整体正则性是 Clay 研究所公布的七大千禧年问题之一. 首先回顾 Fujita 和 Kato^[1] 的如下结果:

英文引用格式: Liu Y L, Zhang P. Critical one component anisotropic regularity for 3-D Navier-Stokes system (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1405–1430, doi: 10.1360/N012018-00020

定理 1.1 对于任意给定的齐次 Sobolev 空间 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ 中初值 v_0 , 方程组 (NS) 在 $C([0, T^*]; \dot{H}^{\frac{1}{2}}) \cap L^2_{\text{loc}}([0, T^*]; \dot{H}^{\frac{3}{2}})$ 中都有唯一的极大解 v , 其中 T^* 是解 v 的极大存在时间. 若 T^* 有限, 则对任意 $p \in [2, \infty]$, 成立

$$\int_0^{T^*} \|v(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2} + \frac{2}{p}}}^p dt = \infty. \quad (1.1)$$

Kenig 和 Koch [2] 证明了上述定理 $p = \infty$ 的端点情形, 即若解的极大存在时间 T^* 有限, 则 $\limsup_{t \rightarrow T^*} \|v(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} = \infty$. 这一端点情形也可看作 Escauriaza 等的工作 [3] 的一个推论, 他们证明了, 若 T^* 有限, 则 $\limsup_{t \rightarrow T^*} \|v(t)\|_{L^3} = \infty$.

在继续推进之前, 回顾文献 [4] 中所引入的下述函数空间:

定义 1.1 对 $r \in [\frac{3}{2}, 2]$, 我们用 $\mathcal{V}^r$ 记散度为 0 且旋度属于 $L^{\frac{3}{2}} \cap L^r$ 的函数向量场所张成的空间.

改进定理 1.1 的一个自然想法是将 (1.1) 中整个速度场改进为速度场 v 的部分分量. 特别地, Chemin 和本文第二个作者在文献 [5] 中证明了如下结论:

定理 1.2 给定初值 $v_0 \in \mathcal{V}^{\frac{3}{2}}$, 记 v 是定理 1.1 所给出的 (NS) 的唯一极大解, 若其极大存在时间 T^* 是有限值, 则对任意 $p \in [4, 6]$ 及任意单位常向量 e , 成立

$$\int_0^{T^*} \|(v(t) \mid e)_{\mathbb{R}^3}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2} + \frac{2}{p}}}^p dt = \infty. \quad (1.2)$$

假定初值 v_0 落在正则性更高的函数空间 $\mathcal{V}^2$, 最近文献 [4] 将这一正则性准则 (1.2) 推广到了 $p \in [4, \infty]$. Han 等 [6] 将这一准则改进至对 $p \in [2, \infty]$ 均成立, 而且他们对初值正则性的要求甚至比文献 [5] 中的还要低. 更多关于 Navier-Stokes 方程的正则性判别准则, 参见文献 [5] 及其所引用的参考文献.

我们指出, 正则性准则 (1.1) 即使对端点情形 $p = \infty$ 也至少需要速度场 v 的 $\frac{1}{2}$ 阶导数估计. 因此, 定理 1.1 的另外一个改进方向, 便是降低所需 v 的导数的阶数, 其端点情形即为著名的 Ladyzhenskaya-Prodi-Serrin 正则性判别准则, 具体来讲, 若极大存在时间 T^* 有限, 则

$$\int_0^{T^*} \|v(t, \cdot)\|_{L^q}^p dt = \infty, \quad \text{其中 } \frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 1. \quad (1.3)$$

本文的目的即为降低速度场单分量正则性准则 (1.2) 中所需要的导数的阶数, 为此我们需要用到各向异性的 Besov 空间. 如同文献 [5, 7–9], 该函数空间的定义需要利用 Fourier 变量的各向异性的二进环形分解. 下面回顾文献 [10] 中 Littlewood-Paley 理论的基本事实:

$$\begin{aligned} \Delta_j a &= \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-j}|\xi|)\hat{a}), & \Delta_k^h a &= \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-k}|\xi_h|)\hat{a}), & \Delta_\ell^v a &= \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-\ell}|\xi_3|)\hat{a}), \\ S_j a &= \mathcal{F}^{-1}(\chi(2^{-j}|\xi|)\hat{a}), & S_k^h a &= \mathcal{F}^{-1}(\chi(2^{-k}|\xi_h|)\hat{a}), & S_\ell^v a &= \mathcal{F}^{-1}(\chi(2^{-\ell}|\xi_3|)\hat{a}), \end{aligned} \quad (1.4)$$

其中 $\xi_h = (\xi_1, \xi_2)$, $\mathcal{F}a$ 和 $\hat{a}$ 均表示 a 的 Fourier 变换, $\chi(\tau)$ 和 $\varphi(\tau)$ 是满足下述条件的光滑函数:

$$\begin{aligned} \text{Supp } \varphi &\subset \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \frac{3}{4} \leq |\tau| \leq \frac{8}{3} \right\}, \text{ 且对任意 } \tau > 0, \text{ 成立 } \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\tau) = 1, \\ \text{Supp } \chi &\subset \left\{ \tau \in \mathbb{R} : |\tau| \leq \frac{4}{3} \right\}, \text{ 且对任意 } \tau \in \mathbb{R}, \text{ 成立 } \chi(\tau) + \sum_{j \geq 0} \varphi(2^{-j}\tau) = 1. \end{aligned}$$

定义 1.2 各向异性 Besov 空间 $(\dot{B}_{p_1, r_1}^{s_1})_h(\dot{B}_{p_2, r_2}^{s_2})_v$ 由 $\mathcal{S}'_h$ 中满足范数

$$\|u\|_{(\dot{B}_{p_1, r_1}^{s_1})_h(\dot{B}_{p_2, r_2}^{s_2})_v} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{r_1 k s_1} \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} 2^{r_2 \ell s_2} \|\Delta_k^h \Delta_\ell^v u\|_{L_h^{p_1} L_v^{p_2}}^{r_2} \right)^{r_1/r_2} \right)^{1/r_1}$$

是有限的分布组成. 当 $p_1 = p_2 = p$ 和 $r_1 = r_2 = r$ 时, 我们将 $(\dot{B}_{p, r}^{s_1})_h(\dot{B}_{p, r}^{s_2})_v$ 简记为 $\dot{B}_{p, r}^{s_1, s_2}$.

本文的主要结果叙述如下:

定理 1.3 给定初值 $v_0 \in \mathcal{V}^2$, 记 v 是定理 1.1 所给出的 (NS) 的唯一极大解, 若其极大存在时间 T^* 是有限值, 则对任意 $p \in [4, \infty]$, $q_1 \in [1, 2]$, $\mu > 0$, $q_2 \in [2, (1/p + \mu)^{-1}]$, $\kappa \in [1, \infty]$, 以及任意单位常向量 e , 成立

$$\int_0^{T^*} (\|(v(t) | e)_{\mathbb{R}^3}\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}}^p + \|(v(t) | e)_{\mathbb{R}^3}\|_{(\dot{B}_{q_1, \kappa}^{\mu + \frac{2}{p} + \frac{2}{q_1} - 1})_h(\dot{B}_{q_2, \kappa}^{\frac{1}{q_2} - \mu})_v}}^p) dt = \infty. \quad (1.5)$$

注 1.1 正则性准则 (1.5) 的第一项, 即为 $(v(t) | e)_{\mathbb{R}^3}$ 的 $L_{T^*}^p(L^{\frac{3p}{p-2}})$ 范数, 对应的正是速度场单分量的 Ladyzhenskaya-Prodi-Serrin 正则性准则. (1.5) 的第二项在水平方向变量需要 $\mu + \frac{2}{p} + \frac{2}{q_1} - 1$ 阶导数, 这个阶数可以任意接近于 0, 只要我们选取 q_1 充分接近 2, μ 充分小且 p 和 q_2 充分大. 对竖直方向所需要的导数阶数也有同样的结论. 我们的方法看起来似乎只能把所需要的导数阶数降到任意小, 但并不能完全降为 0.

作为本节的结束, 我们给出本文通篇使用的一些符号. C 表示某个一致正常数, 其在不同地方出现时可能会取不同值. 用 $a \lesssim b$ 表示 $a \leq Cb$. 对任意 Banach 空间 B , 用 $L_T^p(B)$ 表示 $\|\cdot\|_{L^p(0, T)} \cdot (c_{k, \ell})_{k, \ell \in \mathbb{Z}}$ 表示 $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 中的单位元, 即 $\sum_{k, \ell \in \mathbb{Z}} c_{k, \ell}^2 = 1$, 而 $(d_{k, \ell})_{k, \ell \in \mathbb{Z}}$ 表示 $\ell^1(\mathbb{Z}^2)$ 中的单位元, 即 $\sum_{k, \ell \in \mathbb{Z}} d_{k, \ell} = 1$. 对指标 $p \in [1, \infty]$, 用 p' 表示它的共轭指标, 即 $1/p + 1/p' = 1$. 使用如下简写:

$$\alpha(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r} - \frac{1}{2}, \quad \mathcal{B}_{q_1, q_2, r}^{\mu, p} \stackrel{\text{def}}{=} (\dot{B}_{q_1, \frac{2r}{2-r}}^{\mu + \frac{2}{p} + \frac{2}{q_1} - 1})_h(\dot{B}_{q_2, \frac{2r}{2-r}}^{\frac{1}{q_2} - \mu})_v, \quad \omega_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega}{|\omega|} |\omega|^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (1.6)$$

2 定理 1.3 的证明思路

不失一般性, 不妨假设定理 1.3 中的单位向量 e 即为 $(0, 0, 1)$. 注意到对任意 $p \in [4, \infty]$, $\mu > 0$, $q_2 \in [2, (\frac{1}{p} + \mu)^{-1}]$ 以及 $\kappa \in [1, \infty]$, 我们可以找到 $r < 2$ 且充分接近 2, 使得 $p \in [4, \frac{2r}{2-r}]$, $\mu > \alpha(r)$, $q_2 \in [2, (1/p + 3\alpha(r) + \mu)^{-1}]$, 且 $\kappa < \frac{2r}{2-r}$. 从而, 定理 1.3 将是下述定理的直接推论:

定理 2.1 对任意 $r \in [9/5, 2]$, $p \in [4, \frac{2r}{2-r}]$, $q_1 \in [1, 2]$, $\mu \in [\alpha(r), \frac{1}{2} - \frac{1}{p} - 3\alpha(r)]$, $q_2 \in [2, (1/p + 3\alpha(r) + \mu)^{-1}]$, 以及 $v_0 \in \mathcal{V}^r$, 若由定理 1.1 给出的 (NS) 相应的极大解 v 的极大存在时间 T^* 有限, 则

$$\int_0^{T^*} \|v^3\|_{\text{SC}}^p dt = \infty, \quad \text{其中 } \|v^3\|_{\text{SC}} \stackrel{\text{def}}{=} \|v^3\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}} + \|v^3\|_{\mathcal{B}_{q_1, q_2, r}^{\mu, p}}. \quad (2.1)$$

在本节的剩余部分, 我们将给出定理 2.1 的证明思路.

用 $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \text{curl } v$ 来记速度场 v 的涡度场, $\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$ 记 Ω 的第三个分量, 并记 $\nabla_h^\perp = (-\partial_2, \partial_1)$, $\Delta_h = \partial_1^2 + \partial_2^2$. 由 $\text{div } v = 0$, 可以得到下述关于速度场 v 的水平分量的 Biot-Savart 定律:

$$v^h = v_{\text{curl}}^h + v_{\text{div}}^h, \quad \text{其中 } v_{\text{curl}}^h \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_h^\perp \Delta_h^{-1} \omega, \quad v_{\text{div}}^h \stackrel{\text{def}}{=} -\nabla_h \Delta_h^{-1} \partial_3 v^3. \quad (2.2)$$

由此可将 Navier-Stokes 方程 (NS) 写成如下关于 ω 和 $\partial_3 v^3$ 的方程:

$$(\widetilde{\text{NS}}) \quad \begin{cases} \partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega - \Delta \omega = \partial_3 v^3 \omega + \partial_2 v^3 \partial_3 v^1 - \partial_1 v^3 \partial_3 v^2, \\ \partial_t \partial_3 v^3 + v \cdot \nabla \partial_3 v^3 - \Delta \partial_3 v^3 + \partial_3 v \cdot \nabla v^3 = -\partial_3^2 \Delta^{-1} \left(\sum_{\ell, m=1}^3 \partial_\ell v^m \partial_m v^\ell \right). \end{cases}$$

值得说明的是, 由定义 1.2 不难看出 $\dot{B}_{2,2}^{s_1, s_2}$ 等价于如下定义的各向异性 Sobolev 空间 $\dot{H}^{s_1, s_2}$:

定义 2.1 对 $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, $\dot{H}^{s_1, s_2}$ 是由齐次缓增分布中满足范数

$$\|a\|_{\dot{H}^{s_1, s_2}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi_h|^{2s_1} |\xi_3|^{2s_2} |\widehat{a}(\xi)|^2 d\xi, \quad \text{其中 } \xi_h = (\xi_1, \xi_2)$$

有限的所有元素组成的集合. 特别地, 对 (1.6) 所给的 $\alpha(r)$ 和 $\theta \in [0, \alpha(r)]$, 记 $\mathcal{H}^{\theta, r} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{H}^{-3\alpha(r)+\theta, -\theta}$.

证明定理 2.1 的第一步是证明如下命题:

命题 2.1 在定理 2.1 的假设下, 对任意 $\theta \in [0, \alpha(r)]$, 都存在一个正常数 C 使得对任意 $t < T^*$, 成立

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \|\omega_{\frac{r}{2}}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{r-1}{r^2} \int_0^t \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^2 dt' \\ & \leq \left(\frac{1}{r} \|\omega_0\|_{L^r}^r + C \left(\int_0^t \|\partial_3^2 v^3(t')\|_{\mathcal{H}^{\theta, r}}^2 dt' \right)^{\frac{r}{2}} \right) \exp \left(C \int_0^t \|v^3(t')\|_{\text{SC}}^p dt' \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

我们将在第 3 节给出命题 2.1 的证明.

下面将处理 $\|\partial_3^2 v^3\|_{L_t^2(\mathcal{H}^{\theta, r})}$ 的估计. 首先, 由 $\Omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \Omega|_{t=0} \in L^r$ 和 $\text{div } v_0 = 0$, 可得

$$\begin{aligned} \|\partial_3 v_0^3\|_{\mathcal{H}^{\theta, r}}^2 &= \int_{|\xi_3| \leq |\xi_h|} |\xi_h|^{-6\alpha(r)+2\theta} |\xi_3|^{-2\theta} |\mathcal{F}(\partial_3 v_0^3)(\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + \int_{|\xi_h| \leq |\xi_3|} |\xi_h|^{-6\alpha(r)+2\theta} |\xi_3|^{-2\theta} |\mathcal{F}(-\text{div}_h v_0^h)(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \|v_0\|_{H^{1-3\alpha(r)}}^2 \lesssim \|\Omega_0\|_{L^r}^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

通过对 $(\widetilde{\text{NS}})$ 中 $\partial_3 v^3$ 的方程做 $\mathcal{H}^{\theta, r}$ 范数的能量估计, 我们将在第 4 节中证明下述命题:

命题 2.2 在命题 2.1 的假设之下, 对任意 $t < T^*$, 成立

$$\begin{aligned} & \|\partial_3 v^3(t)\|_{\mathcal{H}^{\theta, r}}^2 + \int_0^t \|\nabla \partial_3 v^3(t')\|_{\mathcal{H}^{\theta, r}}^2 dt' \\ & \leq C \exp \left(C \int_0^t \|v^3(t')\|_{\text{SC}}^p dt' \right) \left(\|\Omega_0\|_{L^r}^2 + \int_0^t (\|v^3(t')\|_{\text{SC}} \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{2(2\alpha(r)+\frac{1}{p})} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{2(1-\frac{1}{p})} \right. \\ & \quad \left. + \|v^3(t')\|_{\text{SC}}^2 \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{4(\alpha(r)+\frac{1}{p})} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{2(1-\frac{2}{p})} dt' \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

有了命题 2.1 和 2.2 之后, 我们只需重复文献 [4] 中第 6 节的论证, 便可完成定理 2.1 的证明. 为完整起见, 下面给出一个扼要证明.

