常拟 Hermite 数量曲率 Sasaki 流形的刚性

献给胡和生教授 90 华诞

东瑜昕¹, 嵇庆春¹, 任益斌^{2*}

1. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433;

2. 浙江师范大学数理与信息工程学院, 金华 321004

E-mail: yxdong@fudan.edu.cn, qingchunji@fudan.edu.cn, allenryb@outlook.com

收稿日期: 2017-08-24; 接受日期: 2018-01-05; 网络出版日期: 2018-04-10; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11771087, 11671090 和 11626217) 和复旦大学非线性数学模型与方法开放实验室资助项目

摘要 本文在常拟 Hermite 数量曲率 Sasaki 流形中, 利用 Schrödinger 型算子的特征值和曲率的增长性条件, 建立了拟 Einstein Sasaki 流形和 Sasaki 空间形式的刚性.

关键词 刚性 拟 Einstein 结构 Sasaki 空间形式 Schrödinger 型算子 第一特征值

MSC (2010) 主题分类 32V05, 32V20, 53C24

1 引言

众所周知, Riemann 流形 (M^n, g) 的 Riemann 曲率可分解为

$$Rm = W + \frac{1}{n-2}E \oslash g + \frac{\rho}{2n(n-1)}g \oslash g,$$

其中 W 是 Weyl 张量, E 是无迹的 Ricci 张量, ρ 是数量曲率, $\oslash$ 表示 Kulkarni-Nomizu 积. 它们分别刻画了重要的 Riemann 流形, 例如, $E = 0$ 意味着 Einstein 流形, 而对 4 维以上流形, $W = 0$ 意味着局部共形平坦流形. Riemann 几何中一类重要的问题是研究这些结构的刚性 (参见文献 [1–8]). 而这些张量往往满足如下类型的椭圆微分不等式:

$$\psi \Delta \psi + a(x)\psi^2 + A|\nabla \psi|^2 \geq 0.$$

利用最大值原理或者椭圆估计, 众多有几何意义的刚性定理在逐点条件或者积分条件下被建立起来.

在拟 Hermite 几何中, 拟 Hermite 曲率可分解为

$$R_{\bar{\alpha}\beta\lambda\bar{\mu}} = C_{\bar{\alpha}\beta\lambda\bar{\mu}} + \frac{1}{n+2}(E_{\bar{\alpha}\beta}\delta_{\lambda\bar{\mu}} + E_{\bar{\alpha}\lambda}\delta_{\beta\bar{\mu}} + \delta_{\bar{\alpha}\beta}E_{\lambda\bar{\mu}} + \delta_{\bar{\alpha}\lambda}E_{\beta\bar{\mu}}) + \frac{\rho}{n(n+1)}(\delta_{\bar{\alpha}\beta}\delta_{\lambda\bar{\mu}} + \delta_{\bar{\alpha}\lambda}\delta_{\beta\bar{\mu}}),$$

英文引用格式: Dong Y X, Ji Q C, Ren Y B. Rigidities of Sasakian manifolds with constant pseudo-Hermitian scalar curvature (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 711–724, doi: 10.1360/N012017-00190

其中 $R_{\bar{\alpha}\beta\lambda\bar{\mu}}$ 是拟 Hermite 曲率张量, C 是 Chern-Moser 张量, E 是无迹的拟 Hermite Ricci 张量, ρ 是拟 Hermite 数量曲率. 我们知道 $E = 0$ 意味着拟 Hermite 结构是拟 Einstein 的; 而对于 5 维及其以上的拟 Hermite 流形, $C = 0$ 意味着拟 Hermite 流形局部 CR 共形等价于标准的奇数维球面. 在拟 Hermite 几何的框架下, Sasaki 流形是指拟 Hermite 挠率消失的拟 Hermite 流形. 有趣的是, Sasaki 几何也是切触几何的一个子类, 它与 Kähler 几何有着密切的联系. 它的几何与拓扑性质已得到了广泛而深入的研究 (参见文献 [9]). 在 Sasaki 流形上, 文献 [10] 计算了 Chern-Moser 张量 C 和无迹的拟 Hermite Ricci 张量 E 所满足的次椭圆微分不等式:

$$\psi \Delta_b \psi + a(x) \psi^2 + B |\nabla_b \psi|^2 \geq 0,$$

其中 $a(x)$ 和 B 分别是与曲率相关的 Lipschitz 函数和常数, ∇_b 是水平梯度, 并且在 CR Yamabe 常数为正的条件下建立了拟 Einstein 结构和 Sasaki 空间形式的刚性.

本文继续文献 [10] 的研究工作. 我们将在算子 $\mathcal{L} = -\Delta_b - Ha(x)$ 的第一特征值条件下建立拟 Einstein 结构和 Sasaki 空间形式的刚性定理.

2 准备工作

本节将介绍拟 Hermite 流形的一些基本概念和重要公式. 关于拟 Hermite 几何进一步的讨论, 读者可参见文献 [11, 12] 等. 如果一个 $2n+1$ 维的光滑流形 M 上有满足如下条件的 n 维复子丛 $T_{1,0}M \subset TM \otimes \mathbb{C}$:

$$T_{1,0}M \cap T_{0,1}M = 0, \quad (2.1)$$

$$[\Gamma(T_{1,0}M), \Gamma(T_{1,0}M)] \subset \Gamma(T_{1,0}M), \quad (2.2)$$

其中 $T_{0,1}M = \overline{T_{1,0}M}$ 是 $T_{1,0}M$ 的复共轭, 那么称 M 是 CR 流形.

CR 结构等价于实子丛 $HM = \text{Re}\{T_{1,0}M \oplus T_{0,1}M\}$ 以及其上“可积”的近复结构 $J(X + \bar{X}) = i(X - \bar{X}) : HM \rightarrow HM$. 由于近复结构 J 给出了实子丛 HM 的一个定向, 所以, 流形 M 的可定向性等价于零化 HM 且处处非零的整体 1- 形式 θ 的存在性. 该 1- 形式 θ 称为拟 Hermite 结构. 对于任意给定的拟 Hermite 结构 θ , 我们可如下定义它的 Levi 形式 L_θ :

$$L_\theta(X, Y) = d\theta(X, JY),$$

其中 $Z, W \in HM$. 如果该 Levi 形式是处处正定的, 那么我们称该 CR 流形是严格拟凸的, 且称四元组 (M, HM, J, θ) 是拟 Hermite 流形. 值得注意的是, 严格拟凸性在 CR 共形变换 $\tilde{\theta} = e^{2u}\theta$ 下保持不变.

