编排 p - 框架和编排 q -Riesz 基

林丽琼¹, 张云南^{2*}, 周燕¹

1. 福州大学数学与计算机科学学院, 福州 350108;

2. 福建师范大学数学与信息学院, 福州 350108

E-mail: llq141141@163.com, zyn126126@163.com, yzh156@126.com

收稿日期: 2016-06-09; 接受日期: 2017-09-14; 网络出版日期: 2018-03-08; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11401101, 11201071 和 11171066)、福建省教育厅基金 (批准号: JA15059) 和福州大学基金 (批准号: 2013-XQ-33) 资助项目

摘要 作为 Hilbert 空间上编排框架和编排 Riesz 基的推广, 本文研究 Banach 空间上编排 p - 框架和编排 q -Riesz 基. 两个 p - 框架 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 称为是可编排的, 如果存在常数 $0 < A \leq B < +\infty$, 使得对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , 序列 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是一个 p - 框架且有 p - 框架界 A 和 B . 每个序列 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 称为一个编排. 可编排的 q -Riesz 基具有类似的定义. 本文证明 Banach 空间上的两个 p - 框架是可编排的当且仅当它们的每个编排是个 p - 框架, 考虑对偶空间中两个 q -Riesz 基的可编排性, 即借助 q -Riesz 序列和 p - 框架的性质给出两个 q -Riesz 基的每个编排均是 q -Riesz 基的条件, 借助子空间距离的概念给出两个 q -Riesz 基可编排的几何特征. 此外, 本文还考虑编排 p - 框架和编排 q -Riesz 基的摄动, 如小摄动和算子摄动.

关键词 p - 框架 q -Riesz 基 子空间距离 摄动

MSC (2010) 主题分类 42C15, 46B20

1 引言

Hilbert 空间上的框架最初是由 Duffin 和 Schaeffer^[1] 于 1952 年在研究非调和 Fourier 级数时引入的, 但当时并没有引起人们的足够重视. 直到 1986 年, Daubechies 等^[2] 的基础性工作才使框架得到了数学研究者的关注并取得了极大的进展.

定义 1.1^[2] 设 H 是 Hilbert 空间, 序列 $\{x_n\} \subseteq H$ 称为 H 上的框架, 如果存在常数 $0 < A \leq B < +\infty$, 使得对任意 $y \in H$, 有

$$A\|y\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, y \rangle|^2 \leq B\|y\|^2.$$

英文引用格式: Lin L Q, Zhang Y N, Zhou Y. Weaving p -frames and weaving q -Riesz bases (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 519–530, doi: 10.1360/N012016-00108

如今, Hilbert 空间上的框架理论已经成为数学和工程中的重要工具, 并在近 20 年来得到了飞速的发展 (参见文献 [3, 4]). 其思想和问题来源已经不仅仅来自于最初的信号处理, 而且来自于数学中的很多领域, 包括 Banach 空间理论和算子理论 (参见文献 [5–10]).

1991 年, Gröchenig^[11] 把 Hilbert 空间上的框架推广到 Banach 空间上, 引入了原子分解和 Banach 框架的概念. 此后, Banach 空间上的框架作为框架理论的重要分支得到了深入研究, 取得了重要的研究成果 (参见文献 [12, 13]). 其中, Aldroubi 等^[14] 于 2001 年在 Banach 空间上引入了 p - 框架的概念, 这是 Banach 空间上最接近于 Hilbert 空间上框架的一个概念. 作为 Hilbert 空间上 Riesz 基在 Banach 空间上的推广, Christensen 和 Stoeva^[15] 引入了 q -Riesz 基的概念. 关于 p - 框架和 q -Riesz 基的研究也取得了显著的成果 (参见文献 [14–17]).

Bemrose 等^[18] 受到 Gabor 框架预处理的启发, 研究了 Hilbert 空间框架理论中的一个有趣的问题, 他们称之为编排框架. Hilbert 空间上的两个框架 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为可编排的, 如果存在常数 $0 < A \leq B < +\infty$, 使得对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , 序列 $\{f_n\}_{n \in \sigma} \cup \{g_n\}_{n \in \sigma^c}$ 是一个框架且有框架界 A 和 B . 每个序列 $\{f_n\}_{n \in \sigma} \cup \{g_n\}_{n \in \sigma^c}$ 称为一个编排. 他们也讨论了编排 Riesz 基. 编排框架在那些需要根据不同框架分布式处理和使用 Gabor 框架信号预处理的无线传感网络方面具有应用前景.

本文研究 Banach 空间上的编排 p - 框架和编排 q -Riesz 基, 将文献 [18] 的一些结果推广到 Banach 空间上去. 第 2 节将证明 Banach 空间上的两个 p - 框架是可编排的当且仅当它们的每个编排是 p - 框架, 还考虑对偶空间中两个 q -Riesz 基的可编排性, 即借助 q -Riesz 序列和 p - 框架的性质给出两个 q -Riesz 基的每个编排均是 q -Riesz 基的条件, 借助子空间距离的概念给出两个 q -Riesz 基可编排的几何特征. 第 3 节考虑编排 p - 框架和编排 q -Riesz 基的摄动, 如小摄动和算子摄动.

在全文中, I (或者 J) 表示有限或可数无限指标集. 设 X 是 Banach 空间, 以 X^* 表示 X 的共轭空间. 设 A 是 X 的子集, 以 $\text{span}A$ 表示由 A 中元素张成的线性子空间, 以 $\overline{\text{span}A}$ 表示 $\text{span}A$ 的闭包. 设 B 是 X^* 的子集, 以 ${}^\perp B = \{x \in X : x^*(x) = 0 \text{ 对任意 } x^* \in B\}$ 表示 B 的下零化子. 对 $\mathbb{N}$ 的子集 σ , 以 $|\sigma|$ 表示其基数, 记 $\sigma^c = \mathbb{N} \setminus \sigma$. 对任意 $m, k \in \mathbb{N}$, 令

$$\begin{aligned} [m] &= \{1, \dots, m\}, \quad [m]^c = \mathbb{N} \setminus [m] = \{m+1, m+2, \dots\}, \\ [m, k] &= [m+k] \setminus [m] = \{m+1, \dots, m+k\}. \end{aligned}$$

2 可编排的 p - 框架和可编排的 q -Riesz 基

本节证明 Banach 空间上的两个 p - 框架是可编排的当且仅当它们的每个编排是 p - 框架, 并考虑对偶空间中两个 q -Riesz 基的可编排性. 首先, 我们给出 Banach 空间上可编排的 p - 框架和可编排的 q -Riesz 基的概念.

定义 2.1^[15, 19] 设 X 是 Banach 空间, $1 < p < \infty$. X^* 中的向量族 $\{x_n^*\}_{n \in I}$ 称为是 X 的 p - 框架, 如果存在常数 $0 < A \leq B < +\infty$, 使得对任意 $x \in X$, 有

$$A\|x\|^p \leq \sum_{n \in I} |x_n^*(x)|^p \leq B\|x\|^p,$$

其中 A 和 B 分别称为下 p - 框架界和上 p - 框架界.