命题 2.3 在命题 2.1 的假设之下, 对任意 $t < T^*$, 成立

$$\|\omega_{\frac{r}{2}}(t)\|_{L^2}^{2(1+2p\alpha(r))} + \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t)\|_{L_t^2(L^2)}^{2(1+2p\alpha(r))} \leq C \|\Omega_0\|_{L^r}^{r(1+2p\alpha(r))} \cdot \varepsilon(t), \quad (2.6)$$

$$\|\partial_3 v^3(t)\|_{\mathcal{H}^{\theta, r}}^2 + \|\nabla \partial_3 v^3\|_{L_t^2(\mathcal{H}^{\theta, r})}^2 \leq C \|\Omega_0\|_{L^r}^2 \cdot \varepsilon(t), \quad (2.7)$$

其中

$$\varepsilon(t) \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left(C \exp \left(C \int_0^t \|v^3(t')\|_{\text{SC}}^p dt' \right) \right).$$

证明 定义 $e(t) \stackrel{\text{def}}{=} C \exp(C \int_0^t \|v^3(t')\|_{\text{SC}}^p dt')$, 由命题 2.2 可得

$$\left(\int_0^t \|\nabla \partial_3 v^3(t')\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 dt' \right)^{\frac{r}{2}} e(t) \lesssim e(t) (\|\Omega_0\|_{L^r}^r + II_1(t) + II_2(t)), \quad (2.8)$$

其中

$$\begin{aligned} II_1(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_0^t \|v^3(t')\|_{\text{SC}} \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{2(2\alpha(r)+\frac{1}{p})} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{\frac{2}{p'}} dt' \right)^{\frac{r}{2}}, \\ II_2(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_0^t \|v^3(t')\|_{\text{SC}}^2 \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{4(\alpha(r)+\frac{1}{p})} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{2(1-\frac{2}{p})} dt' \right)^{\frac{r}{2}}. \end{aligned}$$

应用 Hölder 不等式和 Young 不等式得到

$$\begin{aligned} e(t)II_1(t) &\leq e(t) \left(\int_0^t \|v^3(t')\|_{\text{SC}}^p \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{2(1+2p\alpha(r))} dt' \right)^{\frac{r}{2} \cdot \frac{1}{p}} \left(\int_0^t \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^2 dt' \right)^{\frac{r}{2} \cdot \frac{1}{p'}} \\ &\leq \frac{r-1}{3r^2} \int_0^t \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^2 dt' + e(t) \left(\int_0^t \|v^3(t')\|_{\text{SC}}^p \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{2(1+2p\alpha(r))} dt' \right)^{\frac{1}{1+2p\alpha(r)}}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

以及

$$\begin{aligned} e(t)II_2(t) &\leq e(t) \left(\int_0^t \|v^3(t')\|_{\text{SC}}^p \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{2(1+p\alpha(r))} dt' \right)^{\frac{r}{2} \cdot \frac{2}{p}} \left(\int_0^t \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^2 dt' \right)^{\frac{r}{2} \cdot (1-\frac{2}{p})} \\ &\leq \frac{r-1}{3r^2} \int_0^t \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^2 dt' + e(t) \left(\int_0^t \|v^3(t')\|_{\text{SC}}^p \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{2(1+p\alpha(r))} dt' \right)^{\frac{1}{1+p\alpha(r)}}, \end{aligned}$$

再注意到

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^t \|v^3(t')\|_{\text{SC}}^p \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{2(1+p\alpha(r))} dt' \right)^{\frac{1}{1+p\alpha(r)}} \\ &\leq \left(\int_0^t \|v^3(t')\|_{\text{SC}}^p dt' \right)^{\frac{p\alpha(r)}{(1+p\alpha(r))(1+2p\alpha(r))}} \left(\int_0^t \|v^3(t')\|_{\text{SC}}^p \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{2(1+2p\alpha(r))} dt' \right)^{\frac{1}{1+2p\alpha(r)}}, \end{aligned}$$

从而得到

$$e(t)II_2(t) \leq \frac{r-1}{3r^2} \int_0^t \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^2 dt' + e(t) \left(\int_0^t \|v^3(t')\|_{\text{SC}}^p \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{2(1+2p\alpha(r))} dt' \right)^{\frac{1}{1+2p\alpha(r)}}.$$

将上述不等式及 (2.9) 代入 (2.8) 可得, 对任意 $t \in [0, T^*]$, 成立

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t \|\nabla \partial_3 v^3(t')\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 dt' \right)^{\frac{r}{2}} e(t) &\leq e(t) \|\Omega_0\|_{L^r}^r + \frac{2(r-1)}{3r^2} \int_0^t \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^2 dt' \\ &\quad + e(t) \left(\int_0^t \|v^3(t')\|_{\text{SC}}^p \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{2(1+2p\alpha(r))} dt' \right)^{\frac{1}{1+2p\alpha(r)}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

将 (2.10) 代入 (2.3), 得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \|\omega_{\frac{r}{2}}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{r-1}{3r^2} \int_0^t \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^2 dt' \\ & \leq e(t) \|\Omega_0\|_{L^r}^r + e(t) \left(\int_0^t \|v^3(t')\|_{\text{SC}}^p \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{2(1+2p\alpha(r))} dt' \right)^{\frac{1}{1+2p\alpha(r)}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

对上式求 $1+2p\alpha(r)$ 次方, 再用 Gronwall 不等式即得所需的估计 (2.6).

另一方面, 由命题 2.2 可得, 对任意 $t \in [0, T^*]$, 成立

$$\begin{aligned} \|\partial_3 v^3(t)\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 + \int_0^t \|\nabla \partial_3 v^3(t')\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 dt' & \leq e(t) (\|\Omega_0\|_{L^r}^2 + \|v^3\|_{L_t^p(\text{SC})} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L_t^\infty(L^2)}^{2(2\alpha(r)+\frac{1}{p})} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L_t^{\frac{p}{2}}(L^2)}^{\frac{2}{p}} \\ & \quad + \|v^3\|_{L_t^p(\text{SC})}^2 \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L_t^\infty(L^2)}^{4(\alpha(r)+\frac{1}{p})} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L_t^{\frac{p}{2}}(L^2)}^{2(1-\frac{2}{p})}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

再将估计 (2.6) 代入 (2.12) 即得估计 (2.7). 至此完成了命题 2.3 的证明. $\square$

下面回忆文献 [5] 中所证明的一个关于 Navier-Stokes 方程的正则性准则:

定理 2.2 (参见文献 [5, 定理 2.1]) 令 v 是方程 (NS) 在空间 $C([0, T^*]; \dot{H}^{\frac{1}{2}}) \cap L_{\text{loc}}^2([0, T^*]; \dot{H}^{\frac{3}{2}})$ 中的解. 若 T^* 是这个解的极大存在时间且 $T^* < \infty$, 则对范数 $\mathcal{B}_p \stackrel{\text{def}}{=} \dot{B}_{\infty, \infty}^{-2+\frac{2}{p}}, (p, \ell) \in [1, \infty]^9$, 有

$$\sum_{1 \leq k, \ell \leq 3} \int_0^{T^*} \|\partial_\ell v^k(t)\|_{\mathcal{B}_{p, \ell}^{k, \ell}}^{p_{k, \ell}} dt = \infty.$$

至此我们已经做好了证明定理 2.1 的一切准备.

定理 2.1 的证明 若假定 $\int_0^{T^*} \|v^3(t)\|_{\text{SC}}^p dt$ 是有限值, 则由命题 2.3 知, 下述几个量也都是有限值:

$$\|\omega\|_{L^\infty([0, T^*]; L^r)}, \quad \int_0^{T^*} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t)\|_{L^2}^2 dt, \quad \int_0^{T^*} \|\nabla \partial_3 v^3(t)\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 dt. \quad (2.13)$$

由引理 A.2 可得

$$\max_{1 \leq \ell \leq 3} \|\partial_\ell v^3\|_{\mathcal{B}_p} \lesssim \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j(-1+\frac{2}{p})} \|\Delta_j v^3\|_{L^\infty} \lesssim \sup_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j v^3\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}} \lesssim \|v^3\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}},$$

由此及 SC 范数的定义 (2.1) 即可保证

$$\max_{1 \leq \ell \leq 3} \int_0^{T^*} \|\partial_\ell v^3(t)\|_{\mathcal{B}_p}^p dt \lesssim \int_0^{T^*} \|v^3(t)\|_{\text{SC}}^p dt < \infty. \quad (2.14)$$

下面考虑速度场水平分量的控制. 对 $v_{\text{div}}^h = -\nabla_h \Delta_h^{-1} \partial_3 v^3$, 一方面, 我们可用 (2.14) 得到

$$\int_0^{T^*} \|\nabla_h v_{\text{div}}^h(t)\|_{\mathcal{B}_p}^p dt \lesssim \int_0^{T^*} \|\partial_3 v^3(t)\|_{\mathcal{B}_p}^p dt < \infty. \quad (2.15)$$

但是, 对任意分布 a , 可由引理 A.2 得到

$$\begin{aligned} \|\Delta_j a\|_{L^\infty} & \lesssim \sum_{k \leq j+1} \sum_{\ell \leq j+1} 2^k 2^{\frac{\ell}{2}} \|\Delta_k^h \Delta_\ell^v a\|_{L^2} \\ & \lesssim \|a\|_{\dot{H}^{1-3\alpha(r)+\theta, -\theta}} \sum_{k \leq j+1} \sum_{\ell \leq j+1} 2^{k(3\alpha(r)-\theta)} 2^{\ell(\frac{1}{2}+\theta)} \end{aligned}$$

$$\lesssim 2^{j(2-\frac{3}{r'})} \|a\|_{\dot{H}^{1-3\alpha(r)+\theta,-\theta}}. \quad (2.16)$$

令 $q(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2r'}{3}$, 则 (2.16) 给出

$$\|\partial_3 v_{\text{div}}^h\|_{\mathcal{B}_{q(r)}} \lesssim \|\partial_3 v_{\text{div}}^h\|_{\dot{H}^{1-3\alpha(r)+\theta,-\theta}} = \|\nabla_h \Delta_h^{-1} \partial_3^2 v^3\|_{\dot{H}^{1-3\alpha(r)+\theta,-\theta}} \lesssim \|\partial_3^2 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}. \quad (2.17)$$

由于 $r \in [\frac{9}{5}, 2]$ 知 $q(r) \in [\frac{4}{3}, \frac{3}{2}]$, 从估计 (2.17) 和 Hölder 不等式得到

$$\int_0^{T^*} \|\partial_3 v_{\text{div}}^h(t)\|_{\mathcal{B}_{q(r)}}^{q(r)} dt \lesssim T^{*(1-\frac{q(r)}{2})} \left(\int_0^{T^*} \|\partial_3^2 v^3(t)\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 dt \right)^{\frac{q(r)}{2}} < \infty. \quad (2.18)$$

另一方面, 对 $v_{\text{curl}}^h \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_h^\perp \Delta_h^{-1} \omega$, 可由引理 A.2 得到

$$\|\nabla_h v_{\text{curl}}^h\|_{\mathcal{B}_{q(r)}} \lesssim \|\partial_h^2 \Delta_h^{-1} \omega\|_{\dot{H}^{1-3\alpha(r)}} \lesssim \|\nabla \omega\|_{\dot{H}^{-3\alpha(r)}} \lesssim \|\nabla \omega\|_{L^r},$$

以及 (注意 $r < 2$)

$$\begin{aligned} 2^{j(-2+\frac{3}{r'})} \|\Delta_j \partial_3 v_{\text{curl}}^h\|_{L^\infty} &\lesssim 2^{j(-2+\frac{3}{r'})} \sum_{k \leq j+1} \sum_{\ell \leq j+1} \|\Delta_k^h \Delta_\ell^v \partial_3 \nabla_h^\perp \Delta_h^{-1} \omega\|_{L^\infty} \\ &\lesssim \|\partial_3 \omega\|_{L^r} 2^{j(-2+\frac{3}{r'})} \sum_{k \leq j+1} \sum_{\ell \leq j+1} 2^{k(\frac{2}{r}-1)} 2^{\frac{\ell}{r}} \\ &\lesssim \|\partial_3 \omega\|_{L^r}. \end{aligned}$$

上述两个估计和引理 A.7 揭示了

$$\|\nabla v_{\text{curl}}^h(t)\|_{\mathcal{B}_{q(r)}} \lesssim \|\nabla \omega(t)\|_{L^r} \lesssim \|\omega_{\frac{r}{2}}(t)\|_{L^2}^{\frac{2}{r}-1} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t)\|_{L^2}.$$

再用 Hölder 不等式和 $q(r) \in [\frac{4}{3}, \frac{3}{2}]$, 推出

$$\int_0^{T^*} \|\nabla v_{\text{curl}}^h(t)\|_{\mathcal{B}_{q(r)}}^{q(r)} dt \lesssim T^{*(1-\frac{q(r)}{2})} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^\infty([0,T^*];L^2)}^{\frac{2}{r}-1} \left(\int_0^{T^*} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t)\|_{L^2}^2 dt \right)^{\frac{q(r)}{2}} < \infty. \quad (2.19)$$

综合已得到的估计 (2.14)、(2.15)、(2.18) 和 (2.19), 定理 2.1 即为定理 2.2 的一个直接推论. $\square$

3 对 ω 的估计

本节的目的是给出命题 2.1 的证明. 首先回顾 (NS) 中 ω 的方程:

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega - \Delta \omega = \partial_3 v^3 \omega + \partial_2 v^3 \partial_3 v^1 - \partial_1 v^3 \partial_3 v^2.$$

对其做 L^r 估计 (参见文献 [5, 引理 3.1]), 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \|\omega_{\frac{r}{2}}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{4(r-1)}{r^2} \int_0^t \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^2 dt' &= \frac{1}{r} \|\omega_0\|_{L^2}^2 + \sum_{\ell=1}^3 F_\ell(t), \quad \text{其中} \\ F_1(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \partial_3 v^3 |\omega|^r dx dt', \\ F_2(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_2 v^3 \partial_3 v_{\text{curl}}^1 - \partial_1 v^3 \partial_3 v_{\text{curl}}^2) \omega_{r-1} dx dt', \\ F_3(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_2 v^3 \partial_3 v_{\text{div}}^1 - \partial_1 v^3 \partial_3 v_{\text{div}}^2) \omega_{r-1} dx dt', \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 v_{curl}^h 和 v_{div}^h 的定义可见 (2.2), $\omega_{r-1} \stackrel{\text{def}}{=} |\omega|^{r-2} \omega$ 如 (1.6) 所定义.

首先来处理最容易的一项 F_1 . 应用分部积分得到

$$\begin{aligned} |F_1(t)| &\leq r \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |v^3(t', x)| |\partial_3 \omega(t', x)| |\omega(t', x)|^{r-1} dx dt' \\ &\leq r \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |v^3(t', x)| |\partial_3 \omega(t', x)| |\omega_{\frac{r}{2}}(t', x)|^{\frac{2}{r'}} dx dt'. \end{aligned}$$

注意到

$$\frac{p-2}{3p} + \frac{1}{r} + \frac{2pr-3p+2r}{6p(r-1)} \times \frac{2}{r'} = 1,$$

应用 Hölder 不等式得到

$$|F_1(t)| \leq r \int_0^t \|v^3(t')\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}} \|\partial_3 \omega(t')\|_{L^r} \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{\frac{2}{r'}} dt'.$$

由于 $p \in [4, \frac{2r}{2-r}]$, 从而, $r' \frac{p-2}{2p} \in [0, 1]$. 由此可以用 Sobolev 嵌入定理和插值不等式得到

$$\|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^{\frac{6p(r-1)}{2pr-3p+2r}}} \lesssim \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{H^{r', \frac{p-2}{2p}}} \lesssim \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{\frac{2r-p(2-r)}{2p(r-1)}} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{r' \frac{p-2}{2p}},$$

由此及不等式 (A.1), 推出

$$|F_1(t)| \lesssim \int_0^t \|v^3(t')\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}} \|\partial_3 \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2} \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{\frac{2}{r}-1} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{1-\frac{2}{p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{1-2(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} dt'.$$

再利用 Young 不等式即得

$$\begin{aligned} |F_1(t)| &\lesssim \int_0^t \|v^3(t')\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}} \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{\frac{2}{p}} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^{2(1-\frac{1}{p})} dt' \\ &\leq \frac{r-1}{r^2} \int_0^t \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^2 dt' + C \int_0^t \|v^3(t')\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}}^p \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^2 dt'. \end{aligned} \quad (3.2)$$

为估计 (3.1) 中的其余两项, 我们需要得到 $\omega_{\frac{r}{2}}$ 更加精确的正则性描述, 以及对水平分量的 Biot-Savart 定律中出现的 $\nabla_h \Delta_h^{-1}$ 算子做更精细的处理.