定义 2.1 如果 (M, HM, J, θ) 和 $(\tilde{M}, \tilde{H}\tilde{M}, \tilde{J}, \tilde{\theta})$ 是两个拟 Hermite 流形, 而且它们之间存在满足如下条件的微分同胚 $f : M \rightarrow \tilde{M}$:

$$f^* \tilde{\theta} = c\theta,$$

$$df \circ J|_{HM} = \tilde{J} \circ df|_{HM},$$

其中 c 是正常数, 那么称它们是 D-相似 (D-homothetic) 等价的.

在拟 Hermite 流形 (M, HM, J, θ) 上, 存在唯一的处处非零且与 HM 横截的向量场 ξ 使得 $\xi \lrcorner \theta = 1$, $\xi \lrcorner d\theta = 0$. 称 ξ 为 Reeb 向量场. 从而, 切丛 TM 上有如下分解:

$$TM = HM \oplus \mathbb{R}\xi. \quad (2.3)$$

它诱导了水平投影 $\pi_H : TM \rightarrow HM$. 令 $G_\theta = \pi_H^* L_\theta$. 根据 Levi 形式的正定性知, 如下定义的 2- 张量:

$$g_\theta = G_\theta + \theta \otimes \theta \quad (2.4)$$

是 Riemann 度量, 称为 Webster 度量. 在此度量下, HM 与 ξ 正交. 在叶状结构的几何学中, $\mathbb{R}\xi$ 提供了 1- 维的叶状结构, HM 是相应的水平丛. 令 $J\xi = 0$, 近复结构 J 可延拓成切丛 TM 的自同态, 仍记为 J . 此外, 可积性条件 (2.2) 保证了 Webster 度量 g_θ 是 J - 不变的. 易验证, $(2n+1)$ - 形式 $\theta \wedge (d\theta)^n$ 与 g_θ 对应的体积元只相差常数因子. 因此, 在拟 Hermite 几何中, 往往用前者作为体积元. 为了方便起见, 本文在计算积分时将省略该体积元.

在拟 Hermite 流形上, 存在保持 CR 结构和 Webster 度量的典则联络.

命题 2.2 ^[12, 13] 设 (M, HM, J, θ) 是拟 Hermite 流形, 则存在唯一的线性联络 ∇ 满足

- (1) 水平丛 HM 关于 ∇ 是平行的;
- (2) $\nabla J = 0$, $\nabla g_\theta = 0$;
- (3) 挠率 T_∇ 是纯虚的, 即对任意的 $X, Y \in HM$, 有

$$T_\nabla(X, Y) = 2d\theta(X, Y)\xi \quad \text{和} \quad T_\nabla(\xi, JX) + JT_\nabla(\xi, X) = 0.$$

该联络称为 Tanaka-Webster 联络.

由性质 (3) 可知, Tanaka-Webster 联络的挠率在 $HM \times HM$ 上的部分是由 $d\theta$ 所确定的, 故总是非零. 而其与 Reeb 方向相关的部分称为拟 Hermite 挠率 τ , 即 $\tau(X) = T_\nabla(\xi, X)$. 我们记相应的 2- 张量为 A (也称为拟 Hermite 挠率), 定义如下: 对于任意的 $X, Y \in TM$, 有

$$A(X, Y) = g_\theta(X, \tau(Y)).$$

性质 (3) 保证了拟 Hermite 挠率 A 是对称且无迹的. 如果拟 Hermite 挠率消失, 那么该拟 Hermite 流形也称为 Sasaki 流形. Sasaki 几何是 Kähler 几何的奇数维版本, 并已得到了广泛的研究. 详情可参见 Boyer 和 Galicki 的书 [9].

设 R 是 Tanaka-Webster 联络的曲率张量. 类似于 Riemann 曲率张量, R 满足如下的对称性和反对称性:

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle = -\langle R(Y, X)Z, W \rangle,$$

其中 $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$. 令 $e_0 = \xi$. 设 U 是 M 的开集, $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ 是水平丛 HM 在 U 上的一个局部么正标架且满足 $e_{i+n} = Je_i$, $i = 1, \dots, n$, 则 $\{\eta_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_\alpha - iJe_\alpha)\}_{\alpha=1}^n$ 是 $T_{1,0}M|_U$ 上的一组酉标架. Webster^[12] 指出除了 $R_{\bar{\alpha}\beta\lambda\bar{\mu}} = \langle R(\eta_\lambda, \eta_{\bar{\mu}})\eta_\beta, \eta_{\bar{\alpha}} \rangle$, 其余部分都可由拟 Hermite 挠率给出:

$$R_{\bar{\alpha}\beta\bar{\lambda}\bar{\mu}} = 2i(A_{\bar{\alpha}\bar{\mu}}\delta_{\beta\bar{\lambda}} - A_{\bar{\alpha}\bar{\lambda}}\delta_{\beta\bar{\mu}}), \quad (2.5)$$

$$R_{\bar{\alpha}\beta\lambda\mu} = 2i(A_{\beta\mu}\delta_{\bar{\alpha}\bar{\lambda}} - A_{\beta\bar{\lambda}}\delta_{\bar{\alpha}\mu}), \quad (2.6)$$

$$R_{\bar{\alpha}\beta 0\bar{\mu}} = A_{\bar{\alpha}\bar{\mu}, \beta}, \quad (2.7)$$

$$R_{\bar{\alpha}\beta 0\mu} = -A_{\mu\beta, \bar{\alpha}}, \quad (2.8)$$

其中 $A_{\mu\beta, \bar{\alpha}}$ 是共变导数 ∇A 的分量. 该曲率张量 R 满足如下的第一 Bianchi 恒等式:

$$\mathcal{S}(R(X, Y)Z) = 2\mathcal{S}(d\theta(X, Y)\tau(Z)), \quad (2.9)$$

其中 $\mathcal{S}$ 表示关于 $X, Y, Z \in \Gamma(HM)$ 的循环和. 从分量的角度来说, 这就意味着

$$R_{\bar{\alpha}\beta\lambda\bar{\mu}} = R_{\bar{\alpha}\lambda\beta\bar{\mu}}.$$

Tanaka^[13] 定义了如下的拟 Hermite Ricci 曲率张量 R_* :

$$R_*X = -i \sum_{\lambda=1}^n R(\eta_\lambda, \eta_{\bar{\lambda}})JX. \quad (2.10)$$

令 $R_*\eta_\alpha = R_{\alpha\bar{\beta}}\eta_\beta$. 根据第一 Bianchi 恒等式可知,

$$R_{\alpha\bar{\beta}} = R_{\bar{\beta}\alpha\lambda\bar{\lambda}} = R_{\bar{\beta}\lambda\alpha\bar{\lambda}}.$$

拟 Hermite 数量曲率定义为 $\rho = R_{\alpha\bar{\alpha}} = R_{\bar{\beta}\beta\alpha\bar{\alpha}}$. 需要注意的是, 这种方式定义的拟 Hermite 数量曲率是拟 Hermite Ricci 曲率迹的一半. 类似于 Einstein 度量, 如果拟 Hermite Ricci 曲率张量和 G_θ 只相差一个乘子, 即 $R_{\alpha\bar{\beta}} = u\delta_{\alpha\bar{\beta}}$, 那么该拟 Hermite 流形是拟 Einstein 的. 令张量

$$E = R_* - \frac{\rho}{n}G_\theta.$$

显然, 拟 Einstein 流形必定满足 $E = 0$. 然而, Schur 定理在拟 Hermite 流形上往往不成立. 在 5 维及其以上情形, 这将依赖于拟 Hermite 挠率的散度. 事实上, 根据第二 Bianchi 恒等式^[14], 此时有

$$\rho_\lambda = 2inA_{\lambda\mu, \bar{\mu}}.$$

特别地, 我们知道拟 Einstein Sasaki 流形的拟 Hermite 数量曲率是常数.