定义 2.2^[15, 19] 设 X 是 Banach 空间, $1 < q < \infty$. X 中的向量族 $\{x_n\}_{n \in I}$ 称为是 X 的 q -Riesz

序列, 如果存在常数 $0 < A \leq B < +\infty$, 使得对任意有限数列 $\{c_n\}$, 有

$$A \sum |c_n|^q \leq \left\| \sum c_n x_n \right\|^q \leq B \sum |c_n|^q,$$

其中 A 和 B 分别称为下 q -Riesz 界和上 q -Riesz 界. 如果 X 的 q -Riesz 序列 $\{x_n\}_{n \in I}$ 还满足 $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in I\} = X$, 则称其为 X 的 q -Riesz 基.

容易看出, 定义 2.2 中的条件蕴含: 对任意 $\{c_n\} \in l_q$, 级数 $\sum c_n x_n$ 是无条件收敛的且上述不等式成立.

定义 2.3 设 X 是 Banach 空间, $1 < p, q < \infty$.

两个 X 的 p -框架 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 称为是可编排的, 如果存在常数 $0 < A \leq B < +\infty$, 使得对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , 序列 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X 的 p -框架且有下 p -框架界 A 和上 p -框架界 B . 每个序列 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 称为一个编排.

两个 X 的 q -Riesz 基 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ 称为是可编排的, 如果存在常数 $0 < A \leq B < +\infty$, 使得对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , 序列 $\{x_n\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X 的 q -Riesz 基且有下 q -Riesz 界 A 和上 q -Riesz 界 B . 每个序列 $\{x_n\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n\}_{n \in \sigma^c}$ 称为一个编排.

如下定理给出两个 p -框架可编排的等价条件.

定理 2.4 设 X 是 Banach 空间, $1 < p < \infty$, $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是 X 的 p -框架, 则如下叙述等价:

- (1) $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是可编排的;
- (2) 每个编排 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X 的 p -框架.

证明 类似于文献 [18, 定理 4.5] 的证明. 这里还需要用到如下事实: 若 X 有 p 框架, 则 X 自反. 故 X 中的任意有界集 $\{x_j\}_{j \in I}$ 是弱紧的因而是弱序列紧的. 从而存在 $\{x_j\}_{j \in I}$ 的子列 $\{x_{n_j}\}$ 收敛于 X 中某点 x_0 . $\square$

下面考虑两个 q -Riesz 基的可编排性. 首先给出两个 q -Riesz 序列的并仍是 q -Riesz 序列的一个几何条件, 这需要用子空间距离的概念.

定义 2.5 设 X 是 Banach 空间, X_1 和 X_2 是 X 的闭子空间, 令

$$\begin{aligned} d_{X_1}(X_2) &= \inf\{\|x_1 - x_2\| : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \|x_2\| = 1\}, \\ d_{X_2}(X_1) &= \inf\{\|x_1 - x_2\| : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \|x_1\| = 1\}. \end{aligned}$$

X_1 和 X_2 的距离定义为

$$d(X_1, X_2) = \min\{d_{X_1}(X_2), d_{X_2}(X_1)\}.$$

引理 2.6 设 X 是 Banach 空间, $1 < q < \infty$, $\{x_i\}_{i \in I}$ 和 $\{y_j\}_{j \in J}$ 是 X 的 q -Riesz 序列, 则如下叙述等价:

- (1) $\{x_i\}_{i \in I} \cup \{y_j\}_{j \in J}$ 是 X 的 q -Riesz 序列;
- (2) $D = d(\overline{\text{span}}\{x_i\}_{i \in I}, \overline{\text{span}}\{y_j\}_{j \in J}) > 0$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 A 和 B 是 q -Riesz 序列 $\{x_i\}_{i \in I} \cup \{y_j\}_{j \in J}$ 的 q -Riesz 界, 则 A 和 B 也是 q -Riesz 序列 $\{x_i\}_{i \in I}$ 和 q -Riesz 序列 $\{y_j\}_{j \in J}$ 共同的 q -Riesz 界. 若

$$\varphi \in \overline{\text{span}}\{x_i\}_{i \in I}, \quad \psi \in \overline{\text{span}}\{y_j\}_{j \in J}, \quad \|\psi\| = 1,$$

则存在 $\varphi_n = \sum_{i \in I} a_{ni} x_i \in \text{span}\{x_i\}_{i \in I}$, $\psi_n = \sum_{j \in J} b_{nj} y_j \in \text{span}\{y_j\}_{j \in J}$, 使得 $\varphi = \lim_n \varphi_n$, $\psi = \lim_n \psi_n$. 所以,

$$\begin{aligned} \|\varphi - \psi\| &= \lim_n \|\varphi_n - \psi_n\| = \lim_n \left\| \sum_{i \in I} a_{ni} x_i - \sum_{j \in J} b_{nj} y_j \right\| \\ &\geq \lim_n \left(A \left(\sum_{i \in I} |a_{ni}|^q + \sum_{j \in J} |b_{nj}|^q \right) \right)^{\frac{1}{q}} \geq A^{\frac{1}{q}} \lim_n \left(\sum_{j \in J} |b_{nj}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq A^{\frac{1}{q}} \lim_n \left(\frac{1}{B} \left\| \sum_{j \in J} b_{nj} y_j \right\|^q \right)^{\frac{1}{q}} = A^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{B} \right)^{\frac{1}{q}} \lim_n \|\psi_n\| \\ &= \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{q}} \|\psi\| = \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

因而, $d_{\overline{\text{span}}\{x_i\}_{i \in I}}(\overline{\text{span}}\{y_j\}_{j \in J}) \geq \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{q}}$. 同理可得 $d_{\overline{\text{span}}\{y_j\}_{j \in J}}(\overline{\text{span}}\{x_i\}_{i \in I}) \geq \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{q}}$. 因此,

$$D = d(\overline{\text{span}}\{x_i\}_{i \in I}, \overline{\text{span}}\{y_j\}_{j \in J}) \geq \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{q}} > 0.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 A 和 B 是 q -Riesz 序列 $\{x_i\}_{i \in I}$ 和 q -Riesz 序列 $\{y_j\}_{j \in J}$ 共同的 q -Riesz 界. 若 $\{a_i\}_{i \in I}$ 和 $\{b_j\}_{j \in J}$ 是只有有限个非零元的数列, 满足

$$\sum_{i \in I} |a_i|^q + \sum_{j \in J} |b_j|^q = 1,$$

则

$$\left\| \sum_{i \in I} a_i x_i + \sum_{j \in J} b_j y_j \right\|^q \leq 2^q \left(\left\| \sum_{i \in I} a_i x_i \right\|^q + \left\| \sum_{j \in J} b_j y_j \right\|^q \right) \leq 2^q \left(B \sum_{i \in I} |a_i|^q + B \sum_{j \in J} |b_j|^q \right) = 2^q B,$$

即 $\{x_i\}_{i \in I} \cup \{y_j\}_{j \in J}$ 有上 q -Riesz 界 $2^q B$. 类似于文献 [18, 引理 5.5] 中 (ii) $\Rightarrow$ (i) 的证明, 可得 $\{x_i\}_{i \in I} \cup \{y_j\}_{j \in J}$ 有下 q -Riesz 界 $\frac{AD^q}{2}$. 因此, $\{x_i\}_{i \in I} \cup \{y_j\}_{j \in J}$ 是 X 的 q -Riesz 序列. $\square$

由引理 2.6 易得如下推论:

推论 2.7 设 X 是 Banach 空间, $1 < q < \infty$, $\{x_i\}_{i \in I}$ 是 X 的 q -Riesz 序列, $y \in X$, 则如下叙述等价:

- (1) $\{x_i\}_{i \in I} \cup \{y\}$ 是 X 的 q -Riesz 序列;
- (2) $y \notin \overline{\text{span}}\{x_i\}_{i \in I}$.