命题 3.1 在命题 2.1 的假设之下, 有

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \partial_h \Delta_h^{-1} f \cdot \partial_h a \omega_{r-1} dx \right| \lesssim \min\{\|f\|_{L^r}, \|f\|_{\mathcal{H}^{\theta, r}}\} \|a\|_{B_{q_1, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{\dot{H}^\sigma}^{\frac{2}{r'}}, \quad (3.3)$$

其中 $\sigma = r'(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$, 范数 $\|\cdot\|_{B_{q_1, q_2, r}^{\mu, p}}$ 由 (1.6) 给出.

证明 注意到 $\omega_{r-1} = G(\omega_{\frac{r}{2}})$, 其中 $G(z) \stackrel{\text{def}}{=} |z|^{-2\alpha(r)}$. 应用引理 A.5 得到

$$\|\omega_{r-1}\|_{\dot{B}_{r', r'}^{\frac{2\sigma}{r'}}} \lesssim \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{\dot{H}^\sigma}^{\frac{2}{r'}}, \quad \forall \sigma \in [0, 1]. \quad (3.4)$$

用水平方向变量的 Bony 分解可将乘积 $\partial_h a \omega_{r-1}$ 分解如下:

$$\partial_h a \omega_{r-1} = T^h(\partial_h a, \omega_{r-1}) + R^h(\partial_h a, \omega_{r-1}) + T^h(\omega_{r-1}, \partial_h a) = \partial_h T^h(\omega_{r-1}, a) + A(a, \omega),$$

其中

$$A(a, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} T^h(\partial_h a, \omega_{r-1}) + R^h(\partial_h a, \omega_{r-1}) - T^h(\partial_h \omega_{r-1}, a).$$

由引理 A.2 可见, 只需要对 $q_1 \in [r, 2]$ 和 $q_2 \in [r', (\frac{1}{p} + 3\alpha(r) + \mu)^{-1}]$ 来证明 (3.3). 对这些指标, 我们将对分解中出现的每一项估计如下:

$$\|T^h(\omega_{r-1}, a)\|_{L^{r'}} + \|T^h(\omega_{r-1}, a)\|_{\dot{H}^{3\alpha(r)-\theta, \theta}} \lesssim \|a\|_{\mathcal{B}_{2, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{\dot{H}^\sigma}^{\frac{2}{r'}}, \quad (3.5)$$

$$\|(T^h(\partial_h a, \omega_{r-1}), T^h(\partial_h \omega_{r-1}, a))\|_{(B^{\mu-\delta_1}_{\frac{2r'}{r'+2}, 2})_h(H^{\delta_1+\alpha(r)-\mu})_v} \lesssim \|a\|_{\mathcal{B}_{2, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{\dot{H}^\sigma}^{\frac{2}{r'}}, \quad (3.6)$$

$$\|R^h(\partial_h a, \omega_{r-1})\|_{(B^{\mu+\frac{2}{q_1}-1-\delta_2}_{\frac{q_1 r'}{q_1+r'}, 2})_h(H^{\delta_2+\alpha(r)-\mu})_v} \lesssim \|a\|_{\mathcal{B}_{q_1, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{\dot{H}^\sigma}^{\frac{2}{r'}}, \quad (3.7)$$

其中 $\delta_1 \in [\mu - \alpha(r), 1 - 2/p]$, $\delta_2 \in [0, \min(1 - \frac{2}{p}, \mu - 1 + 2/q_1)]$. 估计 (3.5)–(3.7) 的证明将会放到附录 B 中. 我们暂且承认这些估计并继续命题 3.1 的证明.

注意到 $q_1 \in [1, 2]$, $q_2 \in [2, \infty]$, 引理 A.3 给出 $\mathcal{B}_{q_1, q_2, r}^{\mu, p} \hookrightarrow \mathcal{B}_{2, q_2, r}^{\mu, p}$. 从而, 从估计 (3.5) 得到

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \partial_h \Delta_h^{-1} f \cdot \partial_h T^h(\omega_{r-1}, a) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \partial_h^2 \Delta_h^{-1} f \cdot T^h(\omega_{r-1}, a) dx \right| \\ &\lesssim \min\{\|f\|_{L^r} \|T^h(\omega_{r-1}, a)\|_{L^{r'}}, \|f\|_{\mathcal{H}^{\theta, r}} \|T^h(\omega_{r-1}, a)\|_{\dot{H}^{3\alpha(r)-\theta, \theta}}\} \\ &\lesssim \min\{\|f\|_{L^r}, \|f\|_{\mathcal{H}^{\theta, r}}\} \|a\|_{\mathcal{B}_{q_1, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{\dot{H}^\sigma}^{\frac{2}{r'}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

由于 $r \in [1, 2]$, 我们反复使用 Minkowski 不等式和引理 A.4 得到

$$\begin{aligned} \left(\sum_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2} \|\Delta_k^h \Delta_\ell^v f\|_{L^r}^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\lesssim \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\Delta_k^h \Delta_\ell^v f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^r}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \left\| \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\Delta_k^h \Delta_\ell^v f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_v^r}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^r} \\ &\lesssim \left\| \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\Delta_k^h f(x_h, \cdot)\|_{L_v^r}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^r} \\ &\lesssim \left\| \left\| \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\Delta_k^h f(x_h, \cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_v^r} \right\|_{L_h^r} \\ &= \left\| \left\| \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\Delta_k^h f(x_h, \cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^r} \right\|_{L_v^r} \\ &= \|f\|_{L^r}, \end{aligned}$$

由此得到

$$\|f\|_{B_{r, 2}^{0, 0}} \leq \|f\|_{L^r}. \quad (3.9)$$

然而应用引理 A.3 得到

$$(\dot{B}^0_{\frac{2r'}{r'+2}, 2})_h(\dot{H}^{\alpha(r)})_v \hookrightarrow \dot{B}^{-1, 0}_{r', 2}, \quad (\dot{B}^{\frac{2}{q_1}-1}_{\frac{q_1 r'}{q_1+r'}, 2})_h(\dot{H}^{\alpha(r)})_v \hookrightarrow \dot{B}^{-1, 0}_{r', 2}.$$

注意到上述嵌入关系, 在 (3.6) 和 (3.7) 中取 $\delta_1 = \delta_2 = \mu$, 并用 (3.9), 得到

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^3} \partial_h \Delta_h^{-1} f \cdot (T^h(\partial_h a, \omega_{r-1}) + T^h(\partial_h \omega_{r-1}, a) + R^h(\partial_h a, \omega_{r-1})) dx \right| \\ & \leq \| \partial_h \Delta_h^{-1} f \|_{\dot{B}_{r,2}^{1,0}} \| (T^h(\partial_h a, \omega_{r-1}), T^h(\partial_h \omega_{r-1}, a), R^h(\partial_h a, \omega_{r-1})) \|_{\dot{B}_{r',2}^{-1,0}} \\ & \lesssim \| f \|_{L^r} \| a \|_{\mathcal{B}_{q_1, q_2, r}^{\mu, p}} \| \omega_{\frac{r}{2}} \|_{\dot{H}^\sigma}^{\frac{2}{r}}. \end{aligned}$$

结合上述估计以及 (3.8), 推出

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \partial_h \Delta_h^{-1} f \cdot \partial_h a \omega_{r-1} dx \right| \lesssim \| f \|_{L^r} \| a \|_{\mathcal{B}_{q_1, q_2, r}^{\mu, p}} \| \omega_{\frac{r}{2}} \|_{\dot{H}^\sigma}^{\frac{2}{r}}. \quad (3.10)$$

另一方面, 再次应用引理 A.3 得到

$$(\dot{B}_{\frac{2r'}{r'+2}, 2}^{\alpha(r)-\theta})_h (\dot{H}^\theta)_v \hookrightarrow \dot{H}^{-1+3\alpha(r)-\theta, \theta}, \quad (\dot{B}_{\frac{q_1 r'}{q_1+r'}, 2}^{\frac{2}{q_1}-1+\alpha(r)-\theta})_h (\dot{H}^\theta)_v \hookrightarrow \dot{H}^{-1+3\alpha(r)-\theta, \theta}.$$

注意到上述嵌入关系, 在 (3.6) 和 (3.7) 中, 取 $\delta_1 = \delta_2 = \mu + \theta - \alpha(r)$ 得到

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^3} \partial_h \Delta_h^{-1} f \cdot (T^h(\partial_h a, \omega_{r-1}) + T^h(\partial_h \omega_{r-1}, a) + R^h(\partial_h a, \omega_{r-1})) dx \right| \\ & \leq \| \partial_h \Delta_h^{-1} f \|_{\dot{H}^{1-3\alpha(r)+\theta, -\theta}} \| (T^h(\partial_h a, \omega_{r-1}), T^h(\partial_h \omega_{r-1}, a), R^h(\partial_h a, \omega_{r-1})) \|_{\dot{H}^{-1+3\alpha(r)-\theta, \theta}} \\ & \lesssim \| f \|_{\mathcal{H}^{\theta, r}} \| a \|_{\mathcal{B}_{q_1, q_2, r}^{\mu, p}} \| \omega_{\frac{r}{2}} \|_{\dot{H}^\sigma}^{\frac{2}{r}}. \end{aligned}$$

将这一估计与 (3.8) 结合, 推出

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \partial_h \Delta_h^{-1} f \partial_h a \omega_{r-1} dx \right| \lesssim \| f \|_{\mathcal{H}^{\theta, r}} \| a \|_{\mathcal{B}_{q_1, q_2, r}^{\mu, p}} \| \omega_{\frac{r}{2}} \|_{\dot{H}^\sigma}^{\frac{2}{r}}. \quad (3.11)$$

结合估计 (3.10) 和 (3.11), 便给出了本命题的证明. $\square$

对 $F_2(t)$ 的估计, 需要用到水平分量的 Biot-Savart 定律 (见 (2.2)) 以及命题 3.1, 其中取 $f = \partial_3 \omega$, $a = v^3$, $\sigma = \frac{(p-2)r'}{2p} \in [\frac{r'}{4}, 1]$, 其可由 $p \in [4, \frac{2r}{2-r}]$ 保证. 这样得到对 $t < T^*$, 成立

$$\begin{aligned} I_\omega(t) & \stackrel{\text{def}}{=} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_2 v^3(t, x) \partial_3 v_{\text{curl}}^1(t, x) - \partial_1 v^3(t, x) \partial_3 v_{\text{curl}}^2(t, x)) \omega_{r-1}(t, x) dx \right| \\ & \lesssim \| v^3(t) \|_{\mathcal{B}_{q_1, q_2, r}^{\mu, p}} \| \partial_3 \omega(t) \|_{L^r} \| \omega_{\frac{r}{2}}(t) \|_{\dot{H}^{\frac{(p-2)r'}{2p}}}^{\frac{2}{r}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

由 (A.1) 和插值不等式, 从 (3.12) 得出

$$\begin{aligned} I_\omega(t) & \lesssim \| v^3(t) \|_{\mathcal{B}_{q_1, q_2, r}^{\mu, p}} \| \omega_{\frac{r}{2}}(t) \|_{L^2}^{\frac{2}{r}-1} \| \nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t) \|_{L^2} \| \omega_{\frac{r}{2}}(t) \|_{L^2}^{\frac{2}{r}-\frac{p-2}{p}} \| \nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t) \|_{L^2}^{\frac{p-2}{p}} \\ & = \| v^3(t) \|_{\mathcal{B}_{q_1, q_2, r}^{\mu, p}} \| \omega_{\frac{r}{2}}(t) \|_{L^2}^{\frac{2}{p}} \| \nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t) \|_{L^2}^{2(1-\frac{1}{p})}. \end{aligned}$$

然后利用 Young 不等式, 再关于时间 t 积分给出

$$|F_2(t)| \leq \frac{r-1}{r^2} \int_0^t \| \nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t') \|_{L^2}^2 dt' + C \int_0^t \| v^3(t') \|_{\mathcal{B}_{q_1, q_2, r}^{\mu, p}}^p \| \omega_{\frac{r}{2}}(t') \|_{L^2}^2 dt'. \quad (3.13)$$

对 $F_3(t)$ 的估计依然是需要水平分量的 Biot-Savart 定律 (2.2) 和命题 3.1, 其中取 $f = \partial_3^2 v^3$, $a = v^3$:

$$\begin{aligned} |F_3(t)| &= \left| - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_2 v^3(t') \cdot \partial_1 \Delta_h^{-1} \partial_3^2 v^3(t') - \partial_1 v^3(t') \cdot \partial_2 \Delta_h^{-1} \partial_3^2 v^3(t')) \omega_{r-1}(t') dx dt' \right| \\ &\lesssim \int_0^t \|\partial_3^2 v^3(t')\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}} \|v^3(t')\|_{\mathcal{B}_{q_1,q_2,r}^{\mu,p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{\dot{H}^{\frac{2}{(p-2)r'}}}^{\frac{2}{p}} dt' \\ &\lesssim \int_0^t \|\partial_3^2 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}} \|v^3\|_{\mathcal{B}_{q_1,q_2,r}^{\mu,p}}^{p\alpha(r)} (\|v^3\|_{\text{SC}}^p \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{p}-\alpha(r)} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} dt'. \end{aligned}$$

再利用 Hölder 不等式和 Young 不等式, 得到

$$\begin{aligned} |F_3(t)| &\leq C \left(\int_0^t \|\partial_3^2 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 dt' \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|v^3\|_{\mathcal{B}_{q_1,q_2,r}^{\mu,p}}^p dt' \right)^{\alpha(r)} \\ &\quad \times \left(\int_0^t \|v^3\|_{\mathcal{B}_{q_1,q_2,r}^{\mu,p}}^p \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 dt' \right)^{\frac{1}{p}-\alpha(r)} \left(\int_0^t \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 dt' \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{r-1}{r^2} \int_0^t \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 dt' + C \int_0^t \|v^3\|_{\mathcal{B}_{q_1,q_2,r}^{\mu,p}}^p \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 dt' \\ &\quad + C \left(\int_0^t \|\partial_3^2 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 dt' \right)^{\frac{r}{2}} \left(\int_0^t \|v^3\|_{\mathcal{B}_{q_1,q_2,r}^{\mu,p}}^p dt' \right)^{1-\frac{r}{2}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

将估计 (3.2)、(3.13) 和 (3.14) 代入 (3.1), 即得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} \|\omega_{\frac{r}{2}}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{r-1}{r^2} \int_0^t \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}(t')\|_{L^2}^2 dt' \\ &\leq \frac{1}{r} \|\omega_0\|_{L^2}^{\frac{r}{2}} + C \int_0^t \|v^3\|_{\text{SC}}^p \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 dt' + C \left(\int_0^t \|\partial_3^2 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 dt' \right)^{\frac{r}{2}} \left(\int_0^t \|v^3\|_{\mathcal{B}_{q_1,q_2,r}^{\mu,p}}^p dt' \right)^{1-\frac{r}{2}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

应用 Gronwall 不等式, 并注意到一个初等事实, 即对任意常数 C 一定可以找到另一个常数 $C' > C$ 使得对任意 $x \geq 0$, $x^{1-\frac{r}{2}} e^{Cx} \lesssim e^{C'x}$ 成立, 便可得到所需要的估计 (2.3).

