保持斜 ξ -Lie 零积的可加映射

齐霄霏^①, 侯晋川^{②*}, 崔建莲^③^① 山西大学数学科学学院, 太原 030006;^② 太原理工大学数学学院, 太原 030024;^③ 清华大学数学科学系, 北京 100084

E-mail: xiaofeiqisxu@aliyun.com, jinchuanhou@aliyun.com, jcui@math.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2014-04-01; 接受日期: 2014-07-16; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11171249, 11101250 和 11271217)、山西省青年研究基金 (批准号: 2012021004) 和山西省高等学校优秀青年学术带头人支持计划资助项目

摘要 令 H 与 K 是维数大于 2 的复 Hilbert 空间, $\xi \in \mathbb{C}$. 假设 $\Phi: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(K)$ 是满足对任意 $A, B \in \mathcal{B}(H)$ 都有 $AB = \xi BA^* \Leftrightarrow \Phi(A)\Phi(B) = \xi\Phi(B)\Phi(A)^*$ 的可加满射. 本文证明了, (1) 如果 $\xi = 1$, 则存在酉或反酉算子 $U: H \rightarrow K$ 以及非零实数 c 使得 $\Phi(A) = cUAU^*$ 对所有 $A \in \mathcal{B}(H)$ 成立; (2) 如果 $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 且 Φ 保单位元, 则存在酉或反酉算子 $U: H \rightarrow K$ 使得 $\Phi(A) = UAU^*$ 对所有 $A \in \mathcal{B}(H)$ 成立; (3) 如果 $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 且 Φ 保单位元, 则存在酉算子 $U: H \rightarrow K$ 使得 $\Phi(A) = UAU^*$ 对所有 $A \in \mathcal{B}(H)$ 成立.

关键词 Hilbert 空间上的算子 可加映射 斜 Lie 积 *- 同构**MSC (2010) 主题分类** 47B49, 47B48

1 引言

令 $\mathcal{A}$ 是 *- 环. 对任意 $A, B \in \mathcal{A}$, 定义 $[A, B]_* = AB - BA^*$, 称为 A 与 B 的斜 Lie 积. 这种乘积在一些研究领域中有越来越重要的作用, 已经引起许多作者的研究兴趣 (参见文献 [1–3] 及其参考文献). 受赋予 Lie 积 $[T, S] = TS - ST$ 或 Jordan 乘积 $TS + ST$ 运算的环 (代数) 理论的启发, Molnár 在文献 [4] 中首次系统地研究了这类斜 Lie 积, 证明了如果 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 是一个理想, 那么 $\mathcal{N} = \text{span} \{AB - BA^* \mid A \in \mathcal{N}, B \in \mathcal{B}(H)\} = \text{span} \{AB - BA^* \mid A \in \mathcal{B}(H), B \in \mathcal{N}\}$. 这里, $\mathcal{B}(H)$ 表示 Hilbert 空间 H 上有界线性算子全体组成的代数.

注意到, 两个算子之间按照因子交换的概念有重要的意义, 是量子群和算子代数研究的对象之一 [5, 6]. 令 $\mathbb{F}$ 是具有 * 运算的域, $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 *- 代数. 对任意的 $A, B \in \mathcal{A}$, 如果 $AB = \xi BA$, 则称 A 与 B 按照因子 $\xi \in \mathbb{F}$ 交换. 受此启发, 我们可以定义 A 与 B 的斜 ξ -Lie 积为 $AB - \xi BA^*$. 显然, 如果 $\xi = 1$, 斜 ξ -Lie 积即为斜 Lie 积.

令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的两个 *- 代数, $\xi \in \mathbb{F}$. 称映射 $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 保斜 ξ -Lie 积, 若 $\Phi(AB - \xi BA^*) = \Phi(A)\Phi(B) - \xi\Phi(B)\Phi(A)^*$ 对所有 $A, B \in \mathcal{A}$ 成立. 在文献 [7] 中, Cui 和 Li 刻画了因子 von Neumann 代数上保持斜 ξ -Lie 积 ($\xi = 1$) 的双射. 之后, Bai 和 Du [8] 推广了上述结果, 证明了不含 I_1 型中心直和项的 von Neumann 代数上保持斜 ξ -Lie 积 ($\xi = 1$) 的双射是线性 *- 同构与共轭线性 *- 同构的和.

近来, Dai 和 Lu^[9] 给出了不含 I_1 型中心直和项的 von Neumann 代数上保持斜 ξ -Lie 积的双射 Φ 的完全刻画, 这里 ξ 是任意的非零数. 他们证明了, 如果 ξ 不是实数, 那么 Φ 是线性 $*$ - 同构; 如果 ξ 是实数, 那么 Φ 是线性 $*$ - 同构与共轭线性 $*$ - 同构的和.

如果 Φ 满足对任意 $A, B \in \mathcal{A}$, $AB - \xi BA^* = 0 \Rightarrow \Phi(A)\Phi(B) - \xi\Phi(B)\Phi(A)^* = 0$, 称映射 Φ 是保斜 ξ -Lie 零积的; 如果对任意 $A, B \in \mathcal{A}$, $AB - \xi BA^* = 0 \Leftrightarrow \Phi(A)\Phi(B) = \xi\Phi(B)\Phi(A)^* = 0$, 则称 Φ 是双边保斜 ξ -Lie 零积的. 显然保斜 ξ -Lie 积的映射一定是保斜 ξ -Lie 零积, 但反之不然. 特别地, $\xi = 0$ 与 $\xi = 1$ 的情形分别对应于 (双边) 保零积和 (双边) 保斜 Lie 零积的映射. 对于 $\xi = 0$ 的情形, (双边) 保零积的可加或线性映射已有许多文献在若干类型的环和代数上进行了深入讨论 (参见文献 [10–12] 以及其中的参考文献). 对于 $\xi = 1$ 的情形, Chebotar 等^[13] 刻画了矩阵代数 $M_n(\mathbb{F})$ 上保斜 Lie 零积的线性双射, 其中 $\mathbb{F}$ 是具有 $*$ 运算的域, $n \geq 20$. 后来, Cui 和 Hou^[14] 证明了, 对任意复 Hilbert 空间 H, K , 线性双射 $\Phi: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(K)$ 保斜 Lie 零积当且仅当存在非零实数 c 和酉算子 $U: H \rightarrow K$ 使得 $\Phi(A) = cUAU^*$ 对所有 $A \in \mathcal{B}(H)$ 成立.

注意到, 在上述关于刻画保斜 ξ -Lie 零积映射的结果中, 所涉映射均假设为线性的. 而更一般且更困难的情形是把代数仅仅看作是环, 进而讨论只具有可加性的映射. 本文的目的即是在 $\mathcal{B}(H)$ 上讨论保斜 ξ -Lie 零积的可加满射的刻画问题. 由于 $\mathcal{B}(H)$ 上双边保零积的可加满射已在文献 [15] 中刻画, 本文只处理 $\xi \neq 0$ 的情形.

下面是本文的主要结果.

定理 1.1 令 H, K 是维数大于 2 的 Hilbert 空间. 假设 $\Phi: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(K)$ 是可加满射. 则 Φ 双边保斜 Lie 零积, 即 Φ 满足对任意 $A, B \in \mathcal{B}(H)$, 有 $AB = BA^* \Leftrightarrow \Phi(A)\Phi(B) = \Phi(B)\Phi(A)^*$, 当且仅当存在酉或反酉算子 $U: H \rightarrow K$ 以及非零实数 c 使得 $\Phi(A) = cUAU^*$ 对所有 $A \in \mathcal{B}(H)$ 成立.

定理 1.2 令 H, K 是维数大于 2 的 Hilbert 空间, $\xi \in \mathbb{C}$ 且 $\xi \neq 0, 1$. 假设 $\Phi: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(K)$ 是保单位元的可加满射. 则 Φ 双边保斜 ξ -Lie 零积, 即 Φ 满足对任意 $A, B \in \mathcal{B}(H)$, 有 $AB = \xi BA^* \Leftrightarrow \Phi(A)\Phi(B) = \xi\Phi(B)\Phi(A)^*$, 当且仅当下列之一成立:

- (1) $\xi \in \mathbb{R}$, 存在酉或反酉算子 $U: H \rightarrow K$ 使得 $\Phi(A) = UAU^*$ 对所有 $A \in \mathcal{B}(H)$ 成立;
- (2) $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, 存在酉算子 $U: H \rightarrow K$ 使得 $\Phi(A) = UAU^*$ 对所有 $A \in \mathcal{B}(H)$ 成立.

注 定理 1.2 中我们假设 Φ 保单位元, 这是因为仅从假设条件 Φ 双边保斜 ξ -Lie 零积得不到关于 $\Phi(I)$ 的任何信息. 此外, $\dim H = 2$ 的情形, 双边保斜 ξ -Lie 零积的映射刻画问题即便是对于线性映射都不简单 (参见文献 [14]), 所用证明方法也不相同, 因此我们将另文讨论.

本文的剩余部分给出主要结果的证明. 定理 1.1 和 1.2 的证明是不同的. 为了证明定理 1.1, 我们需要 $\mathcal{B}_s(H)$ ($\mathcal{B}(H)$ 上所有自伴算子组成的 Jordan 代数) 上双边保交换性的可加满射的结构性质; 为了证明定理 1.2, 则需要投影上双边保正交性的双射的刻画. 这两个结果将在第 2 节中以引理 2.1 和 2.3 的形式给出. 第 3 节给出定理 1.1 和 1.2 的证明.

2 预备引理

为证明主要结果, 本节给出必要的预备引理. 这些引理本身也有独立意义.

首先介绍本文中使用的符号. $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 分别表示实数域与复数域. 令 H 是维数大于 2 的复 Hilbert 空间. $\mathcal{B}(H)$ 表示 H 上所有有界算子组成的代数. 分别用 $\mathcal{B}_s(H)$, $\mathcal{P}(H)$ 与 $\mathcal{P}_1(H)$ 表示 $\mathcal{B}(H)$ 中自伴算子全体组成的实 Jordan 代数 (按 Jordan 乘积 $A \circ B = AB + BA$), $\mathcal{B}_s(H)$ 中投影算子全体构成的集合, 以

及 $\mathcal{B}_s(H)$ 中所有一秩投影算子组成的集合. 对于 $x \in H$, $[x] = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}\}$, $[x]^\perp = \{y \in H : \langle x, y \rangle = 0\}$. 对于 $A \in \mathcal{B}(H)$, $\ker A$ 与 $\text{rank } A$ 分别表示 A 的核与秩即值域维数.