接下来借助 q -Riesz 序列的性质给出两个 q -Riesz 基的每个编排均是 q -Riesz 基的条件. 首先 q -Riesz 基和 p - 框架有如下关系:

引理 2.8 ^[15] 设 X 是 Banach 空间, $1 < p, q < \infty$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 若 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty \subseteq X^*$ 是 X^* 的 q -Riesz 基且有最优 q -Riesz 界 A 和 B , 则它也是 X 的 p - 框架且有最优 p - 框架界 A 和 B . 这里最优界指的是满足定义 2.1 和 2.2 中条件的 A 的最大值和 B 的最小值.

引理 2.9 设 X 是 Banach 空间, $1 < q < \infty$. 若 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是 X^* 的 q -Riesz 基, 且存在常数 $A > 0$, 使得对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , 序列 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X^* 的 q -Riesz 序列且有下 q -Riesz 界 A , 则对 $\mathbb{N}$ 的任意满足 $|\sigma| < \infty$ 的子集 σ , 序列 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X^* 的 q -Riesz 基, 即 $\overline{\text{span}}(\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}) = X^*$.

引理 2.9 的证明类似于文献 [18, 引理 5.1] 的证明, 这里省略.

定理 2.10 设 X 是 Banach 空间, $1 < q < \infty$. 若 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是 X^* 的 q -Riesz 基, 且存在常数 $A > 0$, 使得对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , 序列 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X^* 的 q -Riesz 序列且有下 q -Riesz 界 A , 则对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , 序列 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X^* 的 q -Riesz 基.

证明 假设结论不成立, 由引理 2.9, 存在 $\sigma \subseteq \mathbb{N}$ 满足 $|\sigma| = |\sigma^c| = \infty$, 使得 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 不是 X^* 的 q -Riesz 基. 由于 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X^* 的 q -Riesz 序列, 则有

$$Y = \overline{\text{span}}(\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}) \neq X^*,$$

故存在 $0 \neq x^{**} \in X^{**}$ 使得 $x^{**}|_Y = 0$. 由于 X^* 有 q -Riesz 基, 则 X 有 p -框架 ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), 故 X 自反, 因此, $x^{**} \in X^{**} = X$, 记 x^{**} 为 x , 则 $0 \neq x \in {}^\perp Y$. 由 p -框架的定义知, $\sum_{n=1}^\infty |y_n^*(x)|^p < +\infty$. 故存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\sum_{n=k+1}^\infty |y_n^*(x)|^p < \frac{A}{2} \|x\|^p$. 令 $\sigma_1 = \sigma \cap [k]$, 则 $\sigma_1 \subseteq \sigma$, $|\sigma_1| < \infty$ 且

$$\sum_{n \in \sigma \setminus \sigma_1} |y_n^*(x)|^p \leq \sum_{n=k+1}^\infty |y_n^*(x)|^p < \frac{A}{2} \|x\|^p.$$

由引理 2.9 可知, $\{x_n^*\}_{n \in \sigma_1} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma \setminus \sigma_1} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X^* 的 q -Riesz 基且有最优下 q -Riesz 界 $A' \geq A$, 则 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma_1} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma \setminus \sigma_1} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X 的 p -框架且有最优下 p -框架界 A' . 因此,

$$A \|x\|^p \leq A' \|x\|^p \leq \sum_{n \in \sigma_1} |x_n^*(x)|^p + \sum_{n \in \sigma \setminus \sigma_1} |y_n^*(x)|^p + \sum_{n \in \sigma^c} |y_n^*(x)|^p = \sum_{n \in \sigma \setminus \sigma_1} |y_n^*(x)|^p < \frac{A}{2} \|x\|^p,$$

这是不可能的. $\square$

下面借助 p -框架的性质给出两个 q -Riesz 基的每个编排均是 q -Riesz 基的条件.

定理 2.11 设 X 是 Banach 空间, $1 < p, q < \infty$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 若 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是 X^* 的 q -Riesz 基, 且存在常数 $A > 0$, 使得对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , 序列 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X 的 p -框架且有下 p -框架界 A , 则对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , 序列 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X^* 的 q -Riesz 基.

证明 首先考虑 $|\sigma| < \infty$ 的情形.

根据 σ 的基数进行归纳. $|\sigma| = 0$ 时结论显然成立. 假设当 $|\sigma| = k$ 时结论成立. 设 $\sigma \subseteq \mathbb{N}$ 满足 $|\sigma| = k + 1$. 任取 $n_0 \in \sigma$, 令 $\sigma_0 = \sigma \setminus \{n_0\}$. 由归纳假设, $\{x_n^*\}_{n \in \sigma_0} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma_0^c}$ 是 X^* 的 q -Riesz 基. 由文献 [15, 命题 2.7] 知, $y_{n_0}^* \notin \overline{\text{span}}(\{x_n^*\}_{n \in \sigma_0} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma_0^c})$. 由于 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X 的 p -框架, 则

$$\overline{\text{span}}(\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}) = X^*.$$

我们有 $x_{n_0}^* \notin \overline{\text{span}}(\{x_n^*\}_{n \in \sigma_0} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c})$, 否则 $\overline{\text{span}}(\{x_n^*\}_{n \in \sigma_0} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}) = X^*$ 与 $y_{n_0}^* \notin \overline{\text{span}}(\{x_n^*\}_{n \in \sigma_0} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c})$ 矛盾. 由于 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma_0} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X^* 的 q -Riesz 序列, 则 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c} = \{x_n^*\}_{n \in \sigma_0} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c} \cup \{x_{n_0}^*\}$ 是 X^* 的 q -Riesz 序列. 因此, $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X^* 的 q -Riesz 基且有下 q -Riesz 界 A .

下面考虑 $|\sigma| = \infty$ 的情形.

选取 $\sigma_1 \subseteq \sigma_2 \subseteq \cdots \subseteq \cdots \subseteq \sigma$ 使得 $|\sigma_j| < \infty$ 且 $\sigma = \bigcup_{j=1}^\infty \sigma_j$. 由上面的讨论可知, 对每个 $j = 1, 2, \dots$, $\{x_n^*\}_{n \in \sigma_j} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma_j^c}$ 是 X^* 的 q -Riesz 基且有下 q -Riesz 界 A .