4 对 $\partial_3 v^3$ 的估计

本节的目的是给出命题 2.2 的证明. 首先回顾 $(\widetilde{\text{NS}})$ 中 $\partial_3 v^3$ 的方程:

$$\partial_t \partial_3 v^3 + v \cdot \nabla \partial_3 v^3 - \Delta \partial_3 v^3 + \partial_3 v \cdot \nabla v^3 = -\partial_3^2 \Delta^{-1} \left(\sum_{\ell,m=1}^3 \partial_\ell v^m \partial_m v^\ell \right). \quad (4.1)$$

对定义 2.1 给出的范数 $\mathcal{H}^{\theta,r}$, 对 (4.1) 和 $\partial_3 v^3$ 取 $\mathcal{H}^{\theta,r}$ 内积得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_3 v^3(t)\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 + \|\nabla \partial_3 v^3(t)\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 = - \sum_{n=1}^3 (Q_n(v, v) | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}, \quad \text{其中} \\ &Q_1(v, v) \stackrel{\text{def}}{=} (\text{Id} + \partial_3^2 \Delta^{-1}) (\partial_3 v^3)^2 + \partial_3^2 \Delta^{-1} \left(\sum_{\ell,m=1}^2 \partial_\ell v^m \partial_m v^\ell \right), \\ &Q_2(v, v) \stackrel{\text{def}}{=} (\text{Id} + 2\partial_3^2 \Delta^{-1}) \left(\sum_{\ell=1}^2 \partial_3 v^\ell \partial_\ell v^3 \right), \quad \text{以及 } Q_3(v, v) \stackrel{\text{def}}{=} v \cdot \nabla \partial_3 v^3. \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.1 $(Q_1(v, v) | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta, r}}$ 的估计

$(Q_1(v, v) | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta, r}}$ 的估计依赖于下述引理:

引理 4.1 令 $r \in [3/2, 2]$, $\theta \in [0, \alpha(r)]$, $p \in [4, \infty]$, $s_1, s_2 \in [1, \infty]$ 满足

$$\frac{2}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{p'} + 3\alpha(r), \quad \theta < \frac{1}{s_2} < \frac{1}{p'} - 3\alpha(r) + \theta. \quad (4.3)$$

若 Fourier 乘子 $L(D)$ 满足对任意 $q \in [1, \infty]$ 均为 L^q 有界的, 则成立下述估计:

$$|(L(D)(fg) | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta, r}}| \lesssim \|f\|_{\mathcal{H}_{p, s_2}^{\theta, r}} \|g\|_{\mathcal{H}_{p, s_2}^{\theta, r}} \cdot \|v^3\|_{(\dot{B}_{s_1, \infty}^0)_h (\dot{B}_{s_2, \infty}^{\frac{1}{p} + 3\alpha(r)})_v}, \quad (4.4)$$

其中 $\|f\|_{\mathcal{H}_{p, s_2}^{\theta, r}} \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_{\dot{H}_{p, \frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - \theta}} + \|f\|_{\dot{H}_{p, \frac{1}{p'} - \frac{1}{s_2} - 3\alpha(r) + \theta, \frac{1}{s_2} - \theta}}.$

证明 注意到 $\mathcal{H}^{\theta, r} = (\dot{B}_{2, 2}^{-3\alpha(r) + \theta})_h (\dot{B}_{2, 2}^{-\theta})_v$, 我们有

$$(L(D)(fg) | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta, r}} = \sum_{k, \ell \in \mathbb{Z}} 2^{2k(-3\alpha(r) + \theta)} 2^{-2\ell\theta} (\Delta_k^h \Delta_\ell^v (L(D)(fg)) | \Delta_k^h \Delta_\ell^v \partial_3 v^3)_{L^2}.$$

应用引理 A.2 可得

$$\begin{aligned} |(L(D)(fg) | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta, r}}| &\lesssim \sum_{k, \ell \in \mathbb{Z}} 2^{2k(-3\alpha(r) + \theta)} 2^{-2\ell\theta} \|\Delta_k^h \Delta_\ell^v (fg)\|_{L_h^{\frac{s_1}{s_1-1}} L_v^{\frac{s_2}{s_2-1}}} 2^\ell \|\Delta_k^h \Delta_\ell^v v^3\|_{L_h^{s_1} L_v^{s_2}} \\ &\lesssim \|fg\|_{(\dot{B}_{s'_1, 1}^{-6\alpha(r) + 2\theta})_h (\dot{B}_{s'_2, 1}^{\frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - 2\theta})_v} \|v^3\|_{(\dot{B}_{s_1, \infty}^0)_h (\dot{B}_{s_2, \infty}^{\frac{1}{p} + 3\alpha(r)})_v}. \end{aligned}$$

从而只需验证

$$\|fg\|_{(\dot{B}_{s'_1, 1}^{-6\alpha(r) + 2\theta})_h (\dot{B}_{s'_2, 1}^{\frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - 2\theta})_v} \lesssim \|f\|_{\mathcal{H}_{p, s_2}^{\theta, r}} \|g\|_{\mathcal{H}_{p, s_2}^{\theta, r}}. \quad (4.5)$$

为了得到这个估计, 我们需要同时对水平变量和竖直变量做 Bony 分解, 即

$$fg = (T^h + R^h + \bar{T}^h)(T^v + R^v + \bar{T}^v)(f, g). \quad (4.6)$$

首先, 应用引理 A.2, 并注意到指标之间的关系式 (4.3), 得到

$$\begin{aligned} \|\Delta_k^h S_{\ell-1}^v f\|_{L_h^2 (L_v^{\frac{2s_2}{s_2-2}})} &\lesssim \sum_{\ell' \leq \ell-2} c_{k, \ell'} 2^{-k(\frac{1}{p'} - \frac{1}{s_2} - 3\alpha(r) + \theta)} 2^{\ell'\theta} \|f\|_{\dot{H}_{p, \frac{1}{p'} - \frac{1}{s_2} - 3\alpha(r) + \theta, \frac{1}{s_2} - \theta}} \\ &\lesssim c_{k, \ell} 2^{-k(\frac{1}{p'} - \frac{1}{s_2} - 3\alpha(r) + \theta)} 2^{\ell\theta} \|f\|_{\dot{H}_{p, \frac{1}{p'} - \frac{1}{s_2} - 3\alpha(r) + \theta, \frac{1}{s_2} - \theta}}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

以及

$$\begin{aligned} \|S_{k-1}^h \Delta_\ell^v f\|_{L_h^{\frac{2s_1}{s_1-2}} (L_v^2)} &\lesssim \sum_{k' \leq k-2} c_{k', \ell} 2^{k'(\frac{2}{s_1} - \theta)} 2^{-\ell(\frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - \theta)} \|f\|_{\dot{H}_{p, \frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - \theta}} \\ &\lesssim c_{k, \ell} 2^{k(\frac{2}{s_1} - \theta)} 2^{-\ell(\frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - \theta)} \|f\|_{\dot{H}_{p, \frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - \theta}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

由 (4.7) 并再次使用引理 A.2 可得

$$\|S_{k-1}^h S_{\ell-1}^v f\|_{L_h^{\frac{2s_1}{s_1-2}} (L_v^{\frac{2s_2}{s_2-2}})} \lesssim \sum_{k' \leq k-2} 2^{\frac{2k'}{s_1}} \|\Delta_{k'}^h S_{\ell-1}^v f\|_{L_h^2 (L_v^{\frac{2s_2}{s_2-2}})}$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \sum_{k' \leq k-2} c_{k',\ell} 2^{k'(\frac{2}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{p'} + 3\alpha(r) - \theta)} 2^{\ell\theta} \|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{s_2} - 3\alpha(r) + \theta, \frac{1}{s_2} - \theta}} \\
&\lesssim c_{k,\ell} 2^{k(6\alpha(r) - \theta)} 2^{\ell\theta} \|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{s_2} - 3\alpha(r) + \theta, \frac{1}{s_2} - \theta}}. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

考虑到 $T^h T^v(f, g)$ 中每项的 Fourier 变换的支集, 我们有下述估计:

$$\begin{aligned}
\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v (T^h + \bar{T}^h) T^v(f, g)\|_{L_h^{s'_1} (L_v^{s'_2})} &\lesssim \sum_{\substack{|k'-k| \leq 4 \\ |\ell'-\ell| \leq 4}} (\|S_{k'-1}^h S_{\ell'-1}^v f\|_{L_h^{\frac{2s_1}{s_1-2}} (L_v^{\frac{2s_2}{s_2-2})}} \|\Delta_{k'}^h \Delta_{\ell'}^v g\|_{L^2} \\
&\quad + \|\Delta_{k'}^h S_{\ell'-1}^v f\|_{L_h^2 (L_v^{\frac{2s_2}{s_2-2})}} \|S_{k'-1}^h \Delta_{\ell'}^v g\|_{L_h^{\frac{2s_1}{s_1-2}} (L_v^2)}) \\
&\lesssim d_{k,\ell} 2^{2k(3\alpha(r) - \theta)} 2^{-\ell(\frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - 2\theta)} \|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{s_2} - 3\alpha(r) + \theta, \frac{1}{s_2} - \theta}} \\
&\quad \times \|g\|_{\dot{H}^{\theta, \frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - \theta}}.
\end{aligned}$$

对称地, 可以得到下述估计:

$$\begin{aligned}
\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v (T^h + \bar{T}^h) \bar{T}^v(f, g)\|_{L_h^{s'_1} (L_v^{s'_2})} &\lesssim d_{k,\ell} 2^{2k(3\alpha(r) - \theta)} 2^{-\ell(\frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - 2\theta)} \\
&\quad \times \|f\|_{\dot{H}^{\theta, \frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - \theta}} \|g\|_{\dot{H}^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{s_2} - 3\alpha(r) + \theta, \frac{1}{s_2} - \theta}}.
\end{aligned}$$

另一方面, 由引理 A.2 得到

$$\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v R^h T^v(f, g)\|_{L_h^{s'_1} (L_v^{s'_2})} \lesssim 2^{\frac{2k}{s_1}} \sum_{\substack{k' \geq k-3 \\ |\ell'-\ell| \leq 4}} \|\Delta_{k'}^h S_{\ell'-1}^v f\|_{L_h^2 (L_v^{\frac{2s_2}{s_2-2})}} \|\tilde{\Delta}_{k'}^h \Delta_{\ell'}^v g\|_{L^2},$$

由此以及 (4.7), 推出

$$\begin{aligned}
\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v R^h T^v(f, g)\|_{L_h^{s'_1} (L_v^{s'_2})} &\lesssim 2^{\frac{2k}{s_1}} \sum_{\substack{k' \geq k-3 \\ |\ell'-\ell| \leq 4}} d_{k',\ell'} 2^{-k'(\frac{1}{p'} - \frac{1}{s_2} - 3\alpha(r) + 2\theta)} 2^{-\ell'(\frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - 2\theta)} \\
&\quad \times \|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{s_2} - 3\alpha(r) + \theta, \frac{1}{s_2} - \theta}} \|g\|_{\dot{H}^{\theta, \frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - \theta}} \\
&\lesssim d_{k,\ell} 2^{2k(3\alpha(r) - \theta)} 2^{-\ell(\frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - 2\theta)} \|f\|_{\mathcal{H}_{p,s_2}^{\theta,r}} \|g\|_{\mathcal{H}_{p,s_2}^{\theta,r}}.
\end{aligned}$$

对称地, 对 $\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v R^h \bar{T}^v(f, g)\|_{L_h^{s'_1} (L_v^{s'_2})}$ 也将成立与上面相同的估计.

再一次用引理 A.2 得到

$$\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v T^h R^v(f, g)\|_{L_h^{s'_1} (L_v^{s'_2})} \lesssim 2^{\frac{\ell}{s_2}} \sum_{\substack{|k'-k| \leq 4 \\ \ell' \geq \ell-3}} \|S_{k'-1}^h \Delta_{\ell'}^v f\|_{L_h^{\frac{2s_1}{s_1-2}} (L_v^2)} \|\Delta_{k'}^h \tilde{\Delta}_{\ell'}^v g\|_{L^2},$$

此式与 (4.3) 和 (4.8) 一起保证了下述估计:

$$\begin{aligned}
\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v T^h R^v(f, g)\|_{L_h^{s'_1} (L_v^{s'_2})} &\lesssim 2^{\frac{\ell}{s_2}} \sum_{\substack{|k'-k| \leq 4 \\ \ell' \geq \ell-3}} d_{k',\ell'} 2^{-k(\frac{1}{p'} - \frac{2}{s_1} - \frac{1}{s_2} - 3\alpha(r) + 2\theta)} 2^{-\ell(\frac{1}{p'} + \frac{1}{s_2} - 3\alpha(r) - \theta)} \\
&\quad \times \|f\|_{\dot{H}^{\theta, \frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - \theta}} \|g\|_{\dot{H}^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{s_2} - 3\alpha(r) + \theta, \frac{1}{s_2} - \theta}} \\
&\lesssim d_{k,\ell} 2^{2k(3\alpha(r) - \theta)} 2^{-\ell(\frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - 2\theta)} \|f\|_{\mathcal{H}_{p,s_2}^{\theta,r}} \|g\|_{\mathcal{H}_{p,s_2}^{\theta,r}}.
\end{aligned}$$

对称地, 对 $\Delta_k^h \Delta_\ell^v \bar{T}^h R^v(f, g)$ 也成立与上面相同的估计.

最后, 再一次使用引理 A.2 以及关系式 (4.3), 得到

$$\begin{aligned} \|\Delta_k^h \Delta_\ell^v R^h R^v(f, g)\|_{L_{h_1}^{s'_1}(L_{v_2}^{s'_2})} &\lesssim 2^{\frac{2k}{s_2}} 2^{\frac{\ell}{s_2}} \sum_{\substack{k' \geq k-3 \\ \ell' \geq \ell-3}} \|\Delta_{k'}^h \Delta_{\ell'}^v f\|_{L^2} \|\tilde{\Delta}_{k'}^h \tilde{\Delta}_{\ell'}^v g\|_{L^2} \\ &\lesssim 2^{\frac{2k}{s_2}} 2^{\frac{\ell}{s_2}} \sum_{\substack{k' \geq k-3 \\ \ell' \geq \ell-3}} d_{k', \ell'} 2^{-k(\frac{1}{p'} - \frac{1}{s_2} - 3\alpha(r) + 2\theta)} 2^{-\ell(\frac{1}{p'} + \frac{1}{s_2} - 3\alpha(r) - 2\theta)} \\ &\quad \times \|f\|_{\dot{H}^{\theta, \frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - \theta}} \|g\|_{\dot{H}^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{s_2} - 3\alpha(r) + \theta, \frac{1}{s_2} - \theta}} \\ &\lesssim d_{k, \ell} 2^{2k(3\alpha(r) - \theta)} 2^{-\ell(\frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - 2\theta)} \|f\|_{\mathcal{H}_{p, s_2}^{\theta, r}} \|g\|_{\mathcal{H}_{p, s_2}^{\theta, r}}. \end{aligned}$$

综上所述, 我们得到了 (4.5), 引理得证. $\square$

由引理 4.1, 其中 f 和 g 取 $\partial_h v_{\text{curl}}^h$, $\partial_h v_{\text{div}}^h$ 或者 $\partial_3 v^3$, 可得

$$|(Q_1(v, v) | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta, r}}| \lesssim \|v^3\|_{(\dot{B}_{s_1, \infty}^0)_h(\dot{B}_{s_2, \infty}^{\frac{1}{p} + 3\alpha(r)})_v} (\|\omega\|_{\mathcal{H}_{p, s_2}^{\theta, r}}^2 + \|\partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}_{p, s_2}^{\theta, r}}^2). \quad (4.10)$$

由于 s_2 满足 (4.3), 从引理 A.6 和 A.7 可推出

$$\|\omega\|_{\mathcal{H}_{p, s_2}^{\theta, r}} \lesssim \|\omega\|_{\dot{H}^{\frac{1}{p'} - 3\alpha(r)}} \lesssim \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2\alpha(r) + \frac{1}{p}} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{1 - \frac{1}{p}}. \quad (4.11)$$

另一方面, 对任意函数 a , 直接从定义 2.1 可导出

$$\begin{aligned} \|a\|_{\dot{H}^{\theta, \frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - \theta}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{a}(\xi)|^2 (|\xi_h|^{6\alpha(r)} |\xi_3|^{2(\frac{1}{p'} - 3\alpha(r))}) \cdot |\xi_h|^{2(-3\alpha(r) + \theta)} |\xi_3|^{-2\theta} d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{a}(\xi)|^{\frac{2}{p}} (|\xi|^2 |\hat{a}(\xi)|^2)^{\frac{1}{p'}} \cdot |\xi_h|^{2(-3\alpha(r) + \theta)} |\xi_3|^{-2\theta} d\xi, \end{aligned}$$