对自伴算子 $A \in \mathcal{B}_s(H)$, 称 A 是本原的 (primitive), 若 A 可以写成 $A = \alpha P + \beta(I - P)$ 的形式, 其中 $P \in \mathcal{P}_1$, α, β 是两个不同的实数. 由于 $\dim H \geq 3$, 在 A 的分解 $A = \alpha P + \beta(I - P)$ 中, 一秩投影 P 是唯一确定的.

下面的引理给出 $\mathcal{B}_s(H)$ 上双边保交换性的可加满射的结构性质. 这个引理是证明定理 1.1 的关键. 值得注意的是, 若 H 是可分的, $\mathcal{B}_s(H)$ 上双边保交换的非线性双射已在文献 [16] 中给出刻画. 不幸的是, 这一结果不能用于证明我们的定理 1.1. 但是, 我们可以借助文献 [16] 中的一些思路来证明下面引理.

引理 2.1 令 H, K 是维数大于 2 的复 Hilbert 空间. 假设 $\Phi : \mathcal{B}_s(H) \rightarrow \mathcal{B}_s(K)$ 是可加满射. 如果 Φ 满足对任意的 $A, B \in \mathcal{B}_s(H)$, 有 $\Phi(A)\Phi(B) = \Phi(B)\Phi(A) \Leftrightarrow AB = BA$, 那么存在酉或反酉算子 $U : H \rightarrow K$, 可加单射 $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 以及由 $\mathcal{P}(H)$ 张成的线性流形上的实可加泛函 f 使得 $\Phi(aP) = \tau(a)UPU^* + f(aP)I$ 对所有 $P \in \mathcal{P}(H)$ 和所有 $a \in \mathbb{R}$ 成立.

若引理 2.1 中的 Φ 是连续的, 可得下面推论.

推论 2.2 令 H, K 是维数大于 2 的复 Hilbert 空间. 假设 $\Phi : \mathcal{B}_s(H) \rightarrow \mathcal{B}_s(K)$ 是可加连续满射. 则 Φ 满足对任意的 $A, B \in \mathcal{B}_s(H)$, 有 $\Phi(A)\Phi(B) = \Phi(B)\Phi(A) \Leftrightarrow AB = BA$, 当且仅当存在酉或反酉算子 $U : H \rightarrow K$, 非零实数 c 以及有界实线性泛函 $h : \mathcal{B}_s(H) \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $\Phi(A) = cUAU^* + h(A)I$ 对所有 $A \in \mathcal{B}_s(H)$ 成立.

证明 充分性显然. 对于必要性, 假设 Φ 双边保交换性. 则由引理 2.1 知, 存在 U, τ 和 f 使得 $\Phi(aP) = \tau(a)UPU^* + f(aP)I$ 对每个 $P \in \mathcal{P}(H)$ 以及每个 $a \in \mathbb{R}$ 均成立. 利用 τ 的可加性, 易知 $\tau(r) = r\tau(1)$ 对所有有理数 $r \in \mathbb{Q}$ 成立. 因为 Φ 是连续的, 容易验证 τ 也是连续的. 因此对任意实数 $a \in \mathbb{R}$, 有 $\tau(a) = a\tau(1)$. 记 $c = \tau(1)$. 那么 $\Phi(aP) = cU(aP)U^* + f(aP)I$ 对所有 $P \in \mathcal{P}(H)$ 和所有实数 $a \in \mathbb{R}$ 成立. 现定义映射 $h : \mathcal{B}_s(H) \rightarrow \mathbb{R}$ 为: 对任意 $A \in \mathcal{B}_s(H)$, $h(A)I = \Phi(A) - cUAU^*$. 易验证 h 是连续可加的, 进而是实线性的. 众所周知, 每个自伴算子是投影的线性组合的极限. 据此, Φ 的连续性与可加性蕴含 $\Phi(A) = cUAU^* + h(A)I$ 对所有 $A \in \mathcal{B}_s(H)$ 成立. 证毕. $\square$

引理 2.1 的证明 我们通过验证一系列断言来完成该引理的证明.

断言 1 $\Phi(\mathbb{R}I) = \mathbb{R}I$.

任取 $\lambda \in \mathbb{R}$. 一方面, 由于 $(\lambda I)A = A(\lambda I)$ 对所有 $A \in \mathcal{B}_s(H)$ 成立, 我们有 $\Phi(\lambda I)\Phi(A) = \Phi(A)\Phi(\lambda I)$, 进而利用 Φ 的满射性得到 $\Phi(\lambda I)B = B\Phi(\lambda I)$ 对所有 $B \in \mathcal{B}_s(K)$ 成立. 因此 $\Phi(\lambda I) \in \mathbb{R}I$. 另一方面, 由 Φ 的满射性知, 存在算子 $A \in \mathcal{B}_s(H)$ 使得 $\Phi(A) = \lambda I$. 此蕴含 $\Phi(A)\Phi(B) = \Phi(B)\Phi(A)$ 对所有 $B \in \mathcal{B}_s(H)$ 成立, 从而也有 $AB = BA$ 对所有 $B \in \mathcal{B}_s(H)$ 成立. 这就证明了 $A \in \mathbb{R}I$, 即 $\mathbb{R}I \subseteq \Phi(\mathbb{R}I)$. 因此 $\Phi(\mathbb{R}I) = \mathbb{R}I$. 断言 1 得证.

断言 2 存在可加子群 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$ 使得零空间 $\ker \Phi = \mathcal{S}I$.

由断言 1 可得 $\ker \Phi \subseteq \mathbb{R}I$. 注意到 Φ 的可加性蕴含集合 $\ker \Phi$ 是可加群. 所以存在可加子群 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$ 使得 $\ker \Phi = \mathcal{S}I$. 故断言 2 成立.

对任意子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}_s(H)$, 定义

$$\mathcal{S}^c = \{A \in \mathcal{B}_s(H) : AS = SA \text{ 对所有 } S \in \mathcal{S} \text{ 成立}\}$$

和

$$\mathcal{S}' = \{A \in \mathcal{B}(H) : AS = SA \text{ 对所有 } S \in \mathcal{S} \text{ 成立}\}.$$

易知 $\mathcal{S}^{cc} = \mathcal{S}'' \cap \mathcal{B}_s(H)$, 且因 Φ 双边保交换性, 我们还有

$$\Phi(\mathcal{S}^c) = \Phi(\mathcal{S})^c \text{ 与 } \Phi(\mathcal{S}^{cc}) = \Phi(\mathcal{S})^{cc}. \quad (2.1)$$

我们断言

$$\Phi^{-1}(\Phi(\mathcal{S})^{cc}) = \{A \in \mathcal{B}_s(H) : \Phi(A) \in \Phi(\mathcal{S})^{cc}\} = \mathcal{S}^{cc}. \quad (2.2)$$

事实上, 由等式 (2.1) 显然有包含关系 $\mathcal{S}^{cc} \subseteq \Phi^{-1}(\Phi(\mathcal{S})^{cc})$ 成立. 为证另一包含关系, 任取 $A \in \Phi^{-1}(\Phi(\mathcal{S})^{cc})$. 则由等式 (2.1) 得 $\Phi(A) \in \Phi(\mathcal{S})^{cc} = \Phi(\mathcal{S}^{cc})$. 故存在 $B \in \mathcal{S}^{cc}$ 使得 $\Phi(A) = \Phi(B)$, 即 $\Phi(A - B) = 0$. 由断言 2, 存在 $\lambda \in \mathbb{S}$ 使得 $A = B + \lambda I$, 此蕴含 $A \in \mathcal{S}^{cc}$. 这证明了 $\mathcal{S}^{cc} \supseteq \Phi^{-1}(\Phi(\mathcal{S})^{cc})$. 因此等式 (2.2) 成立.

断言 3 对任意的 $A \in \mathcal{B}_s(H)$, 如果 $\#\sigma(A) < \infty$, 则 $\#\sigma(A) = \#\sigma(\Phi(A))$. 这里 $\#\sigma(A)$ 表示 A 的谱 $\sigma(A)$ 中所含元的个数.

任取 $A \in \mathcal{B}_s(H)$. 我们将对正整数 n 用归纳法来证明该断言. 由于 A 的谱含有一个元当且仅当存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 $A = \lambda I$, 利用断言 1 即知, 该断言当 $n = 1$ 时成立. 现假设 $n > 1$, 且 $\#\sigma(A) = m \Leftrightarrow \#\sigma(\Phi(A)) = m$ 对任意正整数 $m < n$ 成立. 对任意满足 $\#\sigma(A) = n$ 的算子 $A \in \mathcal{B}_s(H)$, 令 $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ 为 A 的谱分解. 显然 $\{A\}^{cc} = \text{span}\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. 此外, 利用对 n 的归纳假设, 可得 $\sigma(\Phi(A)) \geq n$. 如果 $\#\sigma(\Phi(A)) > n$, 可取 $\Phi(A)$ 的 n 个正交谱投影 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$. 令 $B = \sum_{j=1}^n \beta_j Q_j$ 是 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ 的实线性组合, 其中系数满足当 $i \neq j$ 时, $\beta_i \neq \beta_j$. 那么 $\#\sigma(B) = n$. 易看到 $\{B\}^{cc} = \text{span}\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\} \subset \{\Phi(A)\}^{cc}$. 所以由等式 (2.2) 知, $\Phi^{-1}(\{B\}^{cc}) \subset \Phi^{-1}(\{\Phi(A)\}^{cc}) = \{A\}^{cc}$. 这证明了存在 $S \in \{A\}^{cc}$ 使得 $B = \Phi(S)$. 于是, $\dim\{S\}^{cc} < \dim\{A\}^{cc} = n$ 且 $\Phi(\{S\}^{cc}) = \{B\}^{cc}$, 此蕴含 $\#\sigma(S) < n$. 由归纳法假设, 可得 $n = \#\sigma(B) = \#\sigma(S) < n$, 矛盾. 因此 $\#\sigma(\Phi(A)) = n$.