类似于全纯截曲率, Webster^[12] 引入了拟 Hermite 截曲率. 对于任意的 $x \in M$ 和 $Z \in T_{1,0}M_x$, 沿 Z 的拟 Hermite 截曲率为

$$k_\theta(Z) = -\frac{1}{4} \frac{g_\theta(R(Z, \bar{Z})\bar{Z}, Z)}{g_\theta(Z, \bar{Z})^2}.$$

此处加入系数 $-\frac{1}{4}$ 的原因可参见文献 [11, 第 59 页]. 如果 k_θ 与 x 和 Z 的选取无关, 那么该拟 Hermite 流形称为空间形式.

例 2.3 设 $\mathbb{C}^{n+1}$ 是复欧氏空间, 其坐标为 $(z, w) = (z^1, \dots, z^n, w)$. 令

$$Q_0 : r_0(z, w) = |z|^2 + \frac{i}{2}(w - \bar{w}) = 0,$$

$$Q_+ : r_+(z, w) = |z|^2 + |w|^2 - 1 = 0,$$

$$Q_- : r_-(z, w) = |z|^2 - |w|^2 + 1 = 0.$$

它们都可由外围空间 $\mathbb{C}^{n+1}$ 来诱导标准的 CR 结构和拟 Hermite 结构, 使其形成拟 Hermite 流形. 特别地, Q_+ 是 S^{2n+1} , Q_0 等价于 Heisenberg 群 $\mathbb{H}_n$. Webster^[12] 说明了 Q_0 、 Q_+ 和 Q_- 是拟 Hermite 截曲率为 0、+1 和 -1 的 Sasaki 空间形式 (也可参见文献 [11]). 事实上, Sasaki 空间形式的万有覆盖空间只有这三类.

定理 2.4 ^[9, 15, 16] 完备单连通的 Sasaki 空间形式必定 D- 相似于 Q_0 、 Q_+ 或者 Q_- .

通过研究在 CR 共形变换下的不变量, Chern 和 Moser ^[17] 及 Webster ^[12] 引入了类似于 Weyl 张量的 Chern-Moser 张量 C . 该张量在 CR 共形变换下也是共形变化的, 即如果 $\tilde{\theta} = e^{2u}\theta$, 那么, $\tilde{C} = e^{-2u}C$. 进而,

$$\|C\|_{L^{n+1}(M)} = \left(\int_M |C|^{n+1} \theta \wedge (d\theta)^n \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

是 CR 共形不变量. 如果拟 Hermite 局部 CR 共形等价于标准球面 $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, 那么该拟 Hermite 流形称为是球形的 (spherical). Chern-Moser 张量在 5 维及其以上情形很好地刻画了这个性质, 即若拟 Hermite 流形维数等于或者超过 5 维, 且 Chern-Moser 张量消失, 则它是球形的. 由于拟 Hermite 曲率张量可正交分解为

$$\begin{aligned} R_{\bar{\alpha}\beta\lambda\bar{\mu}} &= C_{\bar{\alpha}\beta\lambda\bar{\mu}} + \frac{1}{n+2} (E_{\bar{\alpha}\beta}\delta_{\lambda\bar{\mu}} + E_{\bar{\alpha}\lambda}\delta_{\beta\bar{\mu}} + \delta_{\bar{\alpha}\beta}E_{\lambda\bar{\mu}} + \delta_{\bar{\alpha}\lambda}E_{\beta\bar{\mu}}) \\ &\quad + \frac{\rho}{n(n+1)} (\delta_{\bar{\alpha}\beta}\delta_{\lambda\bar{\mu}} + \delta_{\bar{\alpha}\lambda}\delta_{\beta\bar{\mu}}), \end{aligned}$$

所以, 拟 Hermite 流形是空间形式等价于它是球形且拟 Einstein 的.

受 Riemann 几何的启发, 研究拟 Hermite 几何的一个重要工具是次 Laplace 算子 Δ_b . 对于任意的 $u \in C^2(M)$, $\Delta_b u$ 的定义如下:

$$\Delta_b u = \operatorname{div}(\nabla_b u),$$

其中 div 是关于体积因子 $\theta \wedge (d\theta)^n$ 的散度, $\nabla_b u$ 是梯度 ∇u 在水平丛上的投影 (称为水平梯度). 次 Laplace 算子是在 Reeb 方向退化的 $\frac{1}{2}$ 次的次椭圆算子. 它与椭圆算子有很多类似的性质, 如最大值原理和正则性提升理论等. 设 $q(x) \in C^\infty(M)$, $\Omega \Subset M$. 记 Schrödinger 型算子

$$\mathcal{L}_\Omega = -\Delta_b + q(x),$$

且 $\lambda_1(\mathcal{L}_\Omega)$ 为算子 $\mathcal{L}_\Omega$ 在 Ω 上 Dirichlet 边界的第一特征值, 即有

$$\lambda_1(\mathcal{L}_\Omega) = \inf_{f \in C_c^\infty(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla_b f|^2 + qf^2}{\int_\Omega f^2}.$$

由最大值原理可知, $\lambda_1(-\Delta_b |_\Omega) > 0$.

定义 2.5 设 (M, HM, J, θ) 是完备非紧的拟 Hermite 流形, $\{\Omega_i\}$ 是一个紧致的穷竭序列. 设 $q(x) \in C^\infty(M)$. 定义 Schrödinger 型算子 $\mathcal{L} = -\Delta_b + q(x)$ 的 L^2 最佳下界为

$$\lambda_1(\mathcal{L}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_1(\mathcal{L}_{\Omega_i}).$$

值得注意的是, 该定义与穷竭序列的选取无关. 这是因为, 如果 $\Omega \subset \Omega'$, 那么,

$$\lambda_1(\mathcal{L}_\Omega) \geq \lambda_1(\mathcal{L}_{\Omega'}).$$

进一步, $\lambda_1(-\Delta_b) \geq 0$.