类似地, 由于 $\frac{2}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{p'} + 3\alpha(r)$, 因此有

$$\begin{aligned} \|a\|_{\dot{H}^{\frac{2}{s_1} - 6\alpha(r) + \theta, \frac{1}{s_2} - \theta}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{a}(\xi)|^2 (|\xi_h|^{2(\frac{1}{s_1} - 3\alpha(r))} |\xi_3|^{\frac{2}{s_2}}) \cdot |\xi_h|^{2(-3\alpha(r) + \theta)} |\xi_3|^{-2\theta} d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{a}(\xi)|^{\frac{2}{p}} (|\xi|^2 |\hat{a}(\xi)|^2)^{\frac{1}{p'}} \cdot |\xi_h|^{2(-3\alpha(r) + \theta)} |\xi_3|^{-2\theta} d\xi. \end{aligned}$$

对上述两式应用以 $|\xi_h|^{2(-3\alpha(r) + \theta)} |\xi_3|^{-2\theta} d\xi$ 为测度的 Hölder 不等式给出

$$\|a\|_{\dot{H}^{\theta, \frac{1}{p'} - 3\alpha(r) - \theta}} + \|a\|_{\dot{H}^{\frac{2}{s_1} - 6\alpha(r) + \theta, \frac{1}{s_2} - \theta}} \lesssim \|a\|_{\mathcal{H}^{\theta, r}}^{\frac{1}{p}} \|\nabla a\|_{\mathcal{H}^{\theta, r}}^{1 - \frac{1}{p}}.$$

取 a 为 $\partial_3 v^3$, 即得

$$\|\partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}_{p, s_2}^{\theta, r}} \leq \|\partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta, r}}^{\frac{1}{p}} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta, r}}^{1 - \frac{1}{p}}. \quad (4.12)$$

将 (4.11) 和 (4.12) 代入 (4.10), 再利用 Young 不等式, 得到

$$\begin{aligned} |(Q_1(v, v) | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta, r}}| &\leq \frac{1}{6} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta, r}}^2 + C \|v^3\|_{(\dot{B}_{s_1, \infty}^0)_h(\dot{B}_{s_2, \infty}^{\frac{1}{p} + 3\alpha(r)})_v}^p \|\partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta, r}}^2 \\ &\quad + C \|v^3\|_{(\dot{B}_{s_1, \infty}^0)_h(\dot{B}_{s_2, \infty}^{\frac{1}{p} + 3\alpha(r)})_v} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(2\alpha(r) + \frac{1}{p})} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(1 - \frac{1}{p})}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.2 $|(Q_2(v, v) | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta, r}}|$ 的估计

首先, 用 Bony 分解可得

$$\partial_3 v^h \cdot \nabla_h v^3 = (T^h + R^h + \bar{T}^h)(T^v + R^v + \bar{T}^v)(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3).$$

应用引理 A.2 知,

$$\begin{aligned} \|S_{k-1}^h \Delta_\ell^v \partial_3 v^h\|_{L_h^\infty(L_v^2)} &\lesssim \sum_{k' \leq k-1} 2^{k'} 2^\ell \|\Delta_{k'}^h \Delta_\ell^v v^h\|_{L^2} \\ &\lesssim \sum_{k' \leq k-1} c_{k', \ell} 2^{k' \mu} 2^{\ell(3\alpha(r) - \mu + \frac{2}{p})} \|v^h\|_{\dot{H}^{1-\mu, 1+\mu-3\alpha(r) - \frac{2}{p}}} \\ &\lesssim c_{k, \ell} 2^{k\mu} 2^{\ell(3\alpha(r) - \mu + \frac{2}{p})} \|v^h\|_{\dot{H}^{1-\mu, 1+\mu-3\alpha(r) - \frac{2}{p}}}. \end{aligned}$$

由此及引理 A.1, 得到

$$\begin{aligned} \|\Delta_k^h \Delta_\ell^v T^h \bar{T}^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{L^2} &\lesssim \sum_{\substack{|k'-k| \leq 4 \\ |\ell'-\ell| \leq 4}} \|S_{k'-1}^h \Delta_{\ell'}^v \partial_3 v^h\|_{L_h^\infty(L_v^2)} 2^{k'} \|\Delta_{k'}^h S_{\ell'-1}^v v^3\|_{L_h^2(L_v^\infty)} \\ &\lesssim c_{k, \ell} 2^{k(1-\frac{2}{p})} 2^{\ell(3\alpha(r) + \frac{2}{p})} \|v^3\|_{(\dot{B}_{2, \infty}^{\frac{2}{p} + \mu})_h (\dot{B}_{\infty, \infty}^{-\mu})_v} \|v^h\|_{\dot{H}^{1-\mu, 1+\mu-3\alpha(r) - \frac{2}{p}}}. \end{aligned}$$

另一方面, 由引理 A.1 和 A.2 推出

$$\begin{aligned} &\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v R^h \bar{T}^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{L^2} \\ &\lesssim 2^k \sum_{\substack{k' \geq k-3 \\ |\ell'-\ell| \leq 4}} \|\Delta_{k'}^h \Delta_{\ell'}^v \partial_3 v^h\|_{L^2} 2^{k'} \|\tilde{\Delta}_{k'}^h S_{\ell'-1}^v v^3\|_{L_h^2(L_v^\infty)} \\ &\lesssim 2^k \sum_{\substack{k' \geq k-3 \\ |\ell'-\ell| \leq 4}} c_{k', \ell'} 2^{-k'\theta} 2^{\ell'(3\alpha(r) + \theta)} \|v^3\|_{(\dot{B}_{2, \infty}^{\frac{2}{p} + \mu})_h (\dot{B}_{\infty, \infty}^{-\mu})_v} \|v^h\|_{\dot{H}^{1+\theta-\mu-\frac{2}{p}, 1+\mu-3\alpha(r)-\theta}} \\ &\lesssim c_{k, \ell} 2^{k(1-\theta)} 2^{\ell(3\alpha(r) + \theta)} \|v^3\|_{(\dot{B}_{2, \infty}^{\frac{2}{p} + \mu})_h (\dot{B}_{\infty, \infty}^{-\mu})_v} \|v^h\|_{\dot{H}^{1+\theta-\mu-\frac{2}{p}, 1+\mu-3\alpha(r)-\theta}}. \end{aligned}$$

如此, 我们证明了

$$\begin{aligned} &\|T^h \bar{T}^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{\dot{H}^{-1+\frac{2}{p}, -3\alpha(r) - \frac{2}{p}}} + \|R^h \bar{T}^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{\dot{H}^{-1+\theta, -3\alpha(r) - \theta}} \\ &\lesssim \|v^3\|_{(\dot{B}_{2, \infty}^{\frac{2}{p} + \mu})_h (\dot{B}_{\infty, \infty}^{-\mu})_v} (\|v^h\|_{\dot{H}^{1-\mu, 1+\mu-3\alpha(r) - \frac{2}{p}}} + \|v^h\|_{\dot{H}^{1+\theta-\mu-\frac{2}{p}, 1+\mu-3\alpha(r)-\theta}}). \end{aligned} \quad (4.14)$$

注意到

$$\begin{aligned} \|\Delta_k^h \Delta_\ell^v \bar{T}^h \bar{T}^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{L^2} &\lesssim \sum_{\substack{|k'-k| \leq 4 \\ |\ell'-\ell| \leq 4}} \|\Delta_{k'}^h \Delta_{\ell'}^v \partial_3 v^h\|_{L^2} \|S_{k'-1}^h S_{\ell'-1}^v \nabla_h v^3\|_{L^\infty}, \\ \|S_{k-1}^h S_{\ell-1}^v \nabla_h v^3\|_{L^\infty} &\lesssim \sum_{\substack{k' \leq k-2 \\ \ell' \leq \ell-2}} 2^{k'(\frac{5}{3} - \frac{4}{3p})} 2^{\ell'(\frac{1}{3} - \frac{2}{3p})} \|\Delta_{k'}^h \Delta_{\ell'}^v v^3\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}} \\ &\lesssim 2^{k(\frac{5}{3} - \frac{4}{3p})} 2^{\ell(\frac{1}{3} - \frac{2}{3p})} \|\Delta_{k'}^h \Delta_{\ell'}^v v^3\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}}, \end{aligned}$$

得到

$$\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v \bar{T}^h \bar{T}^v (\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{L^2} \lesssim c_{k,\ell} 2^{k(\frac{2}{3} - \frac{4}{3p})} 2^{\ell(3\alpha(r) + \frac{1}{3} + \frac{4}{3p})} \|v^h\|_{\dot{H}^{1,1-3\alpha(r)-\frac{2}{p}}} \|v^3\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}},$$

此即

$$\|\bar{T}^h \bar{T}^v (\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{\dot{H}^{-\frac{2}{3} + \frac{4}{3p}, -\frac{1}{3} - \frac{4}{3p} - 3\alpha(r)}} \lesssim \|v^h\|_{\dot{H}^{1,1-3\alpha(r)-\frac{2}{p}}} \|v^3\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}}. \quad (4.15)$$

注意到 ∂_3 在 $T^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)$ 中是作用在低频项上的, 而在 $\bar{T}^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)$ 中是作用在高频项上的, 从而很自然地我们会相信, 若将估计 (4.14) 和 (4.15) 中的 $\bar{T}^v$ 替换成 T^v , 所得到的新估计依然成立. 事实上, 只需完全按照 (4.14) 和 (4.15) 这两个估计的证明步骤, 不难验证

$$\begin{aligned} & \|T^h T^v (\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{\dot{H}^{-1+\frac{2}{p}, -3\alpha(r)-\frac{2}{p}}} + \|R^h T^v (\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{\dot{H}^{-1+\theta, -3\alpha(r)-\theta}} \\ & \lesssim \|v^3\|_{(\dot{B}_{2,\infty}^{\frac{2}{p}+\mu})_h (\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\mu})_v} (\|v^h\|_{\dot{H}^{1-\mu, 1+\mu-3\alpha(r)-\frac{2}{p}}} + \|v^h\|_{\dot{H}^{1+\theta-\mu-\frac{2}{p}, 1+\mu-3\alpha(r)-\theta}}), \end{aligned} \quad (4.16)$$

以及

$$\|\bar{T}^h T^v (\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{\dot{H}^{-\frac{2}{3} + \frac{4}{3p}, -\frac{1}{3} - \frac{4}{3p} - 3\alpha(r)}} \lesssim \|v^h\|_{\dot{H}^{1,1-3\alpha(r)-\frac{2}{p}}} \|v^3\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}}. \quad (4.17)$$

另一方面, 由引理 A.1 以及插值不等式, 不难得到

$$\begin{aligned} \|S_{k-1}^h \Delta_\ell^v \nabla_h v^3\|_{L^2} & \lesssim c_{k,\ell} 2^{k(\frac{1}{3} + \frac{4}{3p} + 6\alpha(r) - 2\theta)} 2^{-\ell(\frac{4}{3} + \frac{4}{3p} + 3\alpha(r) - 2\theta)} \|v^3\|_{\dot{H}^{\frac{2}{3} - \frac{4}{3p} - 6\alpha(r) + 2\theta, \frac{4}{3} + \frac{4}{3p} + 3\alpha(r) - 2\theta}} \\ & \lesssim c_{k,\ell} 2^{k(\frac{1}{3} + \frac{4}{3p} + 6\alpha(r) - 2\theta)} 2^{-\ell(\frac{4}{3} + \frac{4}{3p} + 3\alpha(r) - 2\theta)} \|\nabla_h \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^{\frac{2}{3} - \frac{4}{3p} - 3\alpha(r) + \theta} \|\partial_3^2 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^{\frac{1}{3} + \frac{4}{3p} + 3\alpha(r) - \theta} \\ & \lesssim c_{k,\ell} 2^{k(\frac{1}{3} + \frac{4}{3p} + 6\alpha(r) - 2\theta)} 2^{-\ell(\frac{4}{3} + \frac{4}{3p} + 3\alpha(r) - 2\theta)} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}. \end{aligned}$$

用引理 A.2 容易得到

$$\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v \partial_3 v^h\|_{L^2} \lesssim c_{k,\ell} 2^{-k} 2^{\ell(\frac{2}{p} + 3\alpha(r))} \|v^h\|_{\dot{H}^{1,1-\frac{2}{p}-3\alpha(r)}}.$$

由以上的两个估计, 推出

$$\begin{aligned} & \|\Delta_k^h \Delta_\ell^v \bar{T}^h R^v (\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{L^{\frac{3p}{2(p+1)}}} \\ & \lesssim 2^{\frac{\ell}{3}(1-\frac{2}{p})} \sum_{\substack{|k'-k| \leq 4 \\ \ell' \geq \ell-3}} d_{k',\ell'} 2^{k'(6\alpha(r)-2\theta)} 2^{-\ell(\frac{4}{3} - \frac{2}{3p} - 2\theta)} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}} \|v^h\|_{\dot{H}^{1,1-\frac{2}{p}-3\alpha(r)}} \\ & \lesssim d_{k,\ell} 2^{k(6\alpha(r)-2\theta)} 2^{-\ell(1-2\theta)} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}} \|v^h\|_{\dot{H}^{1,1-\frac{2}{p}-3\alpha(r)}}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

类似地, 由假设 $p > 4$, $r > \frac{9}{5}$, $\theta > 0$, 不难验证

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{3p} - 6\alpha(r) + 2\theta > 0. \quad (4.19)$$

从而有

$$\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v R^h R^v (\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{L^{\frac{3p}{2(p+1)}}}$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim 2^{\frac{2k}{3}(1-\frac{2}{p})} 2^{\frac{\ell}{3}(1-\frac{2}{p})} \sum_{\substack{k' \geq k-3 \\ \ell' \geq \ell-3}} \|\Delta_{k'}^h \Delta_{\ell'}^v \partial_3 v^h\|_{L^2} \|\tilde{\Delta}_{k'}^h \tilde{\Delta}_{\ell'}^v \nabla_h v^3\|_{L^2} \\
&\lesssim 2^{\frac{2k}{3}(1-\frac{2}{p})} 2^{\frac{\ell}{3}(1-\frac{2}{p})} \sum_{\substack{k' \geq k-3 \\ \ell' \geq \ell-3}} d_{k',\ell'} 2^{-k'(\frac{2}{3}-\frac{4}{3p}-6\alpha(r)+2\theta)} 2^{-\ell'(\frac{4}{3}-\frac{2}{3p}-2\theta)} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}} \|v^h\|_{\dot{H}^{1,1-\frac{2}{p}-3\alpha(r)}} \\
&\lesssim d_{k,\ell} 2^{k(6\alpha(r)-2\theta)} 2^{-\ell(1-2\theta)} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}} \|v^h\|_{\dot{H}^{1,1-\frac{2}{p}-3\alpha(r)}}.
\end{aligned}$$

由此及估计 (4.18), 得到

$$\|(\bar{T}^h + R^h)R^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{\dot{B}^{-6\alpha(r)+2\theta,1-2\theta}_{\frac{3p}{2p+2},1}} \lesssim \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}} \|v^h\|_{\dot{H}^{1,1-\frac{2}{p}-3\alpha(r)}}. \quad (4.20)$$

对 $T^h R^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)$ 的估计完全类似. 首先有

$$\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v \nabla_h v^3\|_{L^2} \lesssim c_{k,\ell} 2^{-k(2\theta-6\alpha(r)-\frac{2}{p})} 2^{-\ell(1+3\alpha(r)-2\theta+\frac{2}{p})} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}.$$

由此以及引理 A.1 和 A.2 推出

$$\begin{aligned}
&\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v T^h R^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{L_h^2(L_v^1)} \\
&\lesssim \sum_{\substack{|k'-k| \leq 4 \\ \ell' \geq \ell-3}} \|S_{k'-1}^h \Delta_{\ell'}^v \partial_3 v^h\|_{L_h^\infty(L^2)} \|\Delta_{k'}^h \tilde{\Delta}_{\ell'}^v \nabla_h v^3\|_{L^2} \\
&\lesssim \sum_{\substack{|k'-k| \leq 4 \\ \ell' \geq \ell-3}} d_{k',\ell'} 2^{k'(\frac{2}{p}+6\alpha(r)+\mu-2\theta)} 2^{-\ell'(1+\mu-2\theta)} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}} \|v^h\|_{\dot{H}_{2,1}^{1-\mu,1-\frac{2}{p}-3\alpha(r)+\mu}} \\
&\lesssim d_{k,\ell} 2^{k(\frac{2}{p}+6\alpha(r)+\mu-2\theta)} 2^{-\ell(1+\mu-2\theta)} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}} \|v^h\|_{\dot{H}_{2,1}^{1-\mu,1-\frac{2}{p}-3\alpha(r)+\mu}},
\end{aligned}$$