断言 4 对任意满足条件 $\#\sigma(A) = 2$ 的算子 $A \in \mathcal{B}_s(H)$, A 是本原的当且仅当 $\dim\{A, B\}^{cc} \leq 3$ 对任意满足条件 $\#\sigma(B) = 2$ 的 $B \in \{A\}^c$ 成立.

对满足条件 $\#\sigma(A) = 2$ 的算子 $A \in \mathcal{B}_s(H)$, 若 A 是本原的, 则存在一秩投影 $P \in \mathcal{B}_s(H)$ 和实数 $\alpha \neq \beta$ 使得 $A = \alpha P + \beta(I - P)$. 通过空间分解 $H = PH \oplus (I - P)H$, 我们有

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta I_{(I-P)H} \end{pmatrix}.$$

那么, 对任意满足条件 $\#\sigma(B) = 2$ 的 $B \in \{A\}^c$, 有

$$B = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $\mu \in \mathbb{R}$, $B_{22} \in \mathcal{B}_s((I - P)H)$. 如果 $\sigma(B_{22}) = \{\gamma\}$, $\mu \neq \gamma \in \mathbb{R}$, 则 $B_{22} = \gamma I_{(I-P)H}$, 进而

$$B = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \gamma I_{(I-P)H} \end{pmatrix}.$$

现在易证

$$\{A, B\}^{cc} = \left\{ \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22}I_{(I-P)H} \end{pmatrix} : d_{11}, d_{22} \in \mathbb{R} \right\},$$

此蕴含 $\dim\{A, B\}^{cc} = 2$. 如果 $\sigma(B_{22}) = \{\mu, \gamma\}$, 那么定存在正交投影 Q_1 与 Q_2 , 满足条件 $Q_1 + Q_2 = I - P$, 使得 $B_{22} = \mu Q_1 + \gamma Q_2$. 于是, 关于空间分解 $H = PH \oplus Q_1H \oplus Q_2H$, 有

$$B = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu I_{Q_1H} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma I_{Q_2H} \end{pmatrix} = \mu P + \mu Q_1 + \gamma Q_2.$$

对任意 $C \in \{A, B\}^c$, 由于 $CA = AC$ 且 $CB = BC$, 简单计算可得

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix},$$

其中 $c_{11} \in \mathbb{R}$, $C_{22} \in \mathcal{B}_s(Q_1H)$, $C_{33} \in \mathcal{B}_s(Q_2H)$. 此蕴含

$$\{A, B\}^c = \left\{ \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix} : c_{11} \in \mathbb{R}, C_{22} \in \mathcal{B}_s(Q_1H), C_{33} \in \mathcal{B}_s(Q_2H) \right\}.$$

因此

$$\{A, B\}^{cc} = \left\{ \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22}I_{Q_1H} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33}I_{Q_2H} \end{pmatrix} : d_{11}, d_{22}, d_{33} \in \mathbb{R} \right\}.$$

所以 $\dim\{A, B\}^{cc} = 3$. 因而, 无论哪种情形, 均有 $\dim\{A, B\}^{cc} \leq 3$.

反之, 假设 $\#\sigma(A) = 2$ 但 A 不是本原的. 则 $A = \alpha P + \beta(I - P)$, 其中 α, β 是两个不同的实数, 投影 P 满足 $\text{rank}P$ 与 $\text{rank}(I - P)$ 均大于 1. 取两两正交的投影 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 使其满足 $Q_1 + Q_2 = P$ 且 $Q_3 + Q_4 = I - P$; 那么关于空间分解 $H = Q_1H \oplus Q_2H \oplus Q_3H \oplus Q_4H$, 我们有

$$A = \begin{pmatrix} \alpha I_{Q_1H} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha I_{Q_2H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta I_{Q_3H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta I_{Q_4H} \end{pmatrix}.$$

令

$$B = \begin{pmatrix} \mu I_{Q_1 H} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma I_{Q_2 H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu I_{Q_3 H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma I_{Q_4 H} \end{pmatrix},$$

其中 $\mu \neq \gamma \in \mathbb{R}$. 显然, $B \in \{A\}^c$ 且满足 $\#\sigma(B) = 2$. 然而, $\{A, B\}^{cc} = \text{span}\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$, 此蕴含 $\dim\{A, B\}^{cc} = 4 > 3$, 矛盾. 因此 A 是本原的. 断言 4 得证.

断言 5 对任意 $A \in \mathcal{B}_s(H)$, A 是本原的当且仅当 $\Phi(A)$ 是本原的.

对任意 $A \in \mathcal{B}_s(H)$, 如果 A 是本原的, 那么 $A = \alpha P + \beta(I - P)$, 其中 P 是一秩投影, α, β 是不同的两个实数. 特别地, $\#\sigma(A) = 2$. 由断言 3 知 $\#\sigma(\Phi(A)) = 2$. 令 $T \in \mathcal{B}_s(K)$ 是满足条件 $T \in \{\Phi(A)\}^c$ 且 $\#\sigma(T) = 2$ 的任意算子. 由 Φ 的满射性知, 存在 $B \in \mathcal{B}_s(H)$ 使得 $\Phi(B) = T$. 利用 Φ 的保交换性和断言 3 可得 $\#\sigma(B) = 2$ 且 $B \in \{A\}^c$. 于是, 由断言 4 知, $\dim\{A, B\}^{cc} \leq 3$, 且 $\{A, B\}^{cc}$ 中的每个算子的谱中最多含有 3 个元. 注意到, 对任意 $S \subseteq \mathcal{B}_s(H)$, S^{cc} 是由其投影张成的实线性子空间. 因为 $\{\Phi(A), T\}^{cc} = \{\Phi(A), \Phi(B)\}^{cc} = \Phi(\{A, B\}^{cc})$, 且集合中每个算子的谱最多含有三个元, 所以必有 $\dim \Phi(\{A, B\}^{cc}) \leq 3$. 现利用断言 3 得到 $\Phi(A)$ 是本原的.

可以类似证明 $\Phi(A)$ 的本原性亦蕴含 A 的本原性. 断言 5 得证.

断言 6 存在 H 到 K 上的酉或反酉算子 U 使得 $\Phi(P) = \alpha_P U P U^* + \beta_P I$ 对所有 $P \in \mathcal{P}_1(H)$ 成立, 其中 $\alpha_P, \beta_P \in \mathbb{R}$ 且 $\alpha_P \neq 0$.

对任意一秩投影 $P \in \mathcal{P}_1(H)$, 显然 P 是本原的. 由断言 5 知, 存在唯一的一秩投影 $Q \in \mathcal{P}_1(K)$, 非零实数 α_P 和实数 β_P 使得 $\Phi(P) = \alpha_P Q + \beta_P I$. 定义 $\Psi(P) = Q_P$. 那么 $\Psi: \mathcal{P}_1(H) \rightarrow \mathcal{P}_1(K)$ 是一个映射. 我们断言 Ψ 是双射, 且双边保正交性. 注意到, 对任意不同元 $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_1(H)$, $P_1 P_2 = P_2 P_1$ 当且仅当 $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$. 由于 Φ 双边保交换性, 所以 Ψ 双边保正交性. 为证明 Ψ 的单射性, 若有 H 上的一秩投影 P_1 和 P_2 使得 $\Psi(P_1) = \Psi(P_2) = Q$, 利用 Ψ 的定义知, 存在实数 $\alpha_{P_1} \neq 0, \beta_{P_1}, \alpha_{P_2} \neq 0, \beta_{P_2}$ 使得 $\Phi(P_1) = \alpha_{P_1} Q + \beta_{P_1} I$ 且 $\Phi(P_2) = \alpha_{P_2} Q + \beta_{P_2} I$. 此蕴含 $\{\Phi(P_1)\}^{cc} = \{\Phi(P_2)\}^{cc}$, 进而有 $\{P_1\}^{cc} = \{P_2\}^{cc}$. 于是, 由断言 2 可得 $P_1 - P_2 \in \mathcal{S}I$. 现在, 由于 $\dim H \geq 3$, 显然有 $P_1 = P_2$. 为验证 Ψ 的满射性, 任取一秩投影 $Q \in \mathcal{B}_s(K)$. 由 Φ 的满射性和断言 5 知, $Q = \Phi(\alpha P + \beta I)$, 其中 P 是某个一秩投影, α, β 是实数且 $\alpha \neq 0$. 因为 $Q \in \Phi(\{P\}^{cc}) = \{\Phi(P)\}^{cc}$, 易证 $\Psi(P) = Q$. 现在, 应用 Wigner 定理的 Uhlhorn 版本 (参见文献 [17]), 存在 H 到 K 上的酉或反酉算子 U 使得 $\Psi(P) = U P U^*$ 对所有 $P \in \mathcal{P}_1(H)$ 成立. 从而有, $\Phi(P) = \alpha_P U P U^* + \beta_P I$ 对所有 $P \in \mathcal{P}_1(H)$ 成立. 断言 6 得证.

由断言 6 知, 不失一般性, 我们可以假设 $U = I$, 即对任意一秩投影 $P \in \mathcal{P}_1(H)$, 存在非零实数 α_P 和实数 β_P 使得

$$\Phi(P) = \alpha_P P + \beta_P I. \quad (2.3)$$

断言 7 对任意非平凡投影 $P \in \mathcal{P}(H)$ 和任意 $0 \neq a \in \mathbb{R}$, 我们有 $\Phi(aP) = \tau(a, P)P + f(a, P)I$, 其中 $\tau(a, P), f(a, P)$ 是依赖于 a, P 的实数, 且 $\tau(a, P)$ 不为 0.

任取非平凡投影 $P \in \mathcal{P}(H)$ 和非零实数 a . 由于 $\#\sigma(aP) = 2$, 利用断言 3 可得 $\#\sigma(\Phi(aP)) = 2$. 因此存在非平凡投影 $Q \in \mathcal{P}(H)$ 使得 $\Phi(aP) = \lambda_{a,P} Q + \mu_{a,P} I$, 其中 $\lambda_{a,P}, \mu_{a,P} \in \mathbb{R}$ 且 $\lambda_{a,P} \neq 0$. 对任意一秩投影 $R \in \mathcal{P}_1(H)$, 由于 Φ 双边保交换性, 可得 $R(aP) = (aP)R \Leftrightarrow RP = PR \Leftrightarrow \Phi(R)Q = Q\Phi(R)$.