由假设知, $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X 的 p -框架. 现在设 $\{a_n\} \in l_q$ 满足

$$\sum_{n \in \sigma} a_n x_n^* + \sum_{n \in \sigma^c} a_n y_n^* = 0.$$

由于 $\sigma_j^c \setminus \sigma^c = \sigma \setminus \sigma_j$, 则 $\sum_{n \in \sigma} a_n x_n^* = \lim_j \sum_{n \in \sigma_j} a_n x_n^*$ 且 $\sum_{n \in \sigma^c} a_n y_n^* = \lim_j \sum_{n \in \sigma_j^c} a_n y_n^*$. 故

$$0 = \left\| \sum_{n \in \sigma} a_n x_n^* + \sum_{n \in \sigma^c} a_n y_n^* \right\|^q = \lim_j \left\| \sum_{n \in \sigma_j} a_n x_n^* + \sum_{n \in \sigma_j^c} a_n y_n^* \right\|^q \geq \lim_j A \left(\sum_{n \in \sigma_j} |a_n|^q + \sum_{n \in \sigma_j^c} |a_n|^q \right) = A \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q.$$

因此 $a_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 成立. 由文献 [15, 命题 2.7] 得 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X^* 的 q -Riesz 基. $\square$

接下来借助子空间距离的概念给出两个 q -Riesz 基可编排的几何特征.

定理 2.12 设 X 是 Banach 空间, $1 < q < \infty$, $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的 q -Riesz 基, 则如下叙述等价:

- (1) $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是可编排的;
- (2) 对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , $D_\sigma = d(\overline{\text{span}}\{x_n^*\}_{n \in \sigma}, \overline{\text{span}}\{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}) > 0$;
- (3) 存在常数 $C > 0$, 使得对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , $D_\sigma = d(\overline{\text{span}}\{x_n^*\}_{n \in \sigma}, \overline{\text{span}}\{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}) \geq C$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (3) 令 $C = (\frac{A}{B})^{\frac{1}{q}}$. 对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , 由于序列 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma}$ 、 $\{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 和 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 均是 X^* 的 q -Riesz 序列, 而 A 和 B 分别是 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 的下 q -Riesz 界和上 q -Riesz 界, 根据引理 2.6 的证明过程可得 $D_\sigma = d(\overline{\text{span}}\{x_n^*\}_{n \in \sigma}, \overline{\text{span}}\{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}) \geq (\frac{A}{B})^{\frac{1}{q}} = C$.

(3) $\Rightarrow$ (1) 设 A' 和 B' 是 q -Riesz 基 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 和 q -Riesz 基 $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 共同的 q -Riesz 界. 令 $A = \frac{A'C^q}{2}$ 和 $B = 2^q B'$. 对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , 由于 A' 和 B' 也是 q -Riesz 序列 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma}$ 和 q -Riesz 序列 $\{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 共同的 q -Riesz 界, 根据引理 2.6 的证明过程可得 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X^* 的 q -Riesz 序列且有下 q -Riesz 界 $\frac{A'D^q}{2} \geq \frac{A'C^q}{2} = A$ 和上 q -Riesz 界 $2^q B' = B$. 由定理 2.10 可得 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X^* 的 q -Riesz 基, 故 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是可编排的.

(3) $\Rightarrow$ (2) 显然成立.

(2) $\Rightarrow$ (3) 假设 (3) 不成立, 则对每个 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $\mathbb{N}$ 的子集 σ_k , 使得 $D_{\sigma_k} < \frac{1}{k}$. 由 D_{σ_k} 的定义知, 存在 $\varphi_k^*, \psi_k^* \in X^*$ 形如

$$\varphi_k^* = \sum_{n \in \sigma_k} a_{kn} x_n^*, \quad \psi_k^* = \sum_{n \in \sigma_k^c} b_{kn} y_n^*,$$

且在 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 上有有限支撑 (即 $\{n : a_{kn} \neq 0\}$ 和 $\{n : b_{kn} \neq 0\}$ 是有限集), 使得 $\|\varphi_k^*\| = 1$ 或者 $\|\psi_k^*\| = 1$, 且 $\|\varphi_k^* - \psi_k^*\| < \frac{1}{k}$.

不失一般性, 设 $\|\varphi_k^*\| = 1$ 对所有 k 都成立 (否则取子列). 由于 X^* 有 q -Riesz 基, 则 X 有 p -框架 ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), 故 X 自反从而 X^* 也自反. 由于集合 $\{\varphi_k^*\}$ 和 $\{\psi_k^*\}$ 均有界, 则它们均弱紧. 因而弱序列紧从而 w^* 序列紧. 故 $\{\varphi_k^*\}$ 和 $\{\psi_k^*\}$ 分别存在子列是 w^* 收敛的, 不妨仍记该子列为 $\{\varphi_k^*\}$ 和 $\{\psi_k^*\}$, 设

$$\varphi_k^* \xrightarrow{w^*} \varphi_0^* \in X^*, \quad \psi_k^* \xrightarrow{w^*} \psi_0^* \in X^*.$$

由于 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的 q -Riesz 基, 由文献 [15, 定理 2.8] 知, 存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ 和 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ 使得 $x_n^*(x_m) = \delta_{nm}$, $y_n^*(y_m) = \delta_{nm}$ 且

$$\varphi_0^* = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_0^*(x_n) x_n^*, \quad \psi_0^* = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_0^*(y_n) y_n^*,$$

其中

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$, $1 \in \sigma_k$ 或者 $1 \in \sigma_k^c$, 不妨设对所有 k 有 $1 \in \sigma_k$, 或者对所有 k 有 $1 \in \sigma_k^c$ (否则取子列). 同理可设对所有 $k \geq 2$ 有 $2 \in \sigma_k$, 或者对所有 $k \geq 2$ 有 $2 \in \sigma_k^c$ (否则再取子列). 如此持续, 可得 $\{\sigma_k\}_{k=1}^\infty$ 的子列, 仍记为 $\{\sigma_k\}_{k=1}^\infty$, 使得 “对每个 $j \in \mathbb{N}$, 当 $n \leq j$ 时, $n \in \sigma_k$ 对所有 $k \geq j$ 成立, 或者 $n \in \sigma_k^c$ 对所有 $k \geq j$ 成立”.