此即

$$\|T^h R^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{(\dot{B}_{2,1}^{-\frac{2}{p}-6\alpha(r)+2\theta-\mu})_h(\dot{B}_{1,1}^{1-2\theta+\mu})_v} \lesssim \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}} \|v^h\|_{\dot{H}_{2,1}^{1-\mu,1-\frac{2}{p}-3\alpha(r)+\mu}}. \quad (4.21)$$

下面来完成 $|(Q_2(v, v) | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}|$ 的估计. 首先, 由估计 (4.14)–(4.17) 可得

$$\begin{aligned}
&|((\text{Id} + 2\partial_3^2 \Delta^{-1})\bar{T}^h(T^v + \bar{T}^v)(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3) | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}| \\
&\lesssim \|\bar{T}^h(T^v + \bar{T}^v)(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{\dot{H}^{-\frac{2}{3}+\frac{4}{3p},-\frac{1}{3}-\frac{4}{3p}-3\alpha(r)}} \|\partial_3 v^3\|_{\dot{H}^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3p}-6\alpha(r)+2\theta,\frac{1}{3}+\frac{4}{3p}+3\alpha(r)-2\theta}} \\
&\lesssim \|v^3\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}} \|v^h\|_{\dot{H}^{1,1-\frac{2}{p}-3\alpha(r)}} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}},
\end{aligned} \quad (4.22)$$

以及

$$\begin{aligned}
&|((\text{Id} + 2\partial_3^2 \Delta^{-1})(T^h + R^h)(T^v + \bar{T}^v)(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3) | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}| \\
&\lesssim \|T^h(T^v + \bar{T}^v)(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{\dot{H}^{-1+\frac{2}{p},-\frac{2}{p}-3\alpha(r)}} \|\partial_3 v^3\|_{\dot{H}^{1-\frac{2}{p}-6\alpha(r)+2\theta,\frac{2}{p}+3\alpha(r)-2\theta}} \\
&\quad + \|R^h(T^v + \bar{T}^v)(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{\dot{H}^{-1+\theta,-\theta-3\alpha(r)}} \|\partial_3 v^3\|_{\dot{H}^{1-\theta-6\alpha(r)+2\theta,3\alpha(r)-\theta}} \\
&\lesssim \|v^3\|_{(\dot{B}_{2,\infty}^{\frac{2}{p}+\mu})_h(\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\mu})_v} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}} \\
&\quad \times (\|v^h\|_{\dot{B}_{2,1}^{1-\mu,1-\frac{2}{p}-3\alpha(r)+\mu}} + \|v^h\|_{\dot{B}_{2,1}^{1-\frac{2}{p}+\theta-\mu,1-3\alpha(r)-\theta+\mu}}).
\end{aligned} \quad (4.23)$$

由估计 (4.20) 和 (4.21), 得到

$$\begin{aligned}
 & |((\text{Id} + 2\partial_3^2 \Delta^{-1})(\bar{T}^h + R^h)R^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3) \mid \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}| \\
 & \lesssim \|(\bar{T}^h + R^h)R^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{\dot{B}_{\frac{3p}{2p+2},1}^{-6\alpha(r)+2\theta,1-2\theta}} \|\partial_3 v^3\|_{\dot{B}_{\frac{3p}{p-2},\infty}^{0,-1}} \\
 & \lesssim \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}} \|v^h\|_{\dot{B}_{2,1}^{1,1-\frac{2}{p}-3\alpha(r)}} \|v^3\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}}, \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
 & |((\text{Id} + 2\partial_3^2 \Delta^{-1})T^h R^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3) \mid \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}| \\
 & \lesssim \|T^h R^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)\|_{(\dot{B}_{2,1}^{-\frac{2}{p}-6\alpha(r)+2\theta-\mu})_h(\dot{B}_{1,1}^{1-2\theta+\mu})_v} \|\partial_3 v^3\|_{(\dot{B}_{2,\infty}^{\frac{2}{p}+\mu})_h(\dot{B}_{\infty,\infty}^{1-\mu})_v} \\
 & \lesssim \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}} \|v^\ell\|_{\dot{B}_{2,1}^{1-\mu,1-\frac{2}{p}-3\alpha(r)+\mu}} \|v^3\|_{(\dot{B}_{2,\infty}^{\frac{2}{p}+\mu})_h(\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\mu})_v}. \tag{4.25}
 \end{aligned}$$

注意到引理 A.3 保证了 $(\dot{B}_{q_1,\infty}^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q_1}-1+\mu})_h(\dot{B}_{q_2,\infty}^{\frac{1}{q_2}-\mu})_v \hookrightarrow (\dot{B}_{2,\infty}^{\frac{2}{p}+\mu})_h(\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\mu})_v$. 由上述估计 (4.22)–(4.25) 以及引理 A.8 推出

$$\begin{aligned}
 |(Q_2(v, v) \mid \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}| & \leq C \|v^3\|_{\text{SC}} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}} (\|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2\alpha(r)+\frac{2}{p}} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{1-\frac{2}{p}} + \|\partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^{\frac{2}{p}} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^{1-\frac{2}{p}}) \\
 & \leq \frac{1}{6} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 + C \|v^3\|_{\text{SC}}^2 \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(2\alpha(r)+\frac{2}{p})} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(1-\frac{2}{p})} \\
 & \quad + C \|v^3\|_{\text{SC}}^p \|\partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2. \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

4.3 $|(Q_3(v, v) \mid \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}|$ 的估计

首先处理 $|(v^h \cdot \nabla_h \partial_3 v^3 \mid \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}|$. 对 $v^h \cdot \nabla_h \partial_3 v^3$ 做关于竖直方向变量的 Bony 分解得到

$$v^h \cdot \nabla_h \partial_3 v^3 = (T^v + R^v + \bar{T}^v)(v^h, \nabla_h \partial_3 v^3).$$

注意到 ∂_3 在 $\bar{T}^v(v^h, \nabla_h \partial_3 v^3)$ 中是作用在低频项上的, 而在 $\bar{T}^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)$ 中是作用在高频项上的, 从而我们相信关于 $\bar{T}^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)$ 的估计, 对 $\bar{T}^v(v^h, \nabla_h \partial_3 v^3)$ 也同样成立. 出于同样的考虑, 我们也认为 $R^v(v^h, \nabla_h \partial_3 v^3)$ 与 $R^v(\partial_3 v^h, \nabla_h v^3)$ 会有相同的估计. 事实上, 完全按照之前估计 $|(Q_2(v, v) \mid \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}|$ 的做法, 便可得到

$$\begin{aligned}
 |((\bar{T}^v + R^v)(v^h, \nabla_h \partial_3 v^3) \mid \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}| & \leq \frac{1}{6} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 + C \|v^3\|_{\text{SC}}^p \|\partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 \\
 & \quad + C \|v^3\|_{\text{SC}}^2 \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(2\alpha(r)+\frac{2}{p})} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(1-\frac{2}{p})}. \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

从而为完成对 $|(Q_3(v, v) \mid \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}|$ 的估计, 我们只需再来处理 $T^v(v^h, \nabla_h \partial_3 v^3)$ 这一项. 对该项进一步再做关于水平方向变量的 Bony 分解给出

$$T^v(v^h, \nabla_h \partial_3 v^3) = (T^h + R^h + \bar{T}^h)T^v(v^h, \nabla_h \partial_3 v^3).$$

首先考虑其中的 $T^h T^v$ 项, 我们按定义将其写为

$$(T^h T^v(v^h, \nabla_h \partial_3 v^3) \mid \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}} = \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} 2^{2k(-3\alpha(r)+\theta)} 2^{-2\ell\theta} (I_{k,\ell}^1 + I_{k,\ell}^2 + I_{k,\ell}^3), \tag{4.28}$$

其中

$$\begin{aligned}
 I_{k,\ell}^1 &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{|k'-k|\leq 4 \\ |\ell'-\ell|\leq 4}} ([\Delta_k^h \Delta_{\ell'}^v, S_{k'-1}^h S_{\ell'-1}^v \nabla_h v^h] \Delta_{k'}^h \Delta_{\ell'}^v \nabla_h \partial_3 v^3 \mid \Delta_k^h \Delta_{\ell'}^v \partial_3 v^3)_{L^2}, \\
 I_{k,\ell}^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{|k'-k|\leq 4 \\ |\ell'-\ell|\leq 4}} ((S_{k'-1}^h S_{\ell'-1}^v \nabla_h v^h - S_{k-1}^h S_{\ell-1}^v \nabla_h v^h) \Delta_{k'}^h \Delta_{\ell'}^v \Delta_k^h \Delta_{\ell}^v \nabla_h \partial_3 v^3 \mid \Delta_k^h \Delta_{\ell}^v \partial_3 v^3)_{L^2}, \\
 I_{k,\ell}^3 &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} (S_{k-1}^h S_{\ell-1}^v \operatorname{div}_h v^h \cdot \Delta_k^h \Delta_{\ell}^v \partial_3 v^3 \mid \Delta_k^h \Delta_{\ell}^v \partial_3 v^3)_{L^2}.
 \end{aligned}$$

标准的交换子估计 (如文献 [10]) 给出

$$\begin{aligned}
 |I_{k,\ell}^1| &\lesssim \sum_{\substack{|k'-k|\leq 4 \\ |\ell'-\ell|\leq 4}} (2^{-k} \|S_{k'-1}^h S_{\ell'-1}^v \nabla_h v^h\|_{L^{\frac{6p}{p+4}}} \|\Delta_{k'}^h \Delta_{\ell'}^v \nabla_h \partial_3 v^3\|_{L^2} \|\Delta_k^h \Delta_{\ell}^v \partial_3 v^3\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}}) \\
 &\quad + 2^{-\ell} \|S_{k'-1}^h S_{\ell'-1}^v \partial_3 v^h\|_{L_h^\infty L_v^2} \|\Delta_{k'}^h \Delta_{\ell'}^v \nabla_h \partial_3 v^3\|_{L_h^2 L_v^\infty} \|\Delta_k^h \Delta_{\ell}^v \partial_3 v^3\|_{L^2} \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} I_{k,\ell}^{1,1} + I_{k,\ell}^{1,2}.
 \end{aligned}$$

注意到 $-3\alpha(r) + \theta < 0$, $-\theta < 0$, 应用引理 A.1 和 A.2 得到

$$\begin{aligned}
 I_{k,\ell}^{1,1} &\lesssim c_{k,\ell} 2^{-k(1-3\alpha(r)+\theta)} 2^{\ell\theta} \|\nabla_h v^h\|_{\dot{H}^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3p}-3\alpha(r)+\theta, \frac{1}{3}-\frac{2}{3p}-\theta}}} \\
 &\quad \times c_{k,\ell} 2^{k(1+3\alpha(r)-\theta)} 2^{-\ell(1-\theta)} \|\partial_3 v^3\|_{\dot{H}^{-3\alpha(r)+\theta, 1-\theta}} 2^\ell \|v^3\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}} \\
 &\lesssim d_{k,\ell} 2^{k(6\alpha(r)-2\theta)} 2^{2\ell\theta} \cdot \|\nabla_h v^h\|_{\dot{H}^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3p}-3\alpha(r)+\theta, \frac{1}{3}-\frac{2}{3p}-\theta}}} \|\partial_3^2 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}} \|v^3\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}},
 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
 I_{k,\ell}^{1,2} &\lesssim c_{k,\ell} 2^{k\mu} 2^{\ell(3\alpha(r)+\frac{2}{p}-\mu-1)} \|\partial_3 v^h\|_{\dot{H}_{2,1}^{1-\mu, -3\alpha(r)-\frac{2}{p}+\mu}}} 2^{k(1-\mu-\frac{2}{p})} 2^{\ell(1+\mu)} \|v^3\|_{(\dot{B}_{2,\infty}^{\frac{2}{p}+\mu})_h(\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\mu})_v} \\
 &\quad \times c_{k,\ell} 2^{-k(1-\frac{2}{p}-6\alpha(r)+2\theta)} 2^{-\ell(\frac{2}{p}+3\alpha(r)-2\theta)} \|\partial_3 v^3\|_{\dot{H}^{1-\frac{2}{p}-6\alpha(r)+2\theta, \frac{2}{p}+3\alpha(r)-2\theta}}} \\
 &\lesssim d_{k,\ell} 2^{2k(3\alpha(r)-\theta)} 2^{2\ell\theta} \|v^h\|_{\dot{H}_{2,1}^{1-\mu, 1-3\alpha(r)-\frac{2}{p}+\mu}}} \|v^3\|_{(\dot{B}_{2,\infty}^{\frac{2}{p}+\mu})_h(\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\mu})_v} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}},
 \end{aligned}$$

再关于 k 和 ℓ 求和, 并利用 (2.2)、引理 A.8 和 A.7, 得到

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} 2^{2k(-3\alpha(r)+\theta)} 2^{-2\ell\theta} |I_{k,\ell}^1| \\
 &\lesssim \|v^3\|_{\text{SC}} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}} \cdot (\|(\omega, \partial_3 v^3)\|_{\dot{H}^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3p}-3\alpha(r)+\theta, \frac{1}{3}-\frac{2}{3p}-\theta}}} + \|v^h\|_{\dot{B}_{2,1}^{1-\mu, 1-3\alpha(r)-\frac{2}{p}+\mu}}) \\
 &\lesssim \|v^3\|_{\text{SC}} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}} \cdot (\|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2\alpha(r)+\frac{2}{p}} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{1-\frac{2}{p}} + \|\partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^{\frac{2}{p}} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^{1-\frac{2}{p}}). \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

关于 $I_{k,\ell}^2$ 的估计与对 $I_{k,\ell}^{1,2}$ 的类似, 对 $I_{k,\ell}^3$ 的估计与对 $I_{k,\ell}^{1,1}$ 的类似, 将这些估计代入 (4.28) 并用 Young 不等式, 得到

$$\begin{aligned}
 |(T^h T^v(v^h, \nabla_h \partial_3 v^3) \mid \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}| &\leq \frac{1}{36} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 + C \|v^3\|_{\text{SC}}^p \|\partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 \\
 &\quad + C \|v^3\|_{\text{SC}}^2 \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(2\alpha(r)+\frac{2}{p})} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(1-\frac{2}{p})}. \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

注意到, ∇_h 在 $T^h(v^h, \nabla_h \partial_3 v^3)$ 中作用在高频项上, 从而重复 (4.30) 的证明过程, 可得

$$\begin{aligned} |((\bar{T}^h + R^h)T^v(v^h, \nabla_h \partial_3 v^3) | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}| &\leq \frac{1}{36} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 + C \|v^3\|_{\text{SC}}^p \|\partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 \\ &\quad + C \|v^3\|_{\text{SC}}^2 \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(2\alpha(r)+\frac{2}{p})} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(1-\frac{2}{p})}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

综合估计 (4.27)、(4.30) 和 (4.31) 即给出

$$\begin{aligned} |(v^h \cdot \nabla_h \partial_3 v^3 | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}| &\leq \frac{2}{9} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 + C \|v^3\|_{\text{SC}}^p \|\partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 \\ &\quad + C \|v^3\|_{\text{SC}}^2 \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(2\alpha(r)+\frac{2}{p})} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(1-\frac{2}{p})}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

为估计 $|(v^3 \cdot \partial_3^2 v^3 | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}|$, 我们先做分部积分得到

$$(v^3 \cdot \partial_3^2 v^3 | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}} = -\frac{1}{2} (\partial_3 v^3 \cdot \partial_3 v^3 | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}},$$

再应用引理 4.1 以及插值不等式, 推出

$$\begin{aligned} |(v^3 \cdot \partial_3^2 v^3 | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}| &\lesssim \|\partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}_{p,s_2}^{\theta,r}}^2 \|v^3\|_{(\dot{B}_{s_1,\infty}^0)_h(\dot{B}_{s_2,\infty}^{\frac{1}{p}+3\alpha(r)})_v} \\ &\lesssim \|\partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^{\frac{2}{p}} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^{2(1-\frac{1}{p})} \|v^3\|_{(\dot{B}_{s_1,\infty}^0)_h(\dot{B}_{s_2,\infty}^{\frac{1}{p}+3\alpha(r)})_v}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

综合估计 (4.32) 和 (4.33), 再利用 Young 不等式, 得出

$$\begin{aligned} |(Q_3(v, v) | \partial_3 v^3)_{\mathcal{H}^{\theta,r}}| &\leq \frac{1}{3} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 + C \|v^3\|_{\text{SC}}^2 \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(2\alpha(r)+\frac{2}{p})} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(1-\frac{2}{p})} \\ &\quad + C (\|v^3\|_{\text{SC}}^p + \|v^3\|_{(\dot{B}_{s_1,\infty}^0)_h(\dot{B}_{s_2,\infty}^{\frac{1}{p}+3\alpha(r)})_v}^p) \|\partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

至此我们已经做好了证明命题 2.2 的一切准备工作.