由等式 (2.3) 得 $\Phi(R)Q = Q\Phi(R) \Leftrightarrow RQ = QR$. 于是可得

$$RP = PR \Leftrightarrow RQ = QR \text{ 对所有一秩投影 } R \in \mathcal{P}_1(H) \text{ 成立.} \quad (2.4)$$

任取单位向量 $x \in H$. 由等式 (2.4) 知, $x \in PH$ 蕴含要么 $x \in QH$, 要么 $x \in \ker Q$. 如果存在 $x, y \in PH$ 使得 $x \in QH$ 但 $y \in \ker Q$, 那么 $x \perp y$. 令 $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$. 显然 $z \in PH$, 所以有 $Qz = z$ 或 $Qz = 0$. 然而, $Qz = \frac{1}{\sqrt{2}}(Qx + Qy) = \frac{1}{\sqrt{2}}x$, 矛盾. 因此, 我们得到, 要么对任意 $x \in PH$, 有 $x \in QH$; 要么对任意 $x \in PH$, 有 $x \in \ker Q$. 进而得到, 要么 $Q = P$, 要么 $Q = I - P$. 于是我们已证, 要么 $\Phi(aP) = \lambda_{a,P}P + \mu_{a,P}I$, 要么 $\Phi(aP) = \lambda_{a,P}(I - P) + \mu_{a,P}I = -\lambda_{a,P}P + (\lambda_{a,P} + \mu_{a,P})I$. 现在, 在第一种情形令 $\tau(a, P) = \lambda_{a,P}$, $f(a, P) = \mu_{a,P}$; 在第二种情形令 $\tau(a, P) = -\lambda_{a,P}$, $f(a, P) = \lambda_{a,P} + \mu_{a,P}$. 易知断言 7 成立.

用 $\mathcal{L}(\mathcal{P}(H))$ 表示由 $\mathcal{P}(H)$ 张成的实线性流形.

断言 8 存在可加映射 $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 和泛函 $f: \mathcal{P}(H) \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $\Phi(aP) = \tau(a)P + f(aP)I$ 对所有 $P \in \mathcal{P}(H)$ 和所有 $a \in \mathbb{R}$ 成立.

首先证明断言 7 中的 $\tau(a, P)$ 与 P 无关. 分三种情形证明.

任取非平凡投影 $P, Q \in \mathcal{P}(H)$.

情形 1 P 与 Q 正交.

此时, 显然 $P + Q$ 也是一个投影. 由断言 7, 一方面有

$$\Phi(aP) = \tau(a, P)P + f(a, P)I \text{ 与 } \Phi(aQ) = \tau(a, Q)Q + f(a, Q)I;$$

另一方面,

$$\Phi(a(P + Q)) = \tau(a, P + Q)(P + Q) + f(a, P + Q)I.$$

利用 Φ 的可加性, 得到

$$(\tau(a, P + Q) - \tau(a, P))P + (\tau(a, P + Q) - \tau(a, Q))Q = (f(a, P) + f(a, Q) - f(a, P + Q))I. \quad (2.5)$$

在等式 (2.5) 两边分别同乘以 P 和 Q , 得到

$$\tau(a, P + Q) - \tau(a, P) = f(a, P) + f(a, Q) - f(a, P + Q) = \tau(a, P + Q) - \tau(a, Q). \quad (2.6)$$

此蕴含 $\tau(a, P) = \tau(a, Q)$. 而且, 若 $P + Q \neq I$, 等式 (2.5) 和 (2.6) 蕴含

$$\tau(a, P) = \tau(a, Q) = \tau(a, P + Q) \text{ 和 } f(a, P) + f(a, Q) = f(a, P + Q). \quad (2.7)$$

对任意投影 $P, Q \in \mathcal{B}(H)$, 分别用符号 $P \vee Q$ 与 $P \wedge Q$ 表示到子空间 $\text{span}\{PH, QH\}$ 上的投影与到子空间 $PH \cap QH$ 上的投影.

情形 2 P 与 Q 互不相同, 且满足 $P \vee Q \neq I$.

令 $R = I - P \vee Q$; 则 R 是非平凡投影, 且满足 $PR = QR = 0$, $R + P \neq I$, $R + Q \neq I$. 因此, 由情形 1 可得 $\tau(a, P) = \tau(a, R) = \tau(a, Q)$.

情形 3 $P \vee Q = I$.

此情形中, 若 $P \wedge Q = R \neq 0$, 则 $(P - R) \perp Q$ 且 $P = (P - R) + R$. 由等式 (2.7) 可得 $\tau(a, P) = \tau(a, P - R) = \tau(a, Q)$. 若 $P \wedge Q = 0$, 不失一般性, 可假设 $\text{rank} P \geq 2$. 因此存在两个投影 P_1, P_2 使得 $P = P_1 + P_2$ 且 $Q \vee P_2 \neq I$. 现由情形 2 和等式 (2.7), 即得 $\tau(a, Q) = \tau(a, P_2) = \tau(a, P)$.

结合情形 1-3, 已证明 $\tau(a, P)$ 与非平凡投影 P 无关. 记 $\tau(a) = \tau(a, P)$. 注意到 $\Phi(\mathbb{R}I) \subseteq \mathbb{R}I$. 因此 $\Phi(aP) = \tau(a)P + f(a, P)I$ 对所有投影 $P \in \mathcal{P}(H)$ 和所有实数 a 成立.

现在, 利用 Φ 的可加性, 易验证 τ 是可加的. 断言 8 得证.

断言 9 τ 是单射.

若 $\ker \tau \neq \{0\}$, 则存在非零 $a_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $\tau(a_0) = 0$. 取 $a_2 \in \mathbb{R}$ 满足条件 $\tau(a_2) \neq 0$, 并取两两正交投影 P_1, P_2, P_3 满足 $P_1 + P_2 + P_3 = I$. 令 $A = a_1P_1 + a_2P_2 + 0P_3$; 那么 $\#\sigma(A) = 3$, 进而由断言 3 可得 $\#\sigma(\Phi(A)) = 3$. 另一方面, 由断言 8 和 Φ 的可加性, 有

$$\Phi(A) = \tau(a_1)P_1 + \tau(a_2)P_2 + \tau(0)P_3 + (f(a_1P_1) + f(a_2P_2) + f(0P_3))I = \tau(a_2)P_2 + f(A)I.$$

这证明了 $\#\sigma(\Phi(A)) = 2$, 矛盾. 因而 τ 是单射.

用 $\mathcal{L}(\mathcal{P}(H))$ 表示 $\mathcal{P}(H)$ 张成的实线性空间. 考虑泛函 $f: \mathcal{L}(\mathcal{P}(H)) \rightarrow \mathbb{R}$, 其定义为 $f(\sum_{i=1}^n a_i P_i) = \Phi(A) - \sum_{i=1}^n \tau(a_i)UP_iU^*$. 由于 Φ 和映射 $\sum_{i=1}^n a_i P_i \mapsto \sum_{i=1}^n \tau(a_i)UP_iU^*$ 是可加的, 从而 f 是可加的, 且使得 $\Phi(aP) = \tau(a)UPU^* + f(aP)I$ 对所有 $P \in \mathcal{P}(H)$ 和所有 $a \in \mathbb{R}$ 成立. 到此引理得证. $\square$

下面的引理来自于文献 [18, 引理 2.7]. 为了读者的方便, 这里给出其证明梗概.

引理 2.3 令 H, K 是维数大于 2 的 Hilbert 空间. 假设 $\Phi: \mathcal{P}(H) \rightarrow \mathcal{P}(K)$ 是双边保投影正交性的双射.

(1) 若 H, K 是实的, 则存在 H 到 K 上的酉算子 U 使得 $\Phi(P) = UPU^*$ 对所有投影 $P \in \mathcal{P}(H)$ 成立.

(2) 若 H, K 是复的, 则存在 H 到 K 上的酉或反酉算子 U 使得 $\Phi(P) = UPU^*$ 对所有 $P \in \mathcal{P}(H)$ 成立.

证明 对任意 $P \in \mathcal{P}(H)$, 令 $\{P\}^\top = \{T \in \mathcal{P}(H) \mid T \neq 0, TP = 0\}$. 易证, 对任意 $P \in \mathcal{P}(H)$, $\{P\}^\top = \emptyset$ 当且仅当 $P = I$; 且 $\{P\}^\top$ 由一秩投影组成当且仅当 $I - P$ 是一秩投影. 这证明了, 对任意 H 中的单位向量 x , 单点集 $\{x \otimes x\} = \{I - x \otimes x\}^\top$; 且如果 $\{P\}^\top \neq \emptyset$, 那么 $\text{rank}(I - P) = 1$ 当且仅当不存在 $\mathcal{P}(H)$ 中投影 Q 使得 $\emptyset \neq \{Q\}^\top \subset \{P\}^\top$. 这些事实蕴含 Φ 双边保一秩投影. 再利用 Wigner 定理的 Uhlhorn 版本 [17], 且利用与文献 [19, 20] 中类似的讨论, 可证明存在 H 到 K 上的酉或反酉算子 U 使得 $\Phi(P) = UPU^*$ 对所有一秩投影 P 成立.

现定义映射 $\Psi: \mathcal{P}(H) \rightarrow \mathcal{P}(H)$ 为: 对任意 P , 有 $\Psi(P) = U^*\Phi(P)U$. 则 $\Psi(x \otimes x) = x \otimes x$ 对所有单位向量 $x \in H$ 成立. 且对任意单位向量 x , 由于 Ψ 仍双边保正交性, 我们有

$$x \in \ker P \Leftrightarrow P(x \otimes x) = 0 \Leftrightarrow \Psi(P)(x \otimes x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker \Psi(P).$$

此蕴含 $\Psi(P) = P$ 对所有 $P \in \mathcal{P}(H)$ 成立. 从而 $\Phi(P) = UPU^*$ 对所有 P 成立. 证毕. $\square$

3 主要结果的证明

本节给出定理 1.1 和 1.2 的证明.

定理 1.1 的证明 显然, 只需证明必要性. 以下假设可加满射 Φ 满足, 对任意的 $A, B \in \mathcal{B}(H)$, $AB = BA^* \Leftrightarrow \Phi(A)\Phi(B) = \Phi(B)\Phi(A)^*$. 我们将证明存在酉或反酉算子 $U: H \rightarrow K$ 和非零实数 c 使得 $\Phi(A) = cUAU^*$ 对所有 $A \in \mathcal{B}(H)$ 成立. 分几个断言证明之.