令

$$\sigma_0 = \{n \in \mathbb{N} : n \in \sigma_k \text{ 对无穷多个 } k\} \subseteq \mathbb{N}.$$

由于 $\varphi_k^* \xrightarrow{w^*} \varphi_0^*$, 则对每个 n , 有 $\varphi_k^*(x_n) \rightarrow \varphi_0^*(x_n)$. 由于 $\varphi_k^* = \sum_{n \in \sigma_k} a_{kn} x_n^*$ 且 $x_n^*(x_m) = \delta_{nm}$, 则 $a_{kn} \rightarrow \varphi_0^*(x_n)$. 同理可得 $b_{kn} \rightarrow \psi_0^*(x_n)$. 对每个 $n \in \sigma_0$, 存在无穷多个 k 使得 $n \notin \sigma_k^c$ 且 $b_{kn} = 0$, 则 $\psi_0^*(x_n) = 0$. 同理, 对每个 $n \in \sigma_0^c$, 有 $\varphi_0^*(x_n) = 0$. 因此,

$$\varphi_0^* = \sum_{n \in \sigma_0} \varphi_0^*(x_n) x_n^* \in \overline{\text{span}}\{x_n^*\}_{n \in \sigma_0}, \quad \psi_0^* = \sum_{n \in \sigma_0^c} \psi_0^*(y_n) y_n^* \in \overline{\text{span}}\{y_n^*\}_{n \in \sigma_0^c}.$$

由于 $\varphi_k^* - \psi_k^* \xrightarrow{w^*} \varphi_0^* - \psi_0^*$, 则

$$\|\varphi_0^* - \psi_0^*\| \leq \liminf_k \|\varphi_k^* - \psi_k^*\| \leq \liminf_k \frac{1}{k} = 0.$$

故 $\varphi_0^* = \psi_0^*$. 进而由假设 $d(\overline{\text{span}}\{x_n^*\}_{n \in \sigma_0}, \overline{\text{span}}\{y_n^*\}_{n \in \sigma_0^c}) > 0$ 可得 $\varphi_0^* = \psi_0^* = 0$. 因而, $\varphi_k^* \xrightarrow{w^*} 0$ 且 $\psi_k^* \xrightarrow{w^*} 0$.

对每个 k , 令 $S_k = \text{supp}(\varphi_k^*) = \{n \in \mathbb{N} : a_{kn} \neq 0\}$, $T_k = \text{supp}(\psi_k^*) = \{n \in \mathbb{N} : b_{kn} \neq 0\}$, 则 S_k 和 T_k 均为 $\mathbb{N}$ 的有限子集且 $S_k \cap T_k = \emptyset$. 令 $s_k = \max\{n : n \in S_k\}$, $t_k = \max\{n : n \in T_k\}$.

令 $l_1 = \max\{s_1, t_1\}$, $K_1 = \max\{\|x_n^*\|, \|y_n^*\| : 1 \leq n \leq l_1\}$. 由于对每个 n , 有 $a_{kn} \rightarrow 0$, $b_{kn} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), 则存在 $k_1 \in \mathbb{N}$ ($k_1 > 2$) 使得对所有 $1 \leq n \leq l_1$, 有 $|a_{k_1 n}|, |b_{k_1 n}| \leq \frac{1}{2K_1 l_1}$. 因而,

$$\left\| \sum_{n \in [l_1] \cap S_{k_1}} a_{k_1 n} x_n^* \right\| \leq \sum_{n \in [l_1] \cap S_{k_1}} \|a_{k_1 n} x_n^*\| \leq \frac{l_1 K_1}{2K_1 l_1} = \frac{1}{2}.$$

同理, $\|\sum_{n \in [l_1] \cap T_{k_1}} b_{k_1 n} y_n^*\| \leq \frac{1}{2}$. 由于 $\|\varphi_{k_1}^*\| = \|\sum_{n \in S_{k_1}} a_{k_1 n} x_n^*\| = 1$, 则 $s_{k_1} > l_1$. 由于

$$\|\psi_{k_1}^*\| = \left\| \sum_{n \in T_{k_1}} b_{k_1 n} y_n^* \right\| \geq \|\varphi_{k_1}^*\| - \|\varphi_{k_1}^* - \psi_{k_1}^*\| \geq 1 - \frac{1}{k_1} > \frac{1}{2},$$

则 $t_{k_1} > l_1$.

令 $l_2 = \max\{s_{k_1}, t_{k_1}\} > l_1$, $K_2 = \max\{\|x_n^*\|, \|y_n^*\| : 1 \leq n \leq l_2\}$, 则存在 $k_2 \in \mathbb{N}$ ($k_2 > k_1$) 使得对所有 $1 \leq n \leq l_2$, 有 $|a_{k_2 n}|, |b_{k_2 n}| \leq \frac{1}{2^2 K_2 l_2}$. 因而,

$$\left\| \sum_{n \in [l_2] \cap S_{k_2}} a_{k_2 n} x_n^* \right\| \leq \sum_{n \in [l_2] \cap S_{k_2}} \|a_{k_2 n} x_n^*\| \leq \frac{l_2 K_2}{2^2 K_2 l_2} = \frac{1}{2^2}.$$

同理, $\|\sum_{n \in [l_2] \cap T_{k_2}} b_{k_2 n} y_n^*\| \leq \frac{1}{2^2}$.

如此持续, 可得递增数列 $\{k_m\} \subseteq \mathbb{N}$, 使得对每个 $m \in \mathbb{N}$, 有

$$\left\| \sum_{n \in [l_m] \cap S_{k_m}} a_{k_m n} x_n^* \right\| \leq \frac{1}{2^m}, \quad \left\| \sum_{n \in [l_m] \cap T_{k_m}} b_{k_m n} y_n^* \right\| \leq \frac{1}{2^m},$$

其中 $l_m = \max\{s_{k_{m-1}}, t_{k_{m-1}}\} > l_{m-1}$, $k_0 = 1$, $l_0 = 0$.

令 $I_m = S_{k_m} \setminus [l_m]$, $J_m = T_{k_m} \setminus [l_m]$. 令 $\sigma = \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$, 则对每个 m , 有 $I_m \subseteq \sigma$, $J_m \subseteq \sigma^c$.

由于 $\varphi_{k_m}^* = \sum_{n \in S_{k_m}} a_{k_m n} x_n^* = \sum_{n \in I_m} a_{k_m n} x_n^* + \sum_{n \in [l_m] \cap S_{k_m}} a_{k_m n} x_n^*$, 则

$$K = \left\| \sum_{n \in I_m} a_{k_m n} x_n^* \right\| \geq \|\varphi_{k_m}^*\| - \left\| \sum_{n \in [l_m] \cap S_{k_m}} a_{k_m n} x_n^* \right\| \geq 1 - \frac{1}{2^m} \geq \frac{1}{2}$$