命题 2.2 的证明 由命题 2.2 的条件知 $q_2 < (\frac{1}{p} + 3\alpha(r) + \mu)^{-1}$, 从而可以找到 s_1 和 s_2 满足

$$\frac{1}{s_2} = \frac{1}{p} + 3\alpha(r) + \mu < \frac{1}{q_2}, \quad \frac{2}{s_1} = 1 - \frac{2}{p} - \mu < \frac{2}{q_1}.$$

由引理 A.3 知, $(\dot{B}_{q_1,\infty}^{\frac{2}{p}+\frac{1}{q_1}-1+\mu})_h(\dot{B}_{q_2,\infty}^{\frac{1}{q_2}-\mu})_v \hookrightarrow (\dot{B}_{s_1,\infty}^0)_h(\dot{B}_{s_2,\infty}^{\frac{1}{p}+3\alpha(r)})_v$. 从而将之前得到的估计 (4.13)、(4.26) 和 (4.34) 代入 (4.2), 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\partial_3 v^3(t)\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 + \|\nabla \partial_3 v^3(t)\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 &\leq C \|v^3\|_{\text{SC}}^p \|\partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^2 + C \|v^3\|_{\text{SC}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(2\alpha(r)+\frac{1}{p})} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(1-\frac{1}{p})} \\ &\quad + C \|v^3\|_{\text{SC}}^2 \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(2\alpha(r)+\frac{2}{p})} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2(1-\frac{2}{p})}. \end{aligned}$$

应用 Gronwall 不等式即可得到所需要的估计 (2.5). □

参考文献

- 1 Fujita H, Kato T. On the Navier-Stokes initial value problem, I. Arch Ration Mech Anal, 1964, 16: 269–315
- 2 Kenig C E, Koch G S. An alternative approach to regularity for the Navier-Stokes equations in critical spaces. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2011, 28: 159–187

- 3 Escauriaza L, Seregin G A, Sverak V. $L_{3,\infty}$ -solutions of the Navier-Stokes equations and backward uniqueness. Russian Math Surveys, 2003, 58: 211–250
- 4 Chemin J Y, Zhang P, Zhang Z. On the critical one component regularity for 3-D Navier-Stokes system: General case. Arch Ration Mech Anal, 2017, 224: 871–905
- 5 Chemin J Y, Zhang P. On the critical one component regularity for 3-D Navier-Stokes system. Ann Sci École Norm Sup (4), 2016, 49: 131–167
- 6 Han B, Lei Z, Li D, et al. Sharp one component regularity for Navier-Stokes. ArXiv:1708.04119, 2017
- 7 Chemin J Y, Desjardins B, Gallagher I, et al. Fluids with anisotropic viscosity. Modél Math Anal Numér, 2000, 34: 315–335
- 8 Chemin J Y, Zhang P. On the global wellposedness to the 3-D incompressible anisotropic Navier-Stokes equations. Comm Math Phys, 2007, 272: 529–566
- 9 Paicu M. Équation anisotrope de Navier-Stokes dans des espaces critiques. Rev Mat Iberoam, 2005, 21: 179–235
- 10 Bahouri H, Chemin J Y, Danchin R. Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 343. Heidelberg: Springer-Verlag, 2011
- 11 Liu Y, Zhang P. Global well-posedness of 3-D anisotropic Navier-Stokes system with large vertical viscous coefficient. ArXiv:1708.04731, 2017
- 12 Bony J M. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. Ann Sci École Norm Sup (4), 1981, 14: 209–246

附录 A Littlewood-Paley 理论及函数空间

首先回顾各向同性的齐次 Besov 空间.

定义 A.1 令 $\mathcal{S}'_h \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathcal{S}' \mid \lim_{j \rightarrow -\infty} \|S_j u\|_{L^\infty} = 0\}$, 其中 $\mathcal{S}'_h$ 表示缓增分布. 对 $(p, q, r) \in [1, \infty]^3$, $s \in \mathbb{R}$, 及 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 定义范数 $\|u\|_{\dot{B}_{p,r}^s} \stackrel{\text{def}}{=} \|(2^{js} \|\Delta_j u\|_{L^p})_j\|_{\ell^r(\mathbb{Z})}$, 并以此定义 Besov 空间如下:

(1) 对 $s < \frac{d}{p}$ (或者 $s = \frac{d}{p}$, $r = 1$), 定义 $\dot{B}_{p,r}^s(\mathbb{R}^d) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d) \mid \|u\|_{\dot{B}_{p,r}^s} < \infty\}$.

(2) 若 $k \in \mathbb{N}$ 且 $\frac{d}{p} + k \leq s < \frac{d}{p} + k + 1$ (或者 $s = \frac{d}{p} + k + 1$, $r = 1$), 定义 $\dot{B}_{p,r}^s(\mathbb{R}^d)$ 为 $\mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$ 中满足对任意 $|\beta| = k$ 的多重指标 β 均有 $\partial^\beta u \in \dot{B}_{p,r}^{s-k}(\mathbb{R}^d)$ 的 u 所成的集合.

当 $s < 0$ 时, Besov 空间 $\dot{B}_{p,r}^s$ 还有如下的等价定义:

引理 A.1 (参见文献 [10, 命题 2.33]) 对 $s < 0$, $1 \leq p, r \leq \infty$, $u \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$, $u \in \dot{B}_{p,r}^s(\mathbb{R}^d)$ 当且仅当

$$(2^{js} \|\dot{S}_j u\|_{L^p})_{j \in \mathbb{Z}} \in \ell^r.$$

具体来说, 存在某一个只依赖于空间维数 d 的正常数 C 使得

$$C^{-|s|+1} \|u\|_{\dot{B}_{p,r}^s} \leq \|(2^{js} \|\dot{S}_j u\|_{L^p})_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^r} \leq C \left(1 + \frac{1}{|s|}\right) \|u\|_{\dot{B}_{p,r}^s}.$$

为方便读者, 回顾各向异性的 Bernstein 引理, 其证明可参见文献 [8, 9]:

引理 A.2 令 $\mathcal{B}_h$ 和 $\mathcal{B}_v$ 分别是 $\mathbb{R}_h^2$ 和 $\mathbb{R}_v$ 中的球, $\mathcal{C}_h$ 和 $\mathcal{C}_v$ 分别是 $\mathbb{R}_h^2$ 和 $\mathbb{R}_v$ 中的圆环, 则对 $1 \leq p_2 \leq p_1 \leq \infty$ 和 $1 \leq q_2 \leq q_1 \leq \infty$, 成立下述结论:

$$\text{Supp } \hat{a} \subset 2^k \mathcal{B}_h \Rightarrow \|\partial_{x_h}^\alpha a\|_{L_h^{p_1}(L_v^{q_1})} \lesssim 2^{k(|\alpha|+2(1/p_2-1/p_1))} \|a\|_{L_h^{p_2}(L_v^{q_1})};$$

$$\text{Supp } \hat{a} \subset 2^\ell \mathcal{B}_v \Rightarrow \|\partial_{x_3}^\beta a\|_{L_h^{p_1}(L_v^{q_1})} \lesssim 2^{\ell(\beta+(1/q_2-1/q_1))} \|a\|_{L_h^{p_1}(L_v^{q_2})};$$

$$\text{Supp } \hat{a} \subset 2^k \mathcal{C}_h \Rightarrow \|a\|_{L_h^{p_1}(L_v^{q_1})} \lesssim 2^{-kN} \sup_{|\alpha|=N} \|\partial_{x_h}^\alpha a\|_{L_h^{p_1}(L_v^{q_1})};$$

$$\text{Supp } \hat{a} \subset 2^\ell \mathcal{C}_v \Rightarrow \|a\|_{L_h^{p_1}(L_v^{q_1})} \lesssim 2^{-\ell N} \|\partial_{x_3}^N a\|_{L_h^{p_1}(L_v^{q_1})}.$$

引理 A.3 (参见文献 [10, 命题 2.20]) 对 $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$, 有

$$\dot{B}_{p_1, r_1}^s \hookrightarrow \dot{B}_{p_2, r_2}^{s-d(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}.$$

引理 A.4 (参见文献 [10, 定理 2.40 和 2.41]) 对任意 $p \in [2, \infty]$, 都有如下嵌入关系:

$$\dot{B}_{p,2}^0 \hookrightarrow L^p \hookrightarrow \dot{B}_{p,p}^0, \quad \dot{B}_{p',p'}^0 \hookrightarrow L^{p'} \hookrightarrow \dot{B}_{p',2}^0.$$

引理 A.5 (参见文献 [5, 引理 5.1]) 设 $(s, \alpha) \in [0, 1]^2$, $(p, q) \in [1, \infty]^2$, G 是从 $\mathbb{R}$ 映到 $\mathbb{R}$ 的具有 α 阶 Hölder 连续性的函数, 则对任意 $a \in \dot{B}_{p,q}^s$, 有

$$\|G(a)\|_{\dot{B}_{\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}}^{\alpha s}} \lesssim [G]_{C^\alpha} (\|a\|_{\dot{B}_{p,q}^s})^\alpha, \quad \text{其中 } [G]_{C^\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{r \neq r'} \frac{|G(r) - G(r')|}{|r - r'|^\alpha}.$$

引理 A.6 (参见文献 [5, 引理 4.3]) 对任意正实数 s 和任意 $\theta \in [0, s]$, 成立

$$\|f\|_{(\dot{B}_{p,q}^{s-\theta})_{\text{h}}(\dot{B}_{p,1}^\theta)_{\text{v}}} \lesssim \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}.$$

引理 A.7 (参见文献 [4, 引理 3.1]) 对 $r \in [3/2, 2]$, $s \in [-3\alpha(r), 1 - \alpha(r)]$, 以及任意函数 a , 有

$$\|\nabla a\|_{L^r} \lesssim \|\nabla a_{\frac{r}{2}}\|_{L^2} \|a_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{\frac{2}{r}-1}, \quad (\text{A.1})$$

$$\|a\|_{\dot{H}^s} \leq C \|a_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{1-\alpha(r)-s} \|\nabla a_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{3\alpha(r)+s}. \quad (\text{A.2})$$

下述引理是我们使用各向异性 Besov 空间的主要出发点之一. 它可以看作是文献 [4, 命题 3.1] 和 [11, 命题 2.1] 的推广, 它的证明也可以通过综合这两个命题的证明方法给出, 这里从略.

引理 A.8 对 $\theta \in [0, \alpha(r)]$, 以及 $s < \frac{2}{3}\alpha(r)$, $\beta < \min\{1 - \frac{8}{3}\alpha(r), 1 - 3\alpha(r) + \theta\}$ 满足 $s + \beta > 0$, 考虑一个散度为 0 的向量场 v , 以及它的旋度的第三个分量 $\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$, 有

$$\|v^{\text{h}}\|_{(\dot{B}_{2,1}^{1-s})_{\text{h}}(\dot{B}_{2,1}^{1-3\alpha(r)-\beta})_{\text{v}}} \lesssim \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{2\alpha(r)+s+\beta} \|\nabla \omega_{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{1-s-\beta} + \|\partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^{s+\beta} \|\nabla \partial_3 v^3\|_{\mathcal{H}^{\theta,r}}^{1-s-\beta}.$$

最后回顾文献 [12] 中的 Bony 分解. 对缓增分布 a 和 b , 有如下分解:

$$\begin{aligned} ab &= T(a, b) + \bar{T}(a, b) + R(a, b), \quad \text{其中 } \bar{T}(a, b) = T(b, a), \\ T(a, b) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} S_{j-1} a \Delta_j b, \quad R(a, b) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j a \tilde{\Delta}_j b, \quad \tilde{\Delta}_j b = \sum_{|\ell-j| \leq 1} \Delta_\ell b. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

为了研究各向异性 Besov 空间中元素的乘积律, 我们有时只对水平或者竖直方向变量来做 Bony 分解.

附录 B 估计 (3.5)–(3.7) 的证明

引理 B.1 设 $q_3 > r'$, $\alpha(r) < \min\{\frac{1}{p}, \frac{1}{q_3}\}$, $\delta \in [0, \frac{1}{q_3} - \alpha(r)]$, 则有

$$\begin{aligned} \|S_k^{\text{h}} \Delta_\ell^{\text{v}} \omega_{r-1}\|_{L_{\text{h}}^\infty(L_{\text{v}}^{r'})} &\lesssim c(k, \ell, r') 2^{k(\delta + \frac{2}{p} - 2\alpha(r))} 2^{-\ell\delta} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{\dot{H}^\sigma}^{\frac{2}{r'}}, \\ \|S_k^{\text{h}} S_\ell^{\text{v}} \omega_{r-1}\|_{L_{\text{h}}^\infty(L_{\text{v}}^{m_1})} &\lesssim c(k, \ell, r') 2^{k(\delta + \frac{2}{p} - 2\alpha(r))} 2^{\ell(\frac{1}{q_3} - \delta)} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{\dot{H}^\sigma}^{\frac{2}{r'}}, \quad \text{其中 } \frac{1}{m_1} = \frac{1}{r'} - \frac{1}{q_3}, \\ \|S_k^{\text{h}} S_\ell^{\text{v}} \omega_{r-1}\|_{L_{\text{h}}^\infty(L_{\text{v}}^{m_2})} &\lesssim c(k, \ell, r') 2^{k(\delta + \frac{2}{p} - 2\alpha(r))} 2^{\ell(\frac{1}{q_3} - \alpha(r) - \delta)} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{\dot{H}^\sigma}^{\frac{2}{r'}}, \quad \text{其中 } \frac{1}{m_2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{q_3}. \end{aligned}$$

在此以及下文中, 我们用 $(c_{(k,\ell),r})_{k,\ell \in \mathbb{Z}^2}$ 表示 $\ell^r(\mathbb{Z}^2)$ 中的一个单元元, 即

$$\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} c_{(k,\ell),r}^r = 1.$$

特别地, 当 $r = 2$ 时, $(c_{(k,\ell),2})_{k,\ell \in \mathbb{Z}^2}$ 即是我们之前定义的 $(c_{k,\ell})_{k,\ell \in \mathbb{Z}^2}$.