断言 1 $\Phi(\mathbb{R}I) = \mathbb{R}I$. 特别地, $\Phi(I) = cI$ 对某个 $c \in \mathbb{R}$ 成立.

任取 $a \in \mathbb{R}$. 对任意 $A \in \mathcal{B}(H)$, 由于 $aIA = A(aI)^*$, 有 $\Phi(aI)\Phi(A) = \Phi(A)\Phi(aI)^*$. 利用 Φ 的满射性可得 $\Phi(aI)B = B\Phi(aI)^*$ 对所有 $B \in \mathcal{B}(H)$ 成立. 此蕴含 $\Phi(aI) = \Phi(aI)^*$, $\Phi(aI) = \mu I$ 对某个 $\mu \in \mathbb{R}$ 成立. 反之, 由 Φ 的满射性知, 存在 $C \in \mathcal{B}(H)$ 使得 $\Phi(C) = aI$. 因为 $(aI)\Phi(A) = \Phi(A)(aI)^*$, $CA = AC^*$ 对每个 $A \in \mathcal{B}(H)$ 成立. 由此即得 $C \in \mathbb{R}I$.

断言 2 Φ 双边保自伴算子.

由断言 1, 可取 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $\Phi(aI) = \mu I \neq 0$. 对任意元 $S \in \mathcal{B}_s(H)$, 由于 $S(aI) = (aI)S^*$, 我们有 $\Phi(S)(\mu I) = (\mu I)\Phi(S)^*$, 此蕴含 $\Phi(S) = \Phi(S)^*$. 因此 Φ 保自伴算子. 另一方面, 若 $\Phi(S) = \Phi(S)^*$, 由断言 1 得, $\Phi(S)\Phi(aI) = \Phi(aI)\Phi(S)^*$, 此蕴含 $S(aI) = (aI)S^*$, 即有 $S = S^*$. 因而 Φ 双边保自伴算子.

利用引理 2.1 和断言 2, 下面的断言是显然的.

断言 3 存在酉或反酉算子 $U: H \rightarrow K$, 可加单射 $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 和可加泛函 $f: \mathcal{L}(\mathcal{P}(H)) \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $\Phi(aP) = \tau(a)UPU^* + f(aP)I$ 对所有 $P \in \mathcal{P}(H)$ 及所有 $a \in \mathbb{R}$ 成立.

现在, 令 $d = \tau(1)^{-1}$, $\Psi(A) = dU^*\Phi(A)U$ 对所有 $A \in \mathcal{B}(H)$ 成立. 那么 $\Psi: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ 也是可加满射, 且满足对任意 $A, B \in \mathcal{B}(H)$, 成立 $\Psi(A)\Psi(B) = \Psi(B)\Psi(A)^* \Leftrightarrow AB = BA^*$. 此外, 由断言 3 有 $\Psi(P) = P + h(P)I$ 对每个 $P \in \mathcal{P}_1(H)$ 成立, 其中 $h(P) = df(P)$. 因此, 不失一般性, 我们可以假设 Φ 具有形式

$$\Phi(P) = P + h(P)I \text{ 对所有 } P \in \mathcal{P}(H) \text{ 成立,} \quad (3.1)$$

其中 $h(P) \in \mathbb{R}$. 于是, 为完成定理 1.1 的证明, 只需证明 $\Phi(A) = A$ 对所有 $A \in \mathcal{B}(H)$ 成立即可. 我们将通过断言 4-8 来证明.

断言 4 对任意一秩投影 $x \otimes x \in \mathcal{B}(H)$, 我们有 $\Phi(x \otimes x) = x \otimes x$.

对任意一秩投影 $x \otimes x \in \mathcal{B}(H)$, 由等式 (3.1) 可得 $\Phi(x \otimes x) = x \otimes x + h(x \otimes x)I$. 若断言不成立, 则存在单位向量 $x \in H$ 使得 $h(x \otimes x) \neq 0$. 那么, 对任意满足 $x \in \ker A \cap \ker A^*$ 的算子 $A \in \mathcal{B}(H)$, 有 $A(x \otimes x) = (x \otimes x)A^*$ 与 $(x \otimes x)A = A(x \otimes x)^*$ 成立. 所以,

$$\Phi(A)(x \otimes x + h(x \otimes x)I) = (x \otimes x + h(x \otimes x)I)\Phi(A)^*, \quad (3.2)$$

$$(x \otimes x + h(x \otimes x)I)\Phi(A) = \Phi(A)(x \otimes x + h(x \otimes x)I)^*. \quad (3.3)$$

由于 $h(x \otimes x) \in \mathbb{R}$, 利用等式 (3.3) 得到 $x \otimes x\Phi(A) = \Phi(A)x \otimes x$. 因此存在 $\lambda_A \in \mathbb{C}$ 使得 $\Phi(A)x = \lambda_A x$ 与 $\Phi(A)^*x = \bar{\lambda}_A x$ 成立. 结合等式 (3.2) 和 (3.3), 可得

$$(x \otimes x + h(x \otimes x)I)(\Phi(A) - \Phi(A)^*) = 0 \text{ 对所有满足 } x \in \ker A \cap \ker A^* \text{ 的 } A \text{ 成立.} \quad (3.4)$$

我们断言 $h(x \otimes x) = -1$. 否则, 若 $h(x \otimes x) \neq -1$, 则 $x \otimes x + h(x \otimes x)I$ 可逆, 进而由等式 (3.4) 得到 $\Phi(A) = \Phi(A)^*$. 此等式与断言 2 蕴含 $A = A^*$ 对所有满足条件 $x \in \ker A \cap \ker A^*$ 的 $A \in \mathcal{B}(H)$ 成立, 这是不可能的. 因此, 利用 $h(x \otimes x) = -1$ 和等式 (3.4), 得到

$$\Phi(A) - \Phi(A)^* = (x \otimes x)(\Phi(A) - \Phi(A)^*) = (\lambda_A - \bar{\lambda}_A)x \otimes x.$$

记 $P = x \otimes x$. 那么

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= P\Phi(A)P + P\Phi(A)(I - P) + (I - P)\Phi(A)P + (I - P)\Phi(A)(I - P) \\ &= \lambda_A P + (I - P)\Phi(A)(I - P). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & (I - P)\Phi(A)(I - P) - (I - P)\Phi(A)^*(I - P) \\ &= (I - P)(\Phi(A) - \Phi(A)^*)(I - P) = (\lambda_A - \bar{\lambda}_A)(I - P)P(I - P) = 0. \end{aligned}$$

于是, $(I - P)\Phi(A)(I - P)$ 是自伴算子.

到目前为止, 我们已经证明了, 若 $h(x \otimes x) \neq 0$, 则 $h(x \otimes x) = -1$,

$$\Phi(A) = \lambda_A x \otimes x + T_A \text{ 对所有满足 } x \in \ker A \cap \ker A^* \text{ 的 } A \text{ 成立,} \quad (3.5)$$

其中 $\lambda_A \in \mathbb{C}$, T_A 是满足条件 $T_A x = 0$ 的自伴算子.

现任取 $y, z \in [x]^\perp$ 使其满足 $y \perp z$, 任取 $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. 考虑算子 $\alpha y \otimes y$ 和 $\beta z \otimes z$. 显然, $x \in \ker(\alpha y \otimes y) \cap \ker(\alpha y \otimes y)^*$ 且 $x \in \ker(\beta z \otimes z) \cap \ker(\beta z \otimes z)^*$. 由于 $(\alpha y \otimes y)(\beta z \otimes z) = (\beta z \otimes z)(\alpha y \otimes y)^*$, 有 $\Phi(\alpha y \otimes y)\Phi(\beta z \otimes z) = \Phi(\beta z \otimes z)\Phi(\alpha y \otimes y)^*$. 由等式 (3.5) 知, 存在数 $\lambda_{\alpha,y}, \lambda_{\beta,z}$ 及某一与 P 正交的自伴算子 $T_{\alpha,y}, T_{\beta,z}$ 使得 $(\lambda_{\alpha,y}P + T_{\alpha,y})(\lambda_{\beta,z}P + T_{\beta,z}) = (\lambda_{\beta,z}P + T_{\beta,z})(\lambda_{\alpha,y}P + T_{\alpha,y})^*$. 因此, $\lambda_{\alpha,y}\lambda_{\beta,z} = \lambda_{\beta,z}\bar{\lambda}_{\alpha,y}$. 注意到, 由于 $\alpha y \otimes y$ 和 $\beta z \otimes z$ 都非自伴算子, 利用断言 2 知 $\lambda_{\alpha,y}, \lambda_{\beta,z}$ 都是非零的. 故 $\lambda_{\alpha,y} = \bar{\lambda}_{\alpha,y}$, 此蕴含 $\alpha y \otimes y$ 是自伴的, 矛盾. 所以必定有 $h(x \otimes x) = 0$ 对所有 $x \in H$ 成立, 断言 4 得证.

断言 5 对任意一秩算子 $x \otimes y \in \mathcal{B}(H)$, 存在向量 $u_{x,y} \in [x, y]$ 和实数 $\lambda_{x,y}$ 使得 $\Phi(x \otimes y) = u_{x,y} \otimes y + \lambda_{x,y}I$.

令 $x \otimes y \in \mathcal{B}(H)$ 是任意一秩算子. 对任意单位向量 $z \in [y]^\perp$, 有 $(x \otimes y)(z \otimes z) = (z \otimes z)(x \otimes y)^*$, 进而得到 $\Phi(x \otimes y)\Phi(z \otimes z) = \Phi(z \otimes z)\Phi(x \otimes y)^*$. 利用断言 4 可得

$$\Phi(x \otimes y)(z \otimes z) = (z \otimes z)\Phi(x \otimes y)^*, \quad (3.6)$$

由此可知存在 $\lambda_z \in \mathbb{C}$ 使得 $\Phi(x \otimes y)z = \lambda_z z$, 而此蕴含存在数 $\lambda_{x,y}$ 使得 $\Phi(x \otimes y)|_{[y]^\perp} = \lambda_{x,y}I|_{[y]^\perp}$ 成立. 因此 $\Phi(x \otimes y) = u_{x,y} \otimes y + \lambda_{x,y}I$, 其中 $u_{x,y} \in H$. 该式与等式 (3.6) 蕴含 $\lambda_{x,y}z \otimes z = \bar{\lambda}_{x,y}z \otimes z$, 故 $\lambda_{x,y} \in \mathbb{R}$.