Folland 和 Stein ^[18] 从水平丛的角度给出了拟 Hermite 流形上的广义 Sobolev 空间, 称为 Folland-Stein 空间. 设 U 是拟 Hermite 流形 (M, HM, J, θ) 上的开集, 则其上的 Folland-Stein 空间 $S_1^2(U)$ 定义如下:

$$S_1^2(U) = \{f \in L^2(U) \mid \nabla_b f \in L^2(U)\},$$

相应的范数为

$$\|f\|_{S_1^2(U)} = \|f\|_{L^2(U)} + \|\nabla_b f\|_{L^2(U)}.$$

记 $S_1^2(\text{loc})$ 为局部属于 S_1^2 的 $L^2(M)$ 函数全体.

3 一类次椭圆不等式的 Liouville 定理

本节将在 Schrödinger 型算子特征值条件下给出一类次椭圆微分不等式解的 Liouville 定理. 我们称拟 Hermite 流形 (M, HM, J, θ) 是完备的, 如果它作为 Riemann 流形是完备的. 记从固定点 $o \in M$ 出发的 Riemann 距离函数为 $r(x)$, 相应的测地球为 $B_R(o) = \{x \in M \mid r(x) < R\}$.

定理 3.1 设 (M, HM, J, θ) 是完备非紧拟 Hermite 流形, 且 $0 \leq \psi \in \text{Lip}_{\text{loc}}(M)$ 是如下次椭圆微分不等式的弱解:

$$\mathcal{E} = \psi \Delta_b \psi + a(x) \psi^2 + B |\nabla_b \psi|^2 \geq 0, \quad (3.1)$$

其中 $a \in L_{\text{loc}}^\infty$, $B \in \mathbb{R}$. 设 $H > 0$, 且 p_0 和 p_1 ($p_0 \leq p_1$) 是方程

$$q^2 - 2Hq + H(B+1) = 0 \quad (3.2)$$

的两个解. Schrödinger 型算子

$$\mathcal{L}_H = -\Delta_b - Ha(x)$$

满足 $\lambda_1(\mathcal{L}_H) \geq 0$. 如果 ψ 满足增长性条件

$$\int_{B_R(o)} \psi^{2p} = o(R^2), \quad \text{当 } R \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

其中 $o \in M$ 且 $p \in [p_0, p_1] \cap [1, +\infty)$, 那么有如下结果:

- (1) 若 $H \neq B+1$ 且 $p_0 < p < p_1$, 则 ψ 是常值. 进一步, 要么 $a \equiv 0$, 要么 $\psi \equiv 0$.
- (2) 若 $H = B+1$ 且 ψ 处处不消失, 则不等式 (3.1) 取等号.

证明 取截断函数 $0 \leq \phi \in C_0^\infty(M)$. 令 $\psi_\delta = \psi + \delta$, $\delta \in (0, 1)$, 且 $\eta_\delta = \phi^2 \psi_\delta^{2p-2}$. 一方面, 将 η_δ 代入 (3.1), 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{E}(\eta_\delta) \\ &= \int_M \phi^2 \psi_\delta^{2p-2} (\psi \Delta_b \psi + a(x) \psi^2 + B |\nabla_b \psi|^2) \\ &= - \int_M 2\phi \psi_\delta^{2p-2} \psi \langle \nabla_b \phi, \nabla_b \psi \rangle - \int_M (2p-2) \phi^2 \psi_\delta^{2p-3} \psi |\nabla_b \psi|^2 \\ &\quad + \int_M (B-1) \phi^2 \psi_\delta^{2p-2} |\nabla_b \psi|^2 + \int_M a \phi^2 \psi_\delta^{2p-2} \psi^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

另一方面, 令 $\zeta_\delta = \phi \psi_\delta^p \in \text{Lip}(M)$, 则由 $\lambda_1(\mathcal{L}_H) \geq 0$ 可知,

$$I(\zeta_\delta) = \int_M |\nabla_b(\phi \psi_\delta^p)|^2 - \int_M Ha \phi^2 \psi_\delta^{2p} \geq 0. \quad (3.5)$$

将上式展开, 可得

$$\begin{aligned} \int_M a\phi^2\psi_\delta^{2p} &= \frac{p^2}{H} \int_M \phi^2\psi_\delta^{2p-2} |\nabla_b\psi|^2 + \frac{2p}{H} \int_M \phi\psi_\delta^{2p-1} \langle \nabla_b\psi, \nabla_b\phi \rangle \\ &\quad + \frac{1}{H} \int_M \psi_\delta^{2p} |\nabla_b\phi|^2 - \frac{1}{H} I(\zeta_\delta), \end{aligned} \quad (3.6)$$

代入 (3.4), 我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\eta_\delta) + \frac{1}{H} I(\zeta_\delta) + \left(2p - \frac{p^2}{H} - (B+1)\right) \int_M \phi^2\psi_\delta^{2p-2} |\nabla_b\psi|^2 \\ = 2\left(\frac{p}{H} - 1\right) \int_M \phi\psi_\delta^{2p-1} \langle \nabla_b\psi, \nabla_b\phi \rangle + \frac{1}{H} \int_M \psi_\delta^{2p} |\nabla_b\phi|^2 \\ + 2\delta \int_M \phi\psi_\delta^{2p-2} \langle \nabla_b\psi, \nabla_b\phi \rangle + \delta^2 \int_M a\phi^2\psi_\delta^{2p-2} - 2\delta \int_M a\phi^2\psi_\delta^{2p-1} \\ + \delta(2p-2) \int_M \phi^2\psi_\delta^{2p-3} |\nabla_b\psi|^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

由于 $p \geq 1$, 所以, ψ_δ^{2p-2} 、 ψ_δ^{2p-1} 和 ψ_δ^{2p} 关于 δ 一致有界. 故除了前两项和最后一项, 其他各项的极限可由控制收敛定理得到. 由条件假设可知, $I(\eta_\delta) \geq 0$; 而文献 [19, 定理 2.1.7] 说明了 $\mathcal{E}$ 是正测度, 这就意味着它是 0 阶的分布. 所以, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时,

$$\mathcal{E}(\eta_\delta) \rightarrow \mathcal{E}(\eta),$$

其中 $\eta = \phi^2\psi^{2p-2}$. 对于 (3.7) 中的最后一项 (记为 E_δ), 我们分情形讨论:

- (i) 当 $p = 1$ 时, $E_\delta \equiv 0$;
- (ii) 当 $1 < p < \frac{3}{2}$ 时,

$$E_\delta = (2p-2) \int_M \frac{\delta}{(\psi+\delta)^{3-2p}} \phi^2 |\nabla_b\psi|^2 \leq (2p-2)\delta^{2p-2} \int_M \phi^2 |\nabla_b\psi|^2 \rightarrow 0;$$

- (iii) 当 $p \geq \frac{3}{2}$ 时, ψ_δ^{2p-3} 内闭一致有界, 利用控制收敛定理可知, $E_\delta \rightarrow 0$.