证明 注意到 $\alpha(r) < \frac{1}{p}$ 和 $\delta > 0$, 应用引理 A.2 和 A.6 得到

$$\begin{aligned} \|S_k^h \Delta_\ell^v \omega_{r-1}\|_{L_h^\infty(L_{v'}^{r'})} &\lesssim \sum_{k' \leq k-1} 2^{\frac{2k'}{r'}} \|\Delta_{k'}^h \Delta_{\ell'}^v \omega_{r-1}\|_{L^{r'}} \\ &\lesssim \sum_{k' \leq k-1} c_{(k',\ell'),r'} 2^{k'(\delta + \frac{2}{p} - 2\alpha(r))} 2^{-\ell'\delta} \|\omega_{r-1}\|_{B_{r',r'}^{1-\frac{2}{p}-\delta,\delta}} \\ &\lesssim c_{(k,\ell),r'} 2^{k(\delta + \frac{2}{p} - 2\alpha(r))} 2^{-\ell\delta} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{H^\sigma}^{\frac{2}{r'}}. \end{aligned}$$

这便证明了本引理的第一个不等式. 再次使用引理 A.2 给出

$$\begin{aligned} \|S_k^h \Delta_\ell^v \omega_{r-1}\|_{L_h^\infty(L_v^{m_1})} &\lesssim \sum_{\ell' \leq \ell-1} 2^{\ell'(\frac{1}{r'} - \frac{1}{m_1})} \|S_k^h \Delta_{\ell'}^v \omega_{r-1}\|_{L_h^\infty(L_{v'}^{r'})} \\ &\lesssim \sum_{k' \leq k-1} \sum_{\ell' \leq \ell-1} c_{(k',\ell'),r'} 2^{k'(\delta + \frac{2}{p} - 2\alpha(r))} 2^{\ell'(\frac{1}{q_2} - \delta)} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{H^\sigma}^{\frac{2}{r'}} \\ &\lesssim c_{(k,\ell),r'} 2^{k(\delta + \frac{2}{p} - 2\alpha(r))} 2^{\ell(\frac{1}{q_3} - \delta)} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{H^\sigma}^{\frac{2}{r'}}. \end{aligned}$$

这证明了本引理的第二个不等式. 剩余的第三个不等式也同理可证. $\square$

(3.5) 的证明 首先关于竖直方向变量做 Bony 分解, 可得

$$T^h(\omega_{r-1}, a) = T^h(T^v + \bar{T}^v + R^v)(\omega_{r-1}, a).$$

由引理 B.1 和 A.2, 推出

$$\begin{aligned} \|\Delta_k^h \Delta_\ell^v T^h T^v(\omega_{r-1}, a)\|_{L^{r'}} &\lesssim \sum_{|k'-k| \leq 4} \sum_{|\ell'-\ell| \leq 4} \|S_{k'-1}^h S_{\ell'-1}^v \omega_{r-1}\|_{L_h^\infty(L_{v'}^{m_1})} \|\Delta_{k'}^h \Delta_{\ell'}^v a\|_{L_h^{r'}(L_v^{q_2})} \\ &\lesssim \sum_{|k'-k| \leq 4} \sum_{|\ell'-\ell| \leq 4} 2^{2k'\alpha(r)} 2^{-k'(\frac{2}{p} + \mu)} 2^{-\ell'(\frac{1}{q_2} - \mu)} \|a\|_{(\dot{B}_{2, \frac{2r'}{r'-2}}^{\frac{2}{p} + \mu})_h (B_{q_2, \frac{2r'}{r'-2}}^{\frac{1}{q_2} - \mu})_v} \\ &\quad \times 2^{k'(\delta + \frac{2}{p} - 2\alpha(r))} 2^{\ell'(\frac{1}{q_2} - \delta)} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{H^\sigma}^{\frac{2}{r'}} \cdot c_{k',\ell'}, \end{aligned}$$

其中 m_1 满足 $\frac{1}{m_1} = \frac{1}{r'} - \frac{1}{q}$. 由条件 $q_2 \in [2, (\mu + 3\alpha(r) + 1/p)^{-1}]$ 可见 $\mu < \frac{1}{q_2} - \alpha(r)$. 从而可以在上述不等式中取 $\delta = \mu$ 得到

$$\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v T^h T^v(\omega_{r-1}, a)\|_{L^{r'}} \lesssim c_{k,\ell} \|a\|_{\mathcal{B}_{2,q_2,r}^{\mu,p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{H^\sigma}^{\frac{2}{r'}}.$$

类似地, 可以得到

$$\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v T^h \bar{T}^v(\omega_{r-1}, a)\|_{L^{r'}} \lesssim \sum_{|k'-k| \leq 4} \sum_{|\ell'-\ell| \leq 4} \|S_{k'-1}^h \Delta_{\ell'}^v \omega_{r-1}\|_{L_h^\infty(L_{v'}^{r'})} \|\Delta_{k'}^h S_{\ell'-1}^v a\|_{L_h^{r'}(L_v^\infty)},$$

由此及引理 B.1 可知, 上面对 $T^h T^v(\omega_{r-1}, a)$ 的估计, 对 $T^h \bar{T}^v(\omega_{r-1}, a)$ 依然成立, 即有

$$\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v T^h \bar{T}^v(\omega_{r-1}, a)\|_{L^{r'}} \lesssim c_{k,\ell} \|a\|_{\mathcal{B}_{2,q_2,r}^{\mu,p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{H^\sigma}^{\frac{2}{r'}}.$$

由引理 A.2 和 B.1, 推出

$$\begin{aligned}
 \|\Delta_k^h \Delta_\ell^v T^h R^v(\omega_{r-1}, a)\|_{L^{r'}} &\lesssim 2^{\frac{\ell}{q_2}} \sum_{|k'-k| \leq 4} \sum_{\ell' \geq \ell-3} \|S_{k'-1}^h \Delta_{\ell'}^v \omega_{r-1}\|_{L_h^\infty(L_{v'}^{r'})} \|\Delta_{k'}^h \tilde{\Delta}_{\ell'}^v a\|_{L_h^{r'}(L_v^{q_2})} \\
 &\lesssim 2^{\frac{\ell}{q_2}} \sum_{|k'-k| \leq 4} \sum_{\ell' \geq \ell-3} c_{k', \ell'} 2^{-\frac{\ell'}{q}} \|a\|_{\mathcal{B}_{2, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{H^\sigma}^{\frac{2}{r'}} \\
 &\lesssim c_{k, \ell} \|a\|_{\mathcal{B}_{2, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{H^\sigma}^{\frac{2}{r'}}.
 \end{aligned}$$

由此得到

$$\|T^h(\omega_{r-1}, a)\|_{L^{r'}} \lesssim \|T^h(\omega_{r-1}, a)\|_{\dot{B}_{r', 2}^0} \lesssim \|a\|_{\mathcal{B}_{2, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{H^\sigma}^{\frac{2}{r'}}. \quad (\text{B.1})$$

仿照 (B.1) 的证明, 由引理 A.2 和 B.1 得

$$\begin{aligned}
 \|\Delta_k^h \Delta_\ell^v T^h T^v(\omega_{r-1}, a)\|_{L^2} &\lesssim \sum_{|k'-k| \leq 4} \sum_{|\ell'-\ell| \leq 4} \|S_{k'-1}^h S_{\ell'-1}^v \omega_{r-1}\|_{L_h^\infty(L_v^{m_2})} \|\Delta_{k'}^h \Delta_{\ell'}^v a\|_{L_h^2(L_v^{q_2})} \\
 &\lesssim \sum_{|k'-k| \leq 4} \sum_{|\ell'-\ell| \leq 4} c_{k', \ell'} 2^{-k'(2\alpha(r)+\mu-\delta)} 2^{-\ell'(\alpha(r)-\mu+\delta)} \|a\|_{\mathcal{B}_{2, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{H^\sigma}^{\frac{2}{r'}},
 \end{aligned}$$

其中 m_2 满足 $\frac{1}{m_2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{q_2}$. 由于 $\mu \in [\alpha(r), \frac{1}{q_2} - 3\alpha(r) - \frac{1}{p}]$ 和 $\theta \in [0, \alpha(r)]$, 因此有

$$\mu - \alpha(r) + \theta \in \left[0, \frac{1}{q_2} - \alpha(r)\right].$$

从而可以在上述不等式中取 $\delta = \mu - \alpha(r) + \theta$, 得到

$$\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v T^h T^v(\omega_{r-1}, a)\|_{L^2} \lesssim c_{k, \ell} 2^{-k(3\alpha(r)-\theta)} 2^{-\ell\theta} \|a\|_{\mathcal{B}_{2, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{H^\sigma}^{\frac{2}{r'}}.$$

类似地,

$$\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v T^h \bar{T}^v(\omega_{r-1}, a)\|_{L^2} \lesssim \sum_{|k'-k| \leq 4} \sum_{|\ell'-\ell| \leq 4} \|S_{k'-1}^h \Delta_{\ell'}^v \omega_{r-1}\|_{L_h^\infty(L_{v'}^{r'})} \|\Delta_{k'}^h S_{\ell'-1}^v a\|_{L_h^2(L_v^{1/\alpha(r)})}.$$

注意到 $\mu > \alpha(r)$, 对上式右边最后一项, 应用引理 A.1 和 A.2, 推出

$$\|\Delta_{k'}^h S_{\ell'-1}^v a\|_{L_h^2(L_v^{1/\alpha(r)})} \lesssim c_{(k', \ell'), \frac{2r}{2-r}} 2^{-k'(\mu+\frac{2}{p})} 2^{\ell'(\mu-\alpha(r))} \|a\|_{\mathcal{B}_{2, q_2, r}^{\mu, p}}.$$

由此及引理 B.1 (其中 δ 取 $\mu - \alpha(r) + \theta$), 得到

$$\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v T^h \bar{T}^v(\omega_{r-1}, a)\|_{L^2} \lesssim c_{k, \ell} 2^{-k(3\alpha(r)-\theta)} 2^{-\ell\theta} \|a\|_{\mathcal{B}_{2, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{H^\sigma}^{\frac{2}{r'}}.$$

最后, 由引理 A.2 和 B.1 (其中 δ 取 $\mu - \alpha(r) + \theta$) 给出

$$\begin{aligned}
 \|\Delta_k^h \Delta_\ell^v T^h R^v(\omega_{r-1}, a)\|_{L^2} &\lesssim 2^{\ell(\frac{1}{q_2}-\alpha(r))} \sum_{\substack{|k'-k| \leq 4 \\ \ell' \geq \ell-3}} \|S_{k'-1}^h \Delta_{\ell'}^v \omega_{r-1}\|_{L_h^\infty(L_{v'}^{r'})} \|\Delta_{k'}^h \tilde{\Delta}_{\ell'}^v a\|_{L_h^2(L_v^{q_2})} \\
 &\lesssim 2^{\ell(\frac{1}{q_2}-\alpha(r))} \sum_{\substack{|k'-k| \leq 4 \\ \ell' \geq \ell-3}} c_{k', \ell'} 2^{-k'(3\alpha(r)-\theta)} 2^{-\ell'(\theta-\alpha(r)+\frac{1}{q_2})} \|a\|_{\mathcal{B}_{2, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{H^\sigma}^{\frac{2}{r'}} \\
 &\lesssim c_{k, \ell} 2^{k(3\alpha(r)-\theta)} 2^{-\ell\theta} \|a\|_{\mathcal{B}_{2, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{H^\sigma}^{\frac{2}{r'}}.
 \end{aligned}$$

综上所述, 即可推出

$$\|T^h(\omega_{r-1}, a)\|_{\dot{H}^{3\alpha(r)-\theta, \theta}} \lesssim \|a\|_{\mathcal{B}_{2, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{\dot{H}^\sigma}^{\frac{2}{r}}.$$

由此及 (B.1), 即得到了 (3.5). $\square$

(3.6) 的证明 首先对竖直方向变量做 Bony 分解, 得到

$$\begin{aligned} T^h(\partial_h a, \omega_{r-1}) &= T^h(T^v + \bar{T}^v + R^v)(\partial_h a, \omega_{r-1}), \\ T^h(\partial_h \omega_{r-1}, a) &= T^h(T^v + \bar{T}^v + R^v)(\partial_h \omega_{r-1}, a). \end{aligned}$$

由于以上各项的估计都是类似的, 这里只写出其中典型项的估计. 注意到 $\delta_1 \in [\mu - \alpha(r), 1 - 2/p]$, 应用引理 B.1 得出

$$\begin{aligned} &\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v T^h R^v(\partial_h a, \omega_{r-1})\|_{L_h^{\frac{2r'}{2+r'}}(L_v^2)} \\ &\lesssim \sum_{|k'-k| \leq 4} \sum_{\ell' \geq \ell-3} \|S_{k'-1}^h \Delta_{\ell'}^v \partial_h a\|_{L_h^2(L_v^q)} \|\Delta_{k'}^h \tilde{\Delta}_{\ell'}^v \omega_{r-1}\|_{L_{h'}^{r'}(L_v^{m_2})} \\ &\lesssim \sum_{|k'-k| \leq 4} \sum_{\ell' \geq \ell-3} c_{k', \ell'} 2^{-k'(\mu-\delta_1)} 2^{-\ell'(\delta_1+\alpha(r)-\mu)} \|\partial_h a\|_{(\dot{B}_{2, \frac{2r'}{r'-2}}^{-1+\frac{2}{p}+\mu})_h (\dot{B}_{q_2, \frac{2r'}{r'-2}}^{\frac{1}{q_2}-\mu})_v} \|\omega_{r-1}\|_{B_{r', r'}^{1-\frac{2}{p}-\delta_1, \delta_1}} \\ &\lesssim c_{k, \ell} 2^{-k(\mu-\delta_1)} 2^{-\ell(\delta_1+\alpha(r)-\mu)} \|a\|_{\mathcal{B}_{2, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{\dot{H}^\sigma}^{\frac{2}{r}}. \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} &\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v T^h R^v(\partial_h \omega_{r-1}, a)\|_{L_h^{\frac{2r'}{2+r'}}(L_v^2)} \\ &\lesssim \sum_{|k'-k| \leq 4} \sum_{\ell' \geq \ell-3} \|S_{k'-1}^h \Delta_{\ell'}^v \partial_h \omega_{r-1}\|_{L_{r'}^2} \|\Delta_{k'}^h \Delta_{\ell'}^v a\|_{L_h^2(L_v^{1/\alpha(r)})} \\ &\lesssim \sum_{|k'-k| \leq 4} \sum_{\ell' \geq \ell-3} c_{k', \ell'} 2^{-k'(\mu-\delta_1)} 2^{-\ell'(\delta_1+\alpha(r)-\mu)} \|a\|_{\mathcal{B}_{2, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{r-1}\|_{B_{r', r'}^{1-\frac{2}{p}-\delta_1, \delta_1}} \\ &\lesssim c_{k, \ell} 2^{-k(\mu-\delta_1)} 2^{-\ell(\delta_1+\alpha(r)-\mu)} \|a\|_{\mathcal{B}_{2, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{\dot{H}^\sigma}^{\frac{2}{r}}. \end{aligned}$$

其余各项可做类似估计. $\square$

(3.7) 的证明 我们对竖直方向变量做 Bony 分解, 给出

$$R^h(\partial_h a, \omega_{r-1}) = R^h(T^v + \bar{T}^v + R^v)(\partial_h a, \omega_{r-1}).$$

这里依然只给出典型项的估计. 对右边最后一项, 有

$$\begin{aligned} &\|\Delta_k^h \Delta_\ell^v R^h R^v(\partial_h a, \omega_{r-1})\|_{L_h^{\frac{q_1 r'}{q_1+r'}}(L_v^2)} \\ &\lesssim \sum_{k' \geq k-3} \sum_{\ell' \geq \ell-3} \|\Delta_{k'}^h \Delta_{\ell'}^v \partial_h a\|_{L_h^{q_1}(L_v^{q_2})} \|\tilde{\Delta}_{k'}^h \tilde{\Delta}_{\ell'}^v \omega_{r-1}\|_{L_{h'}^{r'}(L_v^{m_2})} \\ &\lesssim \sum_{k' \geq k-3} \sum_{\ell' \geq \ell-3} c_{k', \ell'} 2^{-k'(\mu+\frac{2}{q_1}-\delta_2-1)} 2^{-\ell'(\alpha(r)+\delta_2-\mu)} \|a\|_{\mathcal{B}_{q_1, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{r-1}\|_{B_{r', r'}^{1-\frac{2}{p}-\delta_2, \delta_2}} \\ &\lesssim c_{k, \ell} 2^{-k(\mu+\frac{2}{q_1}-\delta_2-1)} 2^{-\ell(\alpha(r)+\delta_2-\mu)} \|a\|_{\mathcal{B}_{q_1, q_2, r}^{\mu, p}} \|\omega_{\frac{r}{2}}\|_{\dot{H}^\sigma}^{\frac{2}{r}}. \end{aligned}$$

其余各项可做类似估计. $\square$

Critical one component anisotropic regularity for 3-D Navier-Stokes system

Yanlin Liu & Ping Zhang

Abstract In this paper, we consider an initial data v_0 for the classical 3-D Navier-Stokes equation with vorticity belonging to $L^{\frac{3}{2}} \cap L^2$. We prove that if the solution associated with v_0 blows up at a finite time T^* , then for any $p \in [4, \infty]$, $q_1 \in [1, 2]$, $\mu > 0$, $q_2 \in [2, (1/p + \mu)^{-1}]$, $\kappa \in [1, \infty]$, and any unit vector e , the L^p estimate in time of $\|(v(t) | e)_{\mathbb{R}^3}\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}}^p + \|(v(t) | e)_{\mathbb{R}^3}\|_{(\dot{B}_{q_1, \kappa}^{\mu + \frac{2}{p} + \frac{2}{q_1} - 1})_h (\dot{B}_{q_2, \kappa}^{\frac{1}{q_2} - \mu})_v}^p$ blows up at T^* .

Keywords Navier-Stokes equations, regularity criteria, critical spaces, anisotropic Littlewood-Paley theory

MSC(2010) 35Q30, 76D03

doi: 10.1360/N012018-00020