且 $|1 - K| = \left| \|\varphi_{k_m}^*\| - \left\| \sum_{n \in I_m} a_{k_m n} x_n^* \right\| \right| \leq \left\| \sum_{n \in [l_m] \cap S_{k_m}} a_{k_m n} x_n^* \right\| < \frac{1}{2^m}$. 故

$$\begin{aligned} & d(\overline{\text{span}}\{x_n^*\}_{n \in I_m}, \overline{\text{span}}\{y_n^*\}_{n \in J_m}) \\ & \leq \left\| \frac{1}{K} \sum_{n \in I_m} a_{k_m n} x_n^* - \sum_{n \in J_m} b_{k_m n} y_n^* \right\| \\ & \leq \left\| \frac{1}{K} \sum_{n \in I_m} a_{k_m n} x_n^* - \varphi_{k_m}^* \right\| + \|\varphi_{k_m}^* - \psi_{k_m}^*\| + \left\| \psi_{k_m}^* - \sum_{n \in J_m} b_{k_m n} y_n^* \right\| \\ & \leq \frac{1}{K} \left\| \sum_{n \in I_m} a_{k_m n} x_n^* - \varphi_{k_m}^* \right\| + \left\| \frac{1}{K} \varphi_{k_m}^* - \varphi_{k_m}^* \right\| + \frac{1}{k_m} + \left\| \sum_{n \in T_{k_m}} b_{k_m n} y_n^* - \sum_{n \in J_m} b_{k_m n} y_n^* \right\| \\ & \leq 2 \left\| \sum_{n \in [l_m] \cap S_{k_m}} a_{k_m n} x_n^* \right\| + \|\varphi_{k_m}^*\| \frac{|1-K|}{K} + \frac{1}{m} + \left\| \sum_{n \in [l_m] \cap T_{k_m}} b_{k_m n} y_n^* \right\| \\ & \leq 2 \frac{1}{2^m} + 2 \frac{1}{2^m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{2^m} \leq \frac{6}{m}. \end{aligned}$$

又注意到对每个 m , 有

$$d(\overline{\text{span}}\{x_n^*\}_{n \in \sigma}, \overline{\text{span}}\{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}) \leq d(\overline{\text{span}}\{x_n^*\}_{n \in I_m}, \overline{\text{span}}\{y_n^*\}_{n \in J_m}) \leq \frac{6}{m},$$

则 $d(\overline{\text{span}}\{x_n^*\}_{n \in \sigma}, \overline{\text{span}}\{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}) = 0$, 与条件 (2) 矛盾. $\square$

由引理 2.6 和定理 2.12, 容易得到如下推论:

推论 2.13 设 X 是 Banach 空间, $1 < q < \infty$, $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的 q -Riesz 基, 则如下叙述等价:

- (1) $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是可编排的;
- (2) 每个编排 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X^* 的 q -Riesz 基.

最后, 我们说明 X 的 p -框架 (且非 X^* 的 q -Riesz 基) 和 X^* 的 q -Riesz 基是不可编排的.

定理 2.14 设 X 是 Banach 空间, $1 < p, q < \infty$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 若 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ 是 X^* 的 q -Riesz 基, $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ 是 X 的 p -框架, 且它们作为 X 的 p -框架是可编排的, 则 $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 必是 X^* 的 q -Riesz 基.

证明 假设 $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 不是 X^* 的 q -Riesz 基. 由于 $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的 p -框架, 根据文献 [15, 命题 2.7], 不失一般性, 不妨设 $y_1^* \in \overline{\text{span}}\{y_n^*\}_{n=2}^{\infty}$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\{b_n\}_{n=2}^k \subseteq \mathbb{C}$ 使得 $\|y_1^* - \sum_{n=2}^k b_n y_n^*\| < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. 令 $X_1 = {}^{\perp}(\text{span}\{y_n^*\}_{n=2}^k)$, 则 $\dim X_1 \leq k-1$. 令 $X_2 = {}^{\perp}(\text{span}\{x_n^*\}_{n=k+1}^{\infty})$. 由于 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的 q -Riesz 基, 根据文献 [15, 定理 2.8] 可知, 存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ 使得

$$x_n^*(x_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

则 $\dim X_2 \geq k$. 因而存在 $x \in X_1 \cap X_2$, $\|x\| = 1$.

令 $\sigma = [k]^c \subseteq \mathbb{N}$, 则 $\sum_{n \in \sigma} |x_n^*(x)|^p = 0$ 且

$$\sum_{n \in \sigma^c} |y_n^*(x)|^p = \sum_{n=1}^k |y_n^*(x)|^p = |y_1^*(x)|^p = \left| \left(y_1^* - \sum_{n=2}^k b_n y_n^* \right) (x) \right|^p \leq \left(\left\| y_1^* - \sum_{n=2}^k b_n y_n^* \right\| \|x\| \right)^p < \varepsilon.$$

故 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 作为 X 的 p -框架不是可编排的, 与定理中条件矛盾. $\square$

3 编排和摄动

本节考虑编排 p -框架和编排 q -Riesz 基的摄动. 首先说明可编排的 p -框架经过满射算子作用后仍是可编排的, 可编排的 q -Riesz 基经过可逆算子作用后仍是可编排的.

命题 3.1 设 X 和 Y 是 Banach 空间, $1 < p < \infty$, $T \in B(X^*, Y^*)$ 是满射算子.

(1) 若 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是 X 的 p -框架, 则 $\{Tx_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是 Y 的 p -框架.

(2) 若 X 的 p -框架 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是可编排的, 则 Y 的 p -框架 $\{Tx_n^*\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{Ty_n^*\}_{n=1}^\infty$ 也是可编排的.

证明 (1) 由于 T 是满射, 则 T^* 是下有界的, 即存在常数 $C > 0$ 使得 $\|T^*y^{**}\| \geq C\|y^{**}\|$ 对任意 $y^{**} \in Y^{**}$ 成立. 记 J_X 和 J_Y 分别是 X 和 Y 到 X^{**} 和 Y^{**} 的典则嵌入映射. 由于 X 有 p -框架, 则 X 自反. 故 $J_X(X) = X^{**}$. 对任意 $y \in Y$, 有 $T^*J_Y y \in X^{**} = J_X(X)$. 设 $T^*J_Y y = J_X x$ 对某个 $x \in X$ 成立, 则 $\|T^*J_Y y\| = \|x\|$, 故 $C\|y\| = C\|J_Y y\| \leq \|x\| \leq \|T^*\| \|J_Y y\| = \|T^*\| \|y\|$. 因此,

$$\begin{aligned} A_1 C^p \|y\|^p &\leq A_1 \|x\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(Tx_n^*)(y)|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |(J_Y y)(Tx_n^*)|^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |(T^*J_Y y)(x_n^*)|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |(J_X x)(x_n^*)|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x)|^p \\ &\leq B_1 \|x\|^p \leq B_1 \|T^*\|^p \|y\|^p, \end{aligned}$$

其中 A_1 和 B_1 是 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 的 p -框架界. 因此, $\{Tx_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是 Y 的 p -框架.

(2) 由于 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是可编排的, 则存在常数 $0 < A \leq B < +\infty$, 使得对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X 的 p -框架且有 p -框架界 A 和 B . 对任意 $y \in Y$, 设 $T^*J_Y y = J_X x$ 对某个 $x \in X$, 则

$$\begin{aligned} AC^p \|y\|^p &\leq A \|x\|^p \leq \sum_{n \in \sigma} |(Tx_n^*)(y)|^p + \sum_{n \in \sigma^c} |(Ty_n^*)(y)|^p \\ &= \sum_{n \in \sigma} |x_n^*(x)|^p + \sum_{n \in \sigma^c} |y_n^*(x)|^p \leq B \|x\|^p \leq B \|T^*\|^p \|y\|^p. \end{aligned}$$

因而, 对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , $\{Tx_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{Ty_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 Y 的 p -框架且有一致的 p -框架界 AC^p 和 $B\|T^*\|^p$. 因此, $\{Tx_n^*\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{Ty_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是可编排的. $\square$

命题 3.2 设 X 和 Y 是 Banach 空间, $1 < q < \infty$.