现对 (3.7) 两端关于 $\delta \rightarrow 0$ 取极限, 我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\eta) + \left(2p - \frac{p^2}{H} - (B+1)\right) \int_M \phi^2\psi^{2p-2} |\nabla_b\psi|^2 \\ \leq 2\left(\frac{p}{H} - 1\right) \int_M \phi\psi^{2p-1} \langle \nabla_b\psi, \nabla_b\phi \rangle + \frac{1}{H} \int_M \psi^{2p} |\nabla_b\phi|^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

对上式第二行的第一项利用 Cauchy 不等式, 从而, 对任意 $\epsilon > 0$, 有

$$\mathcal{E}(\eta) + F_\epsilon \int_M \phi^2\psi^{2p-2} |\nabla_b\psi|^2 \leq G_\epsilon \int_M \psi^{2p} |\nabla_b\phi|^2 \leq G_\epsilon \int_M \psi^{2p} |\nabla\phi|^2, \quad (3.9)$$

其中

$$F_\epsilon = 2p - \frac{p^2}{H} - (B+1) - \epsilon, \quad G_\epsilon = \frac{1}{H} + \epsilon^{-1} \left| \frac{p}{H} - 1 \right|^2.$$

情形 (1), 若 $H \neq B+1$ 且 $p_0 < p < p_1$, 则可选择适当的 ϵ 使得 $F_\epsilon > 0$. 再选取截断函数 $\phi = \phi_R \in C_0^\infty(B_{2R}(o))$ 使得在 $B_R(o)$ 上有 $\phi \equiv 1$, 且在 $B_{2R}(o) \setminus B_R(o)$ 上有 $|\nabla\phi_R| \leq 2R^{-1}$. 利用 ψ 的

增长性条件以及估计 (3.9) 可知, 在 $\Omega_p = \{\psi^{p-1} > 0\}$ 上有 $\nabla_b \psi = 0$. 此时 ψ 必定为常值. 若 $\psi \neq 0$, 则由不等式 (3.1) 可知, $a(x) \geq 0$ 在 M 上几乎处处成立. 因为 $I(\zeta_\delta) \geq 0$, 所以, 对 (3.6) 关于 $\delta \rightarrow 0$ 取极限, 有

$$\int_M a \phi^2 \psi^{2p} \leq \frac{1}{H} \int_M \psi^{2p} |\nabla_b \phi|^2.$$

再次选取 $\phi = \phi_R$ 并令 $R \rightarrow +\infty$, 可得 $a \equiv 0$.

情形 (2), 若 $H = B + 1$, 则 $p = H$. (3.8) 可简化为

$$\mathcal{E}(\phi^2 \psi^{2p-2}) \leq \frac{1}{H} \int_M \psi^{2p} |\nabla_b \phi|^2. \quad (3.10)$$

固定 $R > 0$, 由于 $\phi_{2^k R} \leq \phi_{2^{k+1} R}$, 所以, 根据 Levy 单调收敛定理知, $\mathcal{E}(\phi_{2^k R}^2 \psi^{2p-2}) \rightarrow \mathcal{E}(\psi^{2p-2})$. 因此,

$$\int_M \psi^{2p-2} d\mathcal{E} = 0.$$

进而 $\mathcal{E} = 0$ 处处成立. □

接下来将说明定理 3.1 在 $p \in (0, 1)$ 的情形也成立. 为了沿用上述证明的方法, 我们需要注意因子 ψ^p 的正则性.

引理 3.2 设 (M, HM, J, θ) 是拟 Hermite 流形, 且 $0 \leq \psi \in \text{Lip}_{\text{loc}}(M)$ 是如下次椭圆微分不等式的弱解:

$$\mathcal{E} = \psi \Delta_b \psi + a(x) \psi^2 + B |\nabla_b \psi|^2 \geq 0, \quad (3.11)$$

其中 $a \in L_{\text{loc}}^\infty$ 且 $B \in \mathbb{R}$. 若

$$p > \max \left\{ 0, \frac{B+1}{2} \right\},$$

则

$$\psi^p \in S_1^2(\text{loc}), \quad (3.12)$$

而且

$$\nabla_b [(\psi + \delta)^{p-1} \psi] \xrightarrow{\text{弱}-L^2} \nabla_b \psi^p, \quad \text{当 } \delta \rightarrow 0. \quad (3.13)$$

从而有

$$\nabla_b \psi^p = p \psi^{p-1} \nabla_b \psi \quad (3.14)$$

在 M 上几乎处处成立.

证明 我们只考虑 $B < 1$ 且 $p \in (0, 1)$ 的情形. 对于其他情形, 结论是显然的. 由于 $\psi \geq 0$, 所以,

$$|\nabla_b (\psi_\delta^{p-1} \psi)| = \left| \frac{p\psi + \delta}{\psi + \delta} \psi_\delta^{p-1} \nabla_b \psi \right| \leq p \psi_\delta^{p-1} |\nabla_b \psi| \leq p \psi^{p-1} |\nabla_b \psi|. \quad (3.15)$$

因为 S_1^2 是 Hilbert 空间, 所以我们只需证明 $\psi^{p-1}|\nabla_b\psi|$ 是局部 L^2 有界的. 取 $\eta_\delta = \phi^2\psi_\delta^{2p-2}$, 其中 $0 \leq \phi \in C_0^\infty(M)$. 由 (3.4) 和 $\mathcal{E} \geq 0$ 可知,

$$\begin{aligned} & (1-B) \int_M \phi^2 \psi_\delta^{2p-2} |\nabla_b \psi|^2 + \int_M (2p-2) \phi^2 \psi_\delta^{2p-3} \psi |\nabla_b \psi|^2 \\ & \leq -2 \int_M \phi \psi_\delta^{2p-2} \psi \langle \nabla_b \phi, \nabla_b \psi \rangle + \int_M a \phi^2 \psi_\delta^{2p-2} \psi^2 \\ & \leq \epsilon \int_M \phi^2 \psi_\delta^{2p-2} |\nabla_b \psi|^2 + \epsilon^{-1} \int_M \psi_\delta^{2p-2} \psi^2 |\nabla_b \phi|^2 + \int_M a_+ \phi^2 \psi_\delta^{2p-2} \psi^2, \end{aligned} \quad (3.16)$$