现证明 $u_{x,y} \in [x, y]$. 事实上, 由于 $\dim H \geq 3$, 可取单位向量 $w \in [x, y]^\perp$. 则有 $(x \otimes y)(w \otimes w) = (w \otimes w)(x \otimes y)^*$. 利用与上面相同的讨论可证, 存在数 $\mu_{x,y}$ 和算子 $R : [x, y] \rightarrow [x, y]$ 使得 $\Phi(x \otimes y) = (R \oplus 0) + \mu_{x,y}I$ 成立. 由此可得 $u_{x,y} \otimes y + \lambda_{x,y}I = (R \oplus 0) + \mu_{x,y}I$, 此蕴含 $u_{x,y} \in [x, y]$. 断言成立.

断言 6 对任意一秩算子 $x \otimes y \in \mathcal{B}(H)$, 存在依赖于 x 和 y 的实数 $\lambda_{x,y} \in \mathbb{R}$ 使得 $\Phi(x \otimes y) = x \otimes y + \lambda_{x,y}I$.

由断言 5 知, 只需验证 $u_{x,y} = x$ 对所有 $x \in H$ 成立即可.

首先, 对任意向量 $x, y_1, y_2 \in H$, 存在向量 $u_{x,y_1}, u_{x,y_2}, u_{x,y_1+y_2}$ 和实数 $\lambda_{x,y_1}, \lambda_{x,y_2}, \lambda_{x,y_1+y_2}$, 使得

$$\Phi(x \otimes y_1) = u_{x,y_1} \otimes y_1 + \lambda_{x,y_1}I, \quad \Phi(x \otimes y_2) = u_{x,y_2} \otimes y_2 + \lambda_{x,y_2}I$$

和

$$\Phi(x \otimes (y_1 + y_2)) = u_{x,y_1+y_2} \otimes (y_1 + y_2) + \lambda_{x,y_1+y_2}I.$$

利用 Φ 的可加性可得

$$(u_{x,y_1+y_2} - u_{x,y_1}) \otimes y_1 + (u_{x,y_1+y_2} - u_{x,y_2}) \otimes y_2 = (\lambda_{x,y_1} + \lambda_{x,y_2} - \lambda_{x,y_1+y_2})I,$$

注意到 $\dim H \geq 3$, 故必有 $u_{x,y_1} = u_{x,y_1+y_2} = u_{x,y_2}$. 因此 $u_{x,y}$ 与 y 无关. 记 $u_{x,y} = u_x$. 此外, 对任意 $x \in H$, 由于 $u_x = u_{x,y} \in [x, y]$, 存在 $\gamma_x \in \mathbb{C}$ 使得 $u_x = \gamma_x x$.

现在, 对任意向量 $x_1, x_2, y \in H$, 由上面的讨论有

$$\Phi(x_1 \otimes y) = u_{x_1} \otimes y + \lambda_{x_1,y} I, \quad \Phi(x_2 \otimes y) = u_{x_2} \otimes y + \lambda_{x_2,y} I$$

与

$$\Phi((x_1 + x_2) \otimes y) = u_{x_1+x_2} \otimes y + \lambda_{x_1+x_2,y} I.$$

利用 Φ 的可加性, 得到

$$(u_{x_1+x_2} - u_{x_1} - u_{x_2}) \otimes y = (\lambda_{x_1,y} + \lambda_{x_2,y} - \lambda_{x_1+x_2,y}) I,$$

此蕴含 $u_{x_1+x_2} = u_{x_1} + u_{x_2}$. 因此 $\gamma_{x_1+x_2}(x_1 + x_2) = u_{x_1+x_2} = \gamma_{x_1}x_1 + \gamma_{x_2}x_2$, 即 $(\gamma_{x_1+x_2} - \gamma_{x_1})x_1 = (\gamma_{x_2} - \gamma_{x_1+x_2})x_2$. 如果 x_1 和 x_2 是线性无关的, 那么有 $\gamma_{x_1} = \gamma_{x_1+x_2} = \gamma_{x_2}$. 如果 x_1 和 x_2 是线性相关的, 我们可取向量 $x_3 \in H$ 使得 x_3 与 x_1 线性无关. 那么, 由上面的讨论仍然有 $\gamma_{x_1} = \gamma_{x_3} = \gamma_{x_2}$. 所以 γ_x 与 x 无关. 记 $\gamma = \gamma_x$. 即有 $u_x = \gamma x$ 对所有 x 成立. 于是我们已证明 $\Phi(x \otimes y) = \gamma x \otimes y + \lambda_{x,y} I$ 对每个一秩算子 $x \otimes y$ 成立.

最后证明 $\gamma = 1$. 事实上, 由上面的等式可得 $\Phi(x \otimes x) = \gamma x \otimes x + \lambda_x I$ 对每个一秩投影 $x \otimes x \in \mathcal{P}_1(H)$ 成立. 再注意到, 断言 4 蕴含 $\Phi(x \otimes x) = x \otimes x$. 由此不难验证 $\gamma = 1$. 断言 6 得证.

现在利用断言 6 和 Φ 的可加性可得, 对任意有限秩算子 $F \in \mathcal{B}(H)$, 有

$$\Phi(F) = F + \lambda_F I, \quad (3.7)$$

其中 $\lambda_F \in \mathbb{R}$ 是依赖于 F 的数.

断言 7 对任意 $A \in \mathcal{B}(H)$, 我们有 $\Phi(A) = A + \lambda_A I$, 其中 $\lambda_A \in \mathbb{C}$ 是依赖于 A 的数.

由等式 (3.7) 知, 如果 $\dim H < \infty$, 断言成立. 因此我们只需证明该断言对 $\dim H = \infty$ 的情形仍然成立.

首先证明该断言对 $\mathcal{B}(H)$ 中的所有幂等算子成立. 为此, 任取非平凡的幂等算子 Q . 对任意单位向量 $x \in \ker Q$, 有 $Qx \otimes x = 0 = (x \otimes x)Q^*$. 因此由 Φ 保斜 ξ -Lie 零积性和断言 4 可得 $\Phi(Q)x \otimes x = (x \otimes x)\Phi(Q)^*$. 此蕴含 $\Phi(Q)x = \mu_x x$ 对所有 $x \in \ker Q$ 成立, 其中 $\mu_x \in \mathbb{C}$. 所以存在数 μ_Q 使得 $\Phi(Q)|_{\ker Q} = \mu_Q I|_{\ker Q}$, 且

$$\Phi(Q) = Q\Phi(Q)Q + (I - Q)\Phi(Q)Q + \mu_Q(I - Q).$$

类似地, 对幂等元 $I - Q$, 存在数 $\gamma_Q \in \mathbb{C}$ 使得

$$\Phi(I - Q) = \gamma_Q Q + Q\Phi(I - Q)(I - Q) + (I - Q)\Phi(I - Q)(I - Q).$$

因此, 利用等式 (3.1) 可得

$$\begin{aligned} (1 + h(I))I &= \Phi(I) = \Phi(Q) + \Phi(I - Q) \\ &= Q\Phi(Q)Q + (I - Q)\Phi(Q)Q + \mu_Q(I - Q) \\ &\quad + \gamma_Q Q + Q\Phi(I - Q)(I - Q) + (I - Q)\Phi(I - Q)(I - Q). \end{aligned} \quad (3.8)$$

在等式 (3.8) 左右两边分别乘以 $I - Q$ 和 Q , 得到 $(I - Q)\Phi(Q)Q = 0$; 在等式 (3.8) 左右两边分别乘以 Q 与 $I - Q$, 可得 $Q\Phi(I - Q)(I - Q) = 0$; 在等式 (3.8) 两边乘以 Q , 可得 $Q\Phi(Q)Q = (1 + h(I) - \gamma_Q)Q$. 因而, 对任意非平凡幂等算子 Q , 有

$$\Phi(Q) = \alpha_Q Q + \mu_Q I,$$

其中 $\alpha_Q = 1 + h(I) - \gamma_Q - \mu_Q \in \mathbb{C}$.

如果 Q 是有限秩的, 那么, 由等式 (3.7), $\Phi(Q) = Q + \lambda_Q I$, 此蕴含 $\alpha_Q = 1$ 和 $\mu_Q = \lambda_Q$. 如果 Q 不是有限秩的, 令 Q_1 是有限秩幂等算子使得 $Q_1 Q = Q Q_1 = Q_1$. 那么存在满足 $Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1 = 0$ 的幂等算子 Q_2 , 使得 $Q = Q_1 + Q_2$; 进而有 $\alpha_Q Q_1 + \alpha_Q Q_2 + \mu_Q I = Q_1 + \lambda_{Q_1} I + \alpha_{Q_2} Q_2 + \mu_{Q_2} I$, 即

$$(\alpha_Q - 1)Q_1 + (\alpha_Q - \alpha_{Q_2})Q_2 = (\lambda_{Q_1} + \mu_{Q_2} - \mu_Q)I.$$

这证明了 $\alpha_Q = 1 = \alpha_{Q_2}$. 所以 $\Phi(Q) = Q + \mu_Q I$ 对每个幂等元 $Q \in \mathcal{B}(H)$ 成立, 其中 μ_Q 是依赖于 Q 的数. 注意到在 $\dim H = \infty$ 的情形每个算子 $A \in \mathcal{B}(H)$ 都可以表示为至多五个幂等算子的和 (参见文献 [21]), 由此可得 $\Phi(A) = A + \lambda_A I$ 对每个 $A \in \mathcal{B}(H)$ 都成立, 其中 $\lambda_A \in \mathbb{C}$ 是依赖于 A 的数.

断言 8 $\Phi(A) = A$ 对所有算子 $A \in \mathcal{B}(H)$ 成立.