(1) 若 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X 的 q -Riesz 序列且 $T \in B(X, Y)$ 下有界, 则 $\{Tx_n\}_{n=1}^\infty$ 是 Y 的 q -Riesz 序列;

(2) 若 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X 的 q -Riesz 基且 $T \in B(X, Y)$ 可逆, 则 $\{Tx_n\}_{n=1}^\infty$ 是 Y 的 q -Riesz 基;

(3) 若 X 的 q -Riesz 基 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ 是可编排的且 $T \in B(X, Y)$ 可逆, 则 Y 的 q -Riesz 基 $\{Tx_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{Ty_n\}_{n=1}^\infty$ 也是可编排的.

证明 (1) 由于 T 下有界, 即存在常数 $C > 0$ 使得 $\|Tx\| \geq C\|x\|$ 对任意 $x \in X$ 成立. 对任意有限数列 $\{c_n\}$, 有

$$\begin{aligned} C^q A_1 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^q &\leq C^q \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right\|^q \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n T x_n \right\|^q = \left\| T \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right\|^q \\ &\leq \|T\|^q \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right\|^q \leq \|T\|^q B_1 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^q, \end{aligned}$$

其中 A_1 和 B_1 是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 q -Riesz 界. 因此, $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Y 的 q -Riesz 序列.

(2) 由于 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的 q -Riesz 基, 则 $\overline{\text{span}}\{x_n\} = X$. 由于 T 可逆, 则

$$\overline{\text{span}}\{Tx_n\} = T(\overline{\text{span}}\{x_n\}) = T(X) = Y.$$

结合 (1) 可得 $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Y 的 q -Riesz 基.

(3) 由于 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是可编排的, 则存在常数 $0 < A \leq B < +\infty$, 使得对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , $\{x_n\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X 的 q -Riesz 基且有 q -Riesz 界 A 和 B . 对任意只有有限个非零元的数列 $\{c_n\}$, 有

$$\begin{aligned} C^q A \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^q &\leq C^q \left\| \sum_{n \in \sigma} c_n x_n + \sum_{n \in \sigma^c} c_n y_n \right\|^q \leq \left\| \sum_{n \in \sigma} c_n T x_n + \sum_{n \in \sigma^c} c_n T y_n \right\|^q = \left\| T \left(\sum_{n \in \sigma} c_n x_n + \sum_{n \in \sigma^c} c_n y_n \right) \right\|^q \\ &\leq \|T\|^q B \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^q. \end{aligned}$$

由于 $\overline{\text{span}}(\{x_n\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n\}_{n \in \sigma^c}) = X$ 且 T 可逆, 则 $\overline{\text{span}}(\{Tx_n\}_{n \in \sigma} \cup \{Ty_n\}_{n \in \sigma^c}) = Y$. 由上面的讨论可知, 对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , $\{Tx_n\}_{n \in \sigma} \cup \{Ty_n\}_{n \in \sigma^c}$ 是 Y 的 q -Riesz 基且有一致的 q -Riesz 界 $C^q A$ 和 $\|T\|^q B$. 因而, $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{Ty_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是可编排的. $\square$

接下来说明 p - 框架和其自身的小算子摄动是可编排的.

命题 3.3 设 X 是 Banach 空间, $1 < p < \infty$, $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的 p - 框架且有 p - 框架界 A 和 B . 若 $T \in B(X^*)$ 满足 $\|\text{Id} - T\|^p < \frac{A}{B}$, 则 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{Tx_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是可编排的, 其中 Id 表示恒等算子.

证明 由于 $\|\text{Id} - T\|^p < \frac{A}{B} \leq 1$, 则 T 可逆. 因此, $\{Tx_n^*\}$ 是 X 的 p - 框架. 对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ 和任意 $x \in X$, 令

$$a_n = x_n^*(x), \quad b_n = \begin{cases} 0, & n \in \sigma, \\ ((\text{Id} - T)x_n^*)(x), & n \in \sigma^c, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},$$

则 $a = \{a_n\}$, $b = \{b_n\} \in l_p$ 且 $\|a - b\| \geq \|a\| - \|b\|$, 即

$$\left(\sum_{n \in \sigma} |x_n^*(x)|^p + \sum_{n \in \sigma^c} |x_n^*(x) - ((\text{Id} - T)x_n^*)(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\sum_{n \in \sigma^c} |((\text{Id} - T)x_n^*)(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

由于 X 有 p - 框架, 则 X 自反. 因此, $J_X(X) = X^{**}$. 设 $(\text{Id} - T)^* J_X x = J_X y$ 对某个 $y \in X$ 成立, 则 $\|(\text{Id} - T)^* J_X x\| = \|y\|$. 又由于 $((\text{Id} - T)x_n^*)(x) = (J_X x)((\text{Id} - T)x_n^*) = ((\text{Id} - T)^* J_X x)(x_n^*) = (J_X y)(x_n^*) = x_n^*(y)$, 则

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\sum_{n \in \sigma^c} |((\text{Id} - T)x_n^*)(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\sum_{n \in \sigma^c} |x_n^*(y)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

由上可得

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n \in \sigma} |x_n^*(x)|^p + \sum_{n \in \sigma^c} |(Tx_n^*)(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{n \in \sigma} |x_n^*(x)|^p + \sum_{n \in \sigma^c} |x_n^*(x) - ((\text{Id} - T)x_n^*)(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\sum_{n \in \sigma^c} |x_n^*(y)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq A^{\frac{1}{p}} \|x\| - B^{\frac{1}{p}} \|y\| \\ &\geq A^{\frac{1}{p}} \|x\| - B^{\frac{1}{p}} \|(\text{Id} - T)^*\| \|x\| = (A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}} \|\text{Id} - T\|) \|x\|. \end{aligned}$$

设 $T^*J_Xx = J_Xz$ 对某个 $z \in X$ 成立, 则 $\|T^*J_Xx\| = \|z\|$. 由于 $(Tx_n^*)(x) = (J_Xx)(Tx_n^*) = (T^*J_Xx)(x_n^*) = (J_Xz)(x_n^*) = x_n^*(z)$, 则

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n \in \sigma} |x_n^*(x)|^p + \sum_{n \in \sigma^c} |(Tx_n^*)(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)|^p + \sum_{n \in \mathbb{N}} |(Tx_n^*)(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)|^p + \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(z)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (B\|x\|^p + B\|T^*\|^p\|x\|^p)^{\frac{1}{p}} = B^{\frac{1}{p}}(1 + \|T\|^p)^{\frac{1}{p}}\|x\|. \end{aligned}$$

由于 $A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}}\|\text{Id} - T\| > 0$, 则 $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{Tx_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X 的 p -框架且有 p -框架界 $A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}}\|\text{Id} - T\|$ 和 $B^{\frac{1}{p}}(1 + \|T\|^p)^{\frac{1}{p}}$. 因此, $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{Tx_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是可编排的. $\square$

定理 3.4 设 X 是 Banach 空间, $1 < p < \infty$, $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 都是 X 的 p -框架且分别有 p -框架界 A, B 和 C, D . 若存在 $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$, 满足 $\alpha B^{\frac{1}{p}} + \beta D^{\frac{1}{p}} + \gamma < A^{\frac{1}{p}}$, 使得对任意 $x \in X$, 有

$$\left(\sum_{n=1}^\infty |x_n^*(x) - y_n^*(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \alpha \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n^*(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \beta \left(\sum_{n=1}^\infty |y_n^*(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \gamma \|x\|,$$

则 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是可编排的.