其中 a_+ 是 a 的正部. 由于 $p \in (0, 1)$, 所以, ψ_δ^{2p-2} 和 ψ_δ^{2p-3} 在 $\delta \rightarrow 0$ 时分别单调递增几乎处处收敛到 ψ^{2p-2} 和 ψ^{2p-3} . 从而可利用 Levy 单调收敛定理, 在 (3.16) 中取 $\delta \rightarrow 0$, 有

$$(2p-1-B-\epsilon) \int_M \phi^2 \psi^{2p-2} |\nabla_b \psi|^2 \leq \int_M (a_+ \phi^2 + \epsilon^{-1} |\nabla_b \phi|^2) \psi^{2p} < +\infty.$$

又因为 $p > \frac{1+B}{2}$, 所以可选取充分小的 ϵ 使得 $2p-1-B-\epsilon > 0$. 故 $\psi^{p-1}|\nabla_b\psi|$ 是局部 L^2 可积. 引理证毕. $\square$

定理 3.3 设 (M, HM, J, θ) 是完备非紧拟 Hermite 流形, 且 $0 \leq \psi \in \text{Lip}_{\text{loc}}(M)$ 是如下次椭圆微分不等式的弱解:

$$\mathcal{E} = \psi \Delta_b \psi + a(x) \psi^2 + B |\nabla_b \psi|^2 \geq 0, \quad (3.17)$$

其中 $a \in L_{\text{loc}}^\infty$ 且 $B \in \mathbb{R}$. 设 $H > 0$, 且 $p_0 \leq p_1$ 是方程

$$q^2 - 2Hq + H(B+1) = 0 \quad (3.18)$$

的解. Schrödinger 型算子

$$\mathcal{L}_H = -\Delta_b - Ha(x)$$

满足 $\lambda_1(\mathcal{L}_H) \geq 0$. 如果函数 ψ 满足如下的增长性条件:

$$\int_{B_R(o)} \psi^{2p} = o(R^2), \quad \text{当 } R \rightarrow \infty, \quad (3.19)$$

其中 $o \in M$ 且 $p \in [p_0, p_1]$, 那么有如下结果:

- (1) 若 $H \neq B+1$ 且 $p_0 < p < p_1$, 则 ψ 是常值. 进一步, 要么 $a \equiv 0$, 要么 $\psi \equiv 0$.
- (2) 若 $H = B+1$ 且 ψ 处处不消失, 则不等式 (3.1) 取等号.

证明 定理 3.1 已经证明了 $p \geq 1$ 的情形. 假设 $p \in (0, 1)$. 我们采用与定理 3.1 一样的试验函数, 因为 $2p-2 < 0$ 以及 $\lambda_1(\mathcal{L}_H) \geq 0$, 所以, (3.7) 可改写为

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}(\eta_\delta) + \left(2p - \frac{p^2}{H} - (B+1)\right) \int_M \phi^2 \psi_\delta^{2p-2} |\nabla_b \psi|^2 \\ & \leq 2 \left(\frac{p}{H} - 1\right) \int_M \phi \psi_\delta^{2p-1} \langle \nabla_b \psi, \nabla_b \phi \rangle + \frac{1}{H} \int_M \psi_\delta^{2p} |\nabla_b \phi|^2 \\ & \quad + 2\delta \int_M \phi \psi_\delta^{2p-2} \langle \nabla_b \psi, \nabla_b \phi \rangle + \delta^2 \int_M a \phi^2 \psi_\delta^{2p-2} - 2\delta \int_M a \phi^2 \psi_\delta^{2p-1}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

情形 (1), 若 $H \neq B+1$ 且 $p_0 < p < p_1$, 利用 Cauchy 不等式和 $\mathcal{E} \geq 0$ 可知,

$$\begin{aligned}
 & \left(2p - \frac{p^2}{H} - (B+1)\right) \int_M \phi^2 \psi_\delta^{2p-2} |\nabla_b \psi|^2 \\
 & \leq 2 \left(\frac{p}{H} - 1\right) \int_M \phi \psi_\delta^{2p-1} \langle \nabla_b \psi, \nabla_b \phi \rangle + \frac{1}{H} \int_M \psi_\delta^{2p} |\nabla_b \phi|^2 \\
 & \quad + 2\delta \int_M \phi \psi_\delta^{2p-2} \langle \nabla_b \psi, \nabla_b \phi \rangle + \delta^2 \int_M a \phi^2 \psi_\delta^{2p-2} - 2\delta \int_M a \phi^2 \psi_\delta^{2p-1} \\
 & \leq \left(\frac{1}{H} + \epsilon_1^{-1} \left|\frac{p}{H} - 1\right|^2\right) \int_M \psi_\delta^{2p} |\nabla_b \phi|^2 + (\epsilon_1 + \epsilon_2) \int_M \phi^2 \psi_\delta^{2p-2} |\nabla_b \psi|^2 \\
 & \quad + \epsilon_2^{-1} \delta^2 \int_M \psi_\delta^{2p-2} |\nabla_b \phi|^2 + \delta^2 \int_M a \phi^2 \psi_\delta^{2p-2} - 2\delta \int_M a \phi^2 \psi_\delta^{2p-1}, \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

其中 ϵ_1 和 ϵ_2 是充分小的常数. 由于 $\psi_\delta \geq \delta$, 所以, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned}
 & \left| \delta^2 \int_M a \phi^2 \psi_\delta^{2p-2} \right| \leq \delta^{2p} \int_M |a| \phi^2 \rightarrow 0, \\
 & \left| \delta \int_M a \phi^2 \psi_\delta^{2p-1} \right| \leq \delta^{2p} \int_M |a| \phi^2 \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned}
 & \left(2p - \frac{p^2}{H} - (B+1) - \epsilon_1 - \epsilon_2\right) \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_M \phi^2 \psi_\delta^{2p-2} |\nabla_b \psi|^2 \\
 & \leq \left(\frac{1}{H} + \epsilon_1^{-1} \left|\frac{p}{H} - 1\right|^2 + \epsilon_2^{-1}\right) \int_M \psi^{2p} |\nabla_b \phi|^2. \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

由于 ψ_δ^{2p-2} 关于 δ 单调递增, 所以, Levy 单调收敛定理说明了

$$\int_M \phi^2 \psi_\delta^{2p-2} |\nabla_b \psi|^2 \rightarrow \int_M \phi^2 \psi^{2p-2} |\nabla_b \psi|^2.$$

因此, ψ 是常数. 该情形剩余部分与定理 3.1 一致.