任取 $A \in \mathcal{B}(H)$. 若 $\ker A \cap \ker A^* \neq \{0\}$, 则对任意非零向量 $x \in \ker A \cap \ker A^* \neq \{0\}$, 取非零向量 $y \in H$ 满足 $\langle x, y \rangle = 0$, 我们有 $(y \otimes x)A = A(y \otimes x)^*$. 由断言 7 可知

$$(y \otimes x + \lambda_{y \otimes x} I)(A + \lambda_A I) = (A + \lambda_A I)(y \otimes x + \lambda_{y \otimes x} I)^*.$$

由于 $\lambda_{y \otimes x}$ 是实数, 上面的等式可以化简为 $\lambda_A y \otimes x = \lambda_A x \otimes y$. 所以 $\lambda_A = 0$, 即我们有

$$\lambda_A = 0 \text{ 对所有满足 } \ker A \cap \ker A^* \neq \{0\} \text{ 的算子 } A \text{ 都成立.} \quad (3.9)$$

特别地, $\Phi(A) = A$ 对所有有限秩算子 A 成立. 这意味着, 当 $\dim H < \infty$ 时, 该断言成立. 因而以下可以假设 $\dim H = \infty$.

对任意自伴算子 $S \in \mathcal{B}(H)$ 及任意数 α , 有 $\ker S = \ker S^*$ 与 $\ker(\alpha S) = \ker(\alpha S)^*$ 成立. 利用等式 (3.9), 我们有

$$\Phi(\alpha P) = \alpha P \text{ 对所有非平凡投影 } P \text{ 都成立.} \quad (3.10)$$

现在, 因 $\dim H = \infty$, 由文献 [21] 知, 每个算子 $A \in \mathcal{B}(H)$ 是有限个投影的线性组合. 由此, 利用等式 (3.10) 和 Φ 的可加性立即可得 $\Phi(A) = A$ 对所有算子 A 成立, 从而定理 1.1 得证. 证毕. $\square$

注 我们也可以不利用文献 [21] 中的结果, 直接利用等式 (3.9) 来证明 $\Phi(A) = A$. 事实上, 如果 $\ker A \neq \{0\}$, 那么, 选取单位向量 $x \in \ker A$, 使其满足 $A^* x \neq 0$, 并令 $B = A - x \otimes A^* x$. 易验证 $x \in \ker B \cap \ker B^*$. 由等式 (3.9) 可得 $\Phi(B) = B$ 和 $\Phi(x \otimes A^* x) = x \otimes A^* x$. 于是 $\Phi(A) = \Phi(B) + \Phi(x \otimes A^* x) = A$. 如果 $\ker A = \{0\}$, 那么, 任取单位向量 $x \in H$, 并令 $C = A - Ax \otimes x$, 则 $\ker C \neq \{0\}$. 因此仍有 $\Phi(A) = \Phi(C) + \Phi(Ax \otimes x) = C + Ax \otimes x = A$.

下面我们给出定理 1.2 得证明.

定理 1.2 的证明 充分性显然, 下面通过几个断言完成必要性的证明.

以下, 假设 Φ 是保单位元的可加满射, 且满足对所有 $A, B \in \mathcal{B}(H)$, 有 $AB = \xi BA^* \Leftrightarrow \Phi(A)\Phi(B) = \xi \Phi(B)\Phi(A)^*$ 成立, 其中 $\xi \in \mathbb{C}$ 且 $\xi \neq 0, 1$.

断言 1 Φ 是单射, 从而是双射.

令 $\Phi(A) = 0$. 对任意 $B \in \mathcal{B}(H)$, 由于 $\Phi(B)\Phi(A) = \xi \Phi(A)\Phi(B)^*$, 有 $BA = \xi AB^*$, 特别地, $A = \xi A$. 注意到 $\xi \neq 1$. 所以 $A = 0$.

断言 2 Φ 双边保投影.

设 $P \in \mathcal{B}(H)$ 为投影. 则由 $P(I - P) = \xi(I - P)P^*$ 得 $\Phi(P)(I - \Phi(P)) = \xi(I - \Phi(P))\Phi(P)^*$, 即有

$$\Phi(P) - \Phi(P)^2 = \xi \Phi(P)^* - \xi \Phi(P)\Phi(P)^*. \quad (3.11)$$

类似地, 利用关系式 $(I - P)P = \xi P(I - P)^*$, 可得 $\Phi(P) - \Phi(P)^2 = \xi\Phi(P) - \xi\Phi(P)\Phi(P)^*$. 该式与等式 (3.11) 蕴含 $\xi(\Phi(P) - \Phi(P)^*) = 0$. 由于 $\xi \neq 0$, 我们有 $\Phi(P) = \Phi(P)^*$. 再应用等式 (3.11), 得 $(1 - \xi)\Phi(P) = (1 - \xi)\Phi(P)^2$. 进而由于 $\xi \neq 1$, 必有 $\Phi(P) = \Phi(P)^2$. 因此 $\Phi(P)$ 是投影. 因为 Φ^{-1} 与 Φ 有相同的性质, Φ^{-1} 也保投影.

断言 3 存在 H 到 K 上的酉或反酉算子 U 使得 $\Phi(P) = UPU^*$ 对每个投影 $P \in \mathcal{B}(H)$ 成立.

由于 Φ 可加且双边保投影, 易证 Φ 双边保投影的正交性. 事实上, 对任意投影 $P, Q \in \mathcal{P}(H)$, 若 $PQ = QP = 0$, $P + Q$ 也是投影. 由断言 2 知, $\Phi(P) + \Phi(Q)$ 是投影. 由此得 $\Phi(P)\Phi(Q) = \Phi(Q)\Phi(P) = 0$, 这意味着 Φ 保投影的正交性. 对 Φ^{-1} 应用类似的讨论, 可得 Φ 双边保投影的正交性. 现在, 应用引理 2.3, 断言 3 成立.

断言 4 $\Phi(\mathbb{C}P) = \mathbb{C}\Phi(P)$ 对每个一秩投影 $P \in \mathcal{B}(H)$ 成立.

首先证明

$$U(\ker A \cap \ker A^*) = \ker \Phi(A) \cap \ker \Phi(A)^* \text{ 对所有 } A \in \mathcal{B}(H) \text{ 成立.} \quad (3.12)$$

显然, 如果 $\ker A \cap \ker A^* = \{0\}$, 那么 $U(\ker A \cap \ker A^*) \subseteq \ker \Phi(A) \cap \ker \Phi(A)^*$. 如果 $\ker A \cap \ker A^* \neq \{0\}$, 那么, 对任意单位向量 $x \in \ker A \cap \ker A^*$, 由于 $x \otimes xA = \xi Ax \otimes x$, 有 $Ux \otimes Ux\Phi(A) = \xi\Phi(A)Ux \otimes Ux$. 因而存在 $\lambda_A, \gamma_A \in \mathbb{C}$ 使得 $\Phi(A)Ux = \lambda_A Ux$ 和 $\Phi(A)^*Ux = \gamma_A Ux$ 成立. 这意味着一维子空间 $[Ux]$ 是 $\Phi(A)$ 的约化子空间, $\gamma_A = \bar{\lambda}_A$. 所以 $\lambda_A = \xi\lambda_A$, 此迫使 $\lambda_A = 0$ (因 $\xi \neq 1$). 因此 $U(\ker A \cap \ker A^*) \subseteq \ker \Phi(A) \cap \ker \Phi(A)^*$. 对于另一包含关系, 注意到 $\Phi^{-1}(Q) = U^*QU$ 对所有投影 $Q \in \mathcal{B}(K)$ 成立, 对 Φ^{-1} 进行类似的讨论, 可得 $\ker \Phi(A) \cap \ker \Phi(A)^* \subseteq U(\ker A \cap \ker A^*)$. 因而等式 (3.12) 成立. 现在利用等式 (3.12), 可知 $\Phi(\mathbb{C}P) = \mathbb{C}\Phi(P)$ 对所有一秩投影 P 成立.

断言 5 Φ 保一秩算子.

令 $y \otimes g \in \mathcal{B}(H)$ 是一秩算子. 任取满足 $\langle x, g \rangle = 0$ 的单位向量 $x \in H$, 我们有 $(y \otimes g)(x \otimes x) = \xi(x \otimes x)(y \otimes g)^*$, 由断言 3 知, 此式蕴含 $\Phi(y \otimes g)Ux \otimes Ux = \xi Ux \otimes Ux\Phi(y \otimes g)$. 因此 $\Phi(y \otimes g)Ux$ 与 Ux 是线性相关的. 由此可知, 存在数 λ 使得

$$\Phi(y \otimes g)|_{[Ug]^\perp} = \lambda I|_{[Ug]^\perp}. \quad (3.13)$$

如果 y, g 线性相关, 注意到 $\Phi(\mathbb{C}P) = \mathbb{C}\Phi(P)$ 对每个一秩投影 P 成立, 此时显然有 $\Phi(y \otimes g)$ 是一秩算子. 因此, 下面总假设 y 与 g 线性无关. 不失一般性, 令 $\|g\| = 1$. 如果 $\langle y, g \rangle = 0$, 由等式 (3.12) 知, $\Phi(y \otimes g)$ 是秩最多为 2 的算子. 因为 $\dim H \geq 3$, 这迫使等式 (3.13) 中的 $\lambda = 0$. 进而存在向量 $x_1 \in H$ 使得 $\Phi(y \otimes g) = x_1 \otimes Ug$, 这显然是一秩算子. 如果 $\langle y, g \rangle = \alpha \neq 0$, 令 $y_1 = y - \alpha g$, 那么, $y_1 \neq 0$ 且 $\langle y_1, g \rangle = 0$. 利用已经证明的结论, 存在 $x_1 \in H$ 使得 $\Phi(y_1 \otimes g) = x_1 \otimes Ug$. 由于 Φ 可加, 利用断言 3 和 4 知, 存在非零数 α_1 使得

$$\Phi(y \otimes g) = \Phi(\alpha g \otimes g) + \Phi(y_1 \otimes g) = \alpha_1 Ug \otimes Ug + x_1 \otimes Ug = (\alpha_1 Ug + x_1) \otimes Ug,$$

此蕴含 $\Phi(y \otimes g)$ 是一秩算子. 所以 Φ 是保一秩的.

断言 6 $\Phi(F) = UFU^*$ 对所有有限秩算子 $F \in \mathcal{B}(H)$ 成立. 特别地, 在 $\dim H < \infty$ 的情形, 定理成立.