证明 对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ 和任意 $x \in X$, 有

$$\left(\sum_{n \in \sigma} |x_n^*(x)|^p + \sum_{n \in \sigma^c} |y_n^*(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)|^p + \sum_{n \in \mathbb{N}} |y_n^*(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq (B\|x\|^p + D\|x\|^p)^{\frac{1}{p}} = (B + D)^{\frac{1}{p}}\|x\|.$$

令

$$a_n = x_n^*(x), \quad b_n = \begin{cases} 0, & n \in \sigma, \\ x_n^*(x) - y_n^*(x), & n \in \sigma^c, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},$$

则 $a = \{a_n\}, b = \{b_n\} \in l_p$ 且 $\|a - b\| \geq \|a\| - \|b\|$, 即

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n \in \sigma} |x_n^*(x)|^p + \sum_{n \in \sigma^c} |y_n^*(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\geq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\sum_{n \in \sigma^c} |x_n^*(x) - y_n^*(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq A^{\frac{1}{p}}\|x\| - \left(\alpha \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n^*(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \beta \left(\sum_{n=1}^\infty |y_n^*(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \gamma \|x\| \right) \\ &\geq A^{\frac{1}{p}}\|x\| - (\alpha B^{\frac{1}{p}}\|x\| + \beta D^{\frac{1}{p}}\|x\| + \gamma \|x\|) \\ &\geq (A^{\frac{1}{p}} - (\alpha B^{\frac{1}{p}} + \beta D^{\frac{1}{p}} + \gamma))\|x\|. \end{aligned}$$

由上面的讨论可知, 对 $\mathbb{N}$ 的任意子集 σ , $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ 是 X 的 p - 框架且有一致的 p - 框架界 $A^{\frac{1}{p}} - (\alpha B^{\frac{1}{p}} + \beta D^{\frac{1}{p}} + \gamma) > 0$ 和 $(B + D)^{\frac{1}{p}}$. 因此, $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是可编排的. $\square$

致谢 作者衷心感谢审稿人提出的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Duffin R J, Schaeffer A C. A class of nonharmonic Fourier series. *Trans Amer Math Soc*, 1952, 72: 341–366
- 2 Daubechies I, Grossmann A, Meyer Y. Painless nonorthogonal expansions. *J Math Phys*, 1986, 27: 1271–1283
- 3 Casazza P G. The art of frame theory. *Taiwanese J Math*, 2000, 4: 129–201
- 4 Christensen O. *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. Boston: Birkhäuser, 2003
- 5 Cahill J, Casazza P G. The Paulsen problem in operator theory. *Oper Matrices*, 2013, 7: 117–130
- 6 Cahill J, Casazza P G, Kutyniok G. Operators and frames. *J Operator Theory*, 2013, 70: 145–164
- 7 Casazza P G, Han D, Larson D R. Frames for Banach spaces. In: *The Functional and Harmonic Analysis of Wavelets and Frames*. Contemporary Mathematics, vol. 247. Providence: Amer Math Soc, 1999, 149–182
- 8 Casazza P G, Tremain J C. The Kadison-Singer problem in mathematics and engineering. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2006, 103: 2032–2039
- 9 Han D, Larson D R. Frames, bases and group representations. *Mem Amer Math Soc*, 2000, 147: 1–94
- 10 Han D, Larson D R, Liu B, et al. Operator-valued measures, dilations, and the theory of frames. *Mem Amer Math Soc*, 2014, 229: 1–84
- 11 Gröchenig K. Describing functions: Atomic decompositions versus frames. *Monatsh Math*, 1991, 112: 1–42
- 12 Cazassa P G, Christensen O. Perturbation of operators and applications to frame theory. *J Fourier Anal Appl*, 1997, 3: 543–557
- 13 Casazza P, Christensen O, Stoeva D T. Frame expansions in separable Banach spaces. *J Math Anal Appl*, 2005, 307: 710–723
- 14 Stoeva D T. On p -frames and reconstruction series in separable Banach spaces. *Integral Transforms Spec Funct*, 2006, 17: 127–133
- 15 Christensen O, Stoeva D T. p -Frames in separable Banach spaces. *Adv Comput Math*, 2003, 18: 117–126
- 16 Liu B, Liu R, Zheng B. Parseval p -frames and the Feichtinger conjecture. *J Math Anal Appl*, 2015, 424: 248–259
- 17 Rahimi A, Balazs P. Multipliers for p -Bessel sequences in Banach spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 2010, 68: 193–205
- 18 Bemrose T, Casazza P G, Gröchenig K, et al. Weaving frames. *Oper Matrices*, 2016, 10: 1093–1116
- 19 Aldroubi A, Sun Q, Tang W S. p -Frames and shift invariant subspaces of L^p . *J Fourier Anal Appl*, 2001, 7: 1–22

Weaving p -frames and weaving q -Riesz bases

Liqiong Lin, Yunnan Zhang & Yan Zhou

Abstract As a generalization of weaving frames and weaving Riesz bases in Hilbert spaces, we study weaving p -frames and weaving q -Riesz bases in Banach spaces. Two p -frames $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ and $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ are called woven if there exist constants $0 < A \leq B < +\infty$ such that for every subset $\sigma \subseteq \mathbb{N}$, the sequence $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ is a p -frame with p -frame bounds A, B . Each sequence $\{x_n^*\}_{n \in \sigma} \cup \{y_n^*\}_{n \in \sigma^c}$ is called a weaving. The woven q -Riesz bases have similar definitions. We show that two p -frames are woven if every weaving of them is a p -frame in Banach spaces. We classify when two q -Riesz bases can be woven in the dual spaces. We give two conditions that every weaving of two q -Riesz bases is a q -Riesz basis in terms of q -Riesz sequences and p -frames, and give a geometric characterization of woven q -Riesz bases in terms of distances between subspaces. Finally, we consider the perturbations of weaving p -frames and weaving q -Riesz bases, such as small perturbations and operator perturbations.

Keywords p -frame, q -Riesz basis, distance between subspaces, perturbation

MSC(2010) 42C15, 46B20

doi: 10.1360/N012016-00108