情形 (2), 若 $H = B+1$, 则 $p = H = B+1$. 此时, (3.20) 可简化为

$$\begin{aligned}
 & 0 \leq \mathcal{E}(\eta_\delta) \\
 & \leq 2\delta \int_M \phi \psi_\delta^{2B} \langle \nabla_b \psi, \nabla_b \phi \rangle + \frac{1}{H} \int_M \psi_\delta^{2p} |\nabla_b \phi|^2 \\
 & \quad + \delta^2 \int_M a \phi^2 \psi_\delta^{2p-2} - 2\delta \int_M a \phi^2 \psi_\delta^{2p-1}. \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

参照定理 3.1(2) 的证明, 我们只需说明

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} 2\delta \int_M \phi \psi_\delta^{2B} \langle \nabla_b \psi, \nabla_b \phi \rangle = 0. \tag{3.24}$$

因为 $p \in (0, 1)$, 所以, $B \in (-1, 0)$. 进而, $\psi_\delta^B \leq \delta^B$. 由 Cauchy 不等式可知,

$$\begin{aligned}
 & 2\delta \int_M \phi \psi_\delta^{2B} \langle \nabla_b \psi, \nabla_b \phi \rangle \leq 2\delta^{1+B} \int_M \phi \psi_\delta^B |\nabla_b \phi| |\nabla_b \psi| \\
 & \leq \delta^{1+B} \int_M |\nabla_b \phi|^2 + \delta^{1+B} \int_M \phi^2 \psi_\delta^{2B} |\nabla_b \psi|^2,
 \end{aligned}$$

而引理 3.2 说明了

$$\nabla_b \psi^{B+1} = (B+1)\psi^B \nabla_b \psi \in L^2(\text{loc}).$$

结合 Levy 单调收敛定理, 我们有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_M \phi^2 \psi_\delta^{2B} |\nabla_b \psi|^2 = \int_M \phi^2 \psi^{2B} |\nabla_b \psi|^2 = \frac{1}{(B+1)^2} \int_M \phi^2 |\nabla_b \psi^{B+1}|^2 < +\infty.$$

(3.24) 得证. 该定理证毕. $\square$

4 几何应用

设 (M, HM, J, θ) 是具有常拟 Hermite 数量曲率的 Sasaki 流形. 记 E 为无迹的拟 Hermite Ricci 张量, C 为 Chern-Moser 张量.

引理 4.1 ^[10] 无迹的拟 Hermite Ricci 张量 E 在分布意义下满足如下的次椭圆微分不等式:

$$|E| \Delta_b |E| + \left(b(x) - \frac{2\rho}{n+1} \right) |E|^2 - \frac{1}{n} |\nabla_b |E||^2 \geq 0, \quad (4.1)$$

其中

$$b(x) = \sqrt{\frac{2n^2 + 4n + 3}{(n+1)(n+2)}} \left(|E| + \frac{1}{\sqrt{2}} |C| \right).$$

进一步, 若 (M, HM, J, θ) 还是拟 Einstein 的, 则 Chern-Moser 张量 C 在分布意义下满足如下的次椭圆微分不等式:

$$|C| \Delta_b |C| + \left(d(x) - \frac{2\rho}{n} \right) |C|^2 - \frac{2}{n+1} |\nabla_b |C||^2 \geq 0, \quad (4.2)$$

其中

$$d(x) = \frac{3(n^2 - 2)}{\sqrt{n^2(n^2 - 1)}} |C|.$$

分别对 (4.1) 和 (4.2) 应用定理 3.3, 我们有下列的定理:

定理 4.2 设 $n \geq 2$, $(M^{2n+1}, HM, J, \theta)$ 是具有非正的常拟 Hermite 数量曲率的完备非紧 Sasaki 流形, 且维数 $2n+1 \geq 5$. 对于某个 $H > 0$, Schrödinger 型算子

$$\mathcal{L}_E = -\Delta_b - H \left(\sqrt{\frac{2n^2 + 4n + 3}{(n+1)(n+2)}} \left(|E| + \frac{1}{\sqrt{2}} |C| \right) - \frac{2\rho}{n+1} \right)$$

满足 $\lambda_1(\mathcal{L}_E) \geq 0$. 若无迹的拟 Hermite Ricci 张量满足如下的增长性条件:

$$\int_{B_R(o)} |E|^{2p} = o(R^2), \quad \text{当 } R \rightarrow 0,$$

其中 $o \in M$, 且 $p > 0$ 满足

$$p^2 - 2Hp + \frac{n-1}{n} H < 0,$$

则 (M, HM, J, θ) 是拟 Einstein 的.

定理 4.3 设 $n \geq 2$, $(M^{2n+1}, HM, J, \theta)$ 是具有非正的常拟 Hermite 数量曲率的完备非紧拟 Einstein Sasaki 流形. 对于某个 $H > 0$, Schrödinger 型算子

$$\mathcal{L}_C = -\Delta_b - H \left(\frac{3(n^2 - 2)}{\sqrt{n^2(n^2 - 1)}} |C| - \frac{2\rho}{n} \right)$$

满足 $\lambda_1(\mathcal{L}_C) \geq 0$. 若 Chern-Moser 张量满足如下的增长性条件:

$$\int_{B_R(o)} |C|^{2p} = o(R^2), \quad \text{当 } R \rightarrow 0,$$

其中 $o \in M$, 且 $p > 0$ 满足

$$p^2 - 2Hp + \frac{n-1}{n+1}H < 0,$$

则 (M, HM, J, θ) 具有常拟 Hermite 截曲率.

结合以上两个定理, 我们下面的定理:

定理 4.4 设 $n \geq 2$, $(M^{2n+1}, HM, J, \theta)$ 是具有非正的常拟 Hermite 数量曲率的完备非紧 Sasaki 流形. 对于某个 $H > 0$, Schrödinger 型算子

$$\mathcal{L}_C = -\Delta_b - H \left(\frac{3(n^2 - 2)}{\sqrt{n^2(n^2 - 1)}} (\sqrt{2}|E| + |C|) - \frac{2\rho}{n} \right)$$

满足 $\lambda_1(\mathcal{L}_C) \geq 0$. 若无迹的拟 Hermite Ricci 张量和 Chern-Moser 张量满足如下的增长性条件:

$$\int_{B_R(o)} |E|^{2p} + |C|^{2p} = o(R^2), \quad \text{当 } R \rightarrow 0,$$

其中 $o \in M$, 且 $p > 0$ 满足

$$p^2 - 2Hp + \frac{n-1}{n}H < 0,$$

则 (M, HM, J, θ) 具有常拟 Hermite 截曲率.