利用断言 5 和参考文献 [22] 知, 存在环同态 $\tau: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 和 τ -线性变换 $A, C: H \rightarrow K$ 使得要么 (i) $\Phi(x \otimes y) = Ax \otimes Cy$ 对所有 $x, y \in H$ 成立; 要么 (ii) $\Phi(x \otimes y) = Ay \otimes Cx$ 对所有 $x, y \in H$ 成立. 注意到

$\Phi(P) = UPU^*$ 对每个一秩投影 P 成立 (断言 3). 这蕴含 $A = C = U$. 所以要么 $\Phi(x \otimes y) = Ux \otimes Uy$ 对所有向量 $x, y \in H$ 成立, 要么 $\Phi(x \otimes y) = Uy \otimes Ux$ 对所有向量 $x, y \in H$ 成立. 我们断言, (ii) 不能发生. 反之, 若 (ii) 成立, 取向量 $x, y, z \in H$ 使得 $\langle x, z \rangle = 1, \langle y, z \rangle = 0$. 由于 $(x \otimes y)(z \otimes z) = \xi(z \otimes z)(x \otimes y)^*$, 有 $\Phi(x \otimes y)\Phi(z \otimes z) = \xi\Phi(z \otimes z)\Phi(x \otimes y)^*$, 此蕴含 $Uy \otimes Uz = \xi Uz \otimes Uy$. 于是 y 与 z 是线性相关的, 矛盾. 因此 $\Phi(x \otimes y) = Ux \otimes Uy$ 对所有 $x, y \in H$ 成立. 现在, 利用 Φ 的可加性即知该断言成立.

证明的其余部分, 我们验证 $\dim H = \infty$ 的情形.

断言 7 假设 $\dim H = \infty$. 对任意的 $A \in \mathcal{B}(H)$, 我们有 $\Phi(A) = UAU^*$.

令 $Q \in \mathcal{B}(H)$ 是任一非平凡幂等元. 对任意向量 $x \in \ker Q$, 有 $Qx \otimes x = \xi(x \otimes x)Q^*$, 因此 $\Phi(Q)Ux \otimes Ux = \xi(Ux \otimes Ux)\Phi(Q)^*$. 这证明了 $\Phi(Q)Ux$ 和 Ux 是局部线性相关的, 进而存在数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $\Phi(Q)|_{U(\ker Q)} = \lambda I|_{U(\ker Q)}$. 记 $R = UQU^*$. 则 $\Phi(Q) = R\Phi(Q)R + (I - R)\Phi(Q)R + \lambda(I - R)$. 类似地, 对幂等元 $I - Q$, 可证明存在数 $\gamma \in \mathbb{C}$ 使得

$$\Phi(I - Q) = \gamma R + R\Phi(I - Q)(I - R) + (I - R)\Phi(I - Q)(I - R).$$

注意到 $\Phi(I) = I$. 上面的两个等式蕴含

$$(I - R)\Phi(Q)R = 0, R\Phi(I - Q)(I - R) = 0 \text{ 和 } R\Phi(Q)R = (1 - \gamma)R.$$

所以, 对任意非平凡幂等算子 Q , 存在数 λ_Q 和 γ_Q 使得 $\Phi(Q) = \lambda_Q UQU^* + \gamma_Q I$. 现在, 利用与定理 1.1 中断言 7 类似的证明, 易证存在可加泛函 $h: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathbb{C}$ 使得 $\Phi(A) = UAU^* + h(A)I$ 对所有 A 成立.

下面证明 $h \equiv 0$, 因此 $\Phi(A) = UAU^*$ 对所有 A 成立.

首先证明

$$h(A) = 0 \text{ 对所有满足条件 } \ker A \cap \ker A^* \neq \{0\} \text{ 的 } A \in \mathcal{B}(H) \text{ 都成立.} \quad (3.14)$$

事实上, 对任意满足 $\ker A \cap \ker A^* \neq \{0\}$ 的 $A \in \mathcal{B}(H)$, 可取单位向量 $x \in \ker A \cap \ker A^*$. 由等式 (3.12) 和断言 7 得到 $Ux \in \ker(UAU^* + h(A)I) \cap \ker(UAU^* + h(A)I)^*$, 而此蕴含 $h(A) = 0$.

现在, 如果 $\ker A \neq \{0\}$, 取单位向量 $x \in \ker A$, 并令 $B = A - (x \otimes x)A$. 那么 $x \in \ker B \cap \ker B^* \neq \{0\}$. 由等式 (3.14) 可得 $h(B) = 0$. 所以 $h(A) = h(B) + h((x \otimes x)A) = 0$. 如果 $\ker A = \{0\}$, 取单位向量 $x \in H$, 并令 $C = A - Ax \otimes x$. 那么 $Cx = 0$. 由上面的讨论得到 $h(C) = 0$. 因此, 仍然有 $h(A) = h(C) + h(Ax \otimes x) = 0$, 断言 7 得证.

断言 8 定理成立.

由断言 6-7 知, 我们已证明, 对任意 $A \in \mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(A) = UAU^*$, 其中 U 是 H 到 K 上的酉或反酉算子. 为完成定理的证明, 我们需验证, 当 U 是反酉算子时, ξ 只能是实数. 为此, 假设 U 是反酉算子. 取算子 $A, B \in \mathcal{B}(H)$, 使其满足关系式 $AB = \xi BA^* \neq 0$. 那么 $UAU^*UBU^* = \bar{\xi}UBU^*UA^*U^*$, 即 $\Phi(A)\Phi(B) = \bar{\xi}\Phi(B)\Phi(A)^*$. 另一方面, $AB = \xi BA^*$ 蕴含 $\Phi(A)\Phi(B) = \xi\Phi(B)\Phi(A)^*$. 因此 $\bar{\xi} = \xi \in \mathbb{R}$. 证毕. $\square$

致谢 作者对审稿人为本文提供的宝贵意见表示感谢.

参考文献

- 1 Brešar M, Fošner M. On rings with involution equipped with some new product. Publ Math Debrecen, 2000, 57: 121-134

- 2 Šemrl P. Quadratic functionals and Jordan $*$ -derivations. *Studia Math*, 1991, 97: 157–165
- 3 Šemrl P. On Jordan $*$ -derivations and an application. *Colloq Math*, 1990, 59: 241–251
- 4 Molnár L. A condition for a subspace of $\mathcal{B}(H)$ to be an ideal. *Linear Alg Appl*, 1996, 235: 229–234
- 5 Kassel C. *Quantum Groups*. New York: Springer-Verlag, 1995
- 6 Qi X F, Hou J C. Characterization of Lie multiplicative isomorphisms between nest algebras. *Sci China Math*, 2011, 54: 2453–2462
- 7 Cui J L, Li C K. Maps preserving product $XY - YX^*$ on factor von Neumann algebras. *Linear Alg Appl*, 2009, 431: 833–842
- 8 Bai Z F, Du S P. Maps preserving products $XY - YX^*$ on von Neumann algebras. *J Math Anal Appl*, 2012, 386: 103–109
- 9 Dai L, Lu F Y. Nonlinear maps preserving Jordan $*$ -products. *J Math Anal Appl*, 2014, 409: 180–188
- 10 Cui J L, Hou J C. Maps leaving functional values of operator products invariant. *Lin Alg Appl*, 2008, 428: 1649–1663
- 11 Hou J C, Zhang X L. Ring isomorphisms and linear or additive maps preserving zero products on nest algebras. *Linear Alg Appl*, 2004, 387: 343–360
- 12 Hou J C, Zhao L K. Zero-product preserving additive maps on symmetric operator spaces and self-adjoint operator spaces. *Linear Alg Appl*, 2005, 399: 235–244
- 13 Chebotar M A, Fong Y, Lee P H. On maps preserving zeros of the polynomial $xy - yx^*$. *Linear Alg Appl*, 2005, 408: 230–243
- 14 Cui J L, Hou J C. Linear maps preserving elements annihilated by a polynomial $XY - YX^\dagger$. *Studia Math*, 2006, 174: 183–199
- 15 Hou J C, Gao M C. Additive mappings preserving zero products on $\mathcal{B}(H)$. *Chin Sci Bull*, 1998, 43: 2388–2392
- 16 Molnár L, Šemrl P. Non-linear commutativity preserving maps on self-adjoint operators. *Quart J Math*, 2005, 56: 589–595
- 17 Molnár L. Orthogonality preserving transformations on indefinite inner product spaces: Generalization of Uhlhorn's version of Wigner's theorem. *J Funct Anal*, 2002, 194: 248–262
- 18 Hou J C, He K, Qi X F. Characterizing sequential isomorphisms on Hilbert space effect algebras. *J Phys A: Math Theor*, 2010, 43: 315206
- 19 Šemrl P. Maps on idempotents. *Studia Math*, 2005, 169: 21–44
- 20 Šemrl P. Maps on idempotent operators. *Banach Center Publications*, 2007, 75: 289–301
- 21 Pearcy C, Topping D. Sums of small numbers of idempotents. *Michigan Math J*, 1967, 14: 453–465
- 22 Kuzma B. Additive mappings decreasing rank one. *Linear Alg Appl*, 2002, 348: 175–187

Additive maps preserving zero skew ξ -Lie products

QI XiaoFei, HOU JinChuan & CUI JianLian

Abstract Let H and K be complex Hilbert spaces with dimensions greater than 2, and $\xi \in \mathbb{C}$. Assume that $\Phi : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(K)$ is an additive surjective map satisfying that, for any $A, B \in \mathcal{B}(H)$, $AB = \xi BA^* \Leftrightarrow \Phi(A)\Phi(B) = \xi\Phi(B)\Phi(A)^*$. We show that, (1) if $\xi = 1$, then there exist a unitary or an anti-unitary operator $U : H \rightarrow K$ and a nonzero real number c such that $\Phi(A) = cUAU^*$ for all $A \in \mathcal{B}(H)$; (2) if $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ and Φ is unital, then there is a unitary or an anti-unitary operator $U : H \rightarrow K$ such that $\Phi(A) = UAU^*$ for all $A \in \mathcal{B}(H)$; (3) if $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ and Φ is unital, then there is a unitary operator $U : H \rightarrow K$ such that $\Phi(A) = UAU^*$ for all $A \in \mathcal{B}(H)$.

Keywords operators on Hilbert spaces, additive maps, skew Lie products, $*$ -isomorphisms

MSC(2010) 47B49, 47B48

doi: 10.1360/012014-69