特别地, 在 $p = 1$ 和 $p = \frac{n+1}{2}$ 时, 我们分别有如下推论:

推论 4.5 设 $n \geq 2$, $(M^{2n+1}, HM, J, \theta)$ 是完备单连通的非紧 Sasaki 流形, 且其拟 Hermite 数量曲率消失. 对于某个

$$H > \frac{3(n^2 - 2)}{(n-1)^{\frac{1}{2}}(n+1)^{\frac{3}{2}}},$$

Schrödinger 型算子

$$\mathcal{L}_E = -\Delta_b - H(\sqrt{2}|E| + |C|)$$

满足 $\lambda_1(\mathcal{L}_E) \geq 0$. 若无迹的拟 Hermite Ricci 张量和 Chern-Moser 张量满足如下的增长性条件:

$$\int_{B_R(o)} |E|^2 + |C|^2 = o(R^2), \quad \text{当 } R \rightarrow 0,$$

其中 $o \in M$, 则 (M, HM, J, θ) D- 相似于 $\mathbb{H}^n$.

推论 4.6 设 $n \geq 2$, $(M^{2n+1}, HM, J, \theta)$ 是完备单连通的非紧 Sasaki 流形, 且其拟 Hermite 数量曲率消失. 对于某个

$$H > \frac{3(n^2 - 2)(n+1)^{\frac{3}{2}}}{4(n^2 + 1)(n-1)^{\frac{1}{2}}},$$

Schrödinger 型算子

$$\mathcal{L}_E = -\Delta_b - H(\sqrt{2}|E| + |C|)$$

满足 $\lambda_1(\mathcal{L}_E) \geq 0$. 若无迹的拟 Hermite Ricci 张量和 Chern-Moser 张量满足如下的增长性条件:

$$\int_{B_R(o)} |E|^{n+1} + |C|^{n+1} = o(R^2), \quad \text{当 } R \rightarrow 0,$$

其中 $o \in M$, 则 (M, HM, J, θ) D- 相似于 $\mathbb{H}^n$.

对于拟 Hermite 数量曲率为正的情形, 我们下面的定理:

定理 4.7 设 $n \geq 2$, $(M^{2n+1}, HM, J, \theta)$ 是完备非紧 Sasaki 流形, 且拟 Hermite 数量曲率 ρ 为正常数. 若对于某个 $H > 0$, 无迹的拟 Hermite Ricci 张量满足如下的增长性条件:

$$\int_{B_R(o)} |E|^{2p} = o(R^2), \quad \text{当 } R \rightarrow 0,$$

其中 $o \in M$, 且 $p > 0$ 满足

$$p^2 - 2Hp + \frac{n-1}{n}H < 0,$$

则算子

$$\mathcal{L}_E = -\Delta_b - H \left(\sqrt{\frac{2n^2 + 4n + 3}{(n+1)(n+2)}} \left(|E| + \frac{1}{\sqrt{2}}|C| \right) - \frac{2\rho}{n+1} \right)$$

满足 $\lambda_1(\mathcal{L}_E) < 0$.

证明 利用反证法. 假设 $\lambda_1(\mathcal{L}_E) \geq 0$. 那么利用定理 3.3, 我们知道 (M, HM, J, θ) 是拟 Einstein 的, 即拟 Hermite Ricci 曲率有严格正下界. 但是 Myers 定理在 Sasaki 几何中也成立 (参见文献 [20] 或者 [9, 定理 7.5.32]). 从而 M 是紧的, 导致矛盾. 定理证毕. $\square$

参考文献

- 1 Goldberg S I. An application of Yau's maximum principle to conformally flat spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1980, 79: 268–270
- 2 Hebey E, Vaugon M. Effective L^p pinching for the concircular curvature. *J Geom Anal*, 1996, 6: 531–553
- 3 Itoh M, Satoh H. Isolation of the Weyl conformal tensor for Einstein manifolds. *Proc Japan Acad Ser A Math Sci*, 2002, 78: 140–142
- 4 Kim S. Rigidity of noncompact complete manifolds with harmonic curvature. *Manuscripta Math*, 2011, 135: 107–116
- 5 Pigola S, Rigoli M, Setti A G. Vanishing and Finiteness Results in Geometric Analysis: A Generalization of the Bochner Technique. *Progress in Mathematics*, vol. 266. Basel: Birkhäuser, 2008
- 6 Shen Z M. Some rigidity phenomena for Einstein metrics. *Proc Amer Math Soc*, 1990, 108: 981–987
- 7 Singer M A. Positive Einstein metrics with small $L^{n/2}$ -norm of the Weyl tensor. *Differential Geom Appl*, 1992, 2: 269–274
- 8 Xu H W, Zhao E T. L^p Ricci curvature pinching theorems for conformally flat Riemannian manifolds. *Pacific J Math*, 2010, 245: 381–396
- 9 Boyer C P, Galicki K. *Sasakian Geometry*. Oxford: Oxford University Press, 2008
- 10 Ren Y X, Lin H Z, Dong Y B. Rigidity theorems for complete Sasakian manifolds with constant pseudo-Hermitian scalar curvature. *J Geom Anal*, 2017, 27: 2788–2816
- 11 Dragomir S, Tomassini G. *Differential Geometry and Analysis on CR Manifolds*. *Progress in Mathematics*, vol. 246. Basel: Birkhäuser, 2006

- 12 Webster S M. Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface. *J Differential Geom*, 1978, 13: 25–41
- 13 Tanaka N. *A Differential Geometric Study on Strongly Pseudo-Convex Manifolds*. Tokyo: Kinokuniya, 1975
- 14 Lee J M. Pseudo-Einstein structures on CR manifolds. *Amer J Math*, 1988, 110: 157–178
- 15 Blair D E. *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, 2nd ed. *Progress in Mathematics*, vol. 203. Boston: Birkhäuser, 2010
- 16 Tanno S. Sasakian manifolds with constant ϕ -holomorphic sectional curvature. *Tohoku Math J (2)*, 1969, 21: 501–507
- 17 Chern S S, Moser J K. Real hypersurfaces in complex manifolds. *Acta Math*, 1974, 133: 219–271
- 18 Folland G B, Stein E M. Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group. *Comm Pure Appl Math*, 1974, 27: 429–522
- 19 Hörmander L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Distribution Theory and Fourier Analysis*. Heidelberg: Springer-Verlag, 2003
- 20 Hasegawa I, Seino M. Some remarks on Sasakian geometry—applications of Myers’ theorem and the canonical affine connection. *J Hokkaido Univ Educ Sect II A*, 1981, 32: 1–7

Rigidities of Sasakian manifolds with constant pseudo-Hermitian scalar curvature

Yuxin Dong, Qingchun Ji & Yibin Ren

Abstract In this paper, we establish some rigidity theorems of Sasakian pseudo-Einstein manifolds and Sasakian space forms under some conditions of growth of pseudo-Hermitian curvature and the first eigenvalue of Schrödinger type operator.

Keywords rigidity, pseudo-Einstein structure, Sasakian space form, Schrödinger type operator, the first eigenvalue

MSC(2010) 32V05, 32V20, 53C24

doi: 10.1360/N012017-00190