论文

矢量光束和空间偏振转化器件的矩阵分析

李辰^①, 辛璟焘^{①*}, 刘义东^②^① 北京理工大学光电学院光电子研究所, 北京 100081;^② 电子科技大学物理电子学院, 成都 610054

*联系人, E-mail: xinjingtao@bit.edu.cn

收稿日期: 2012-11-16; 接受日期: 2013-04-16

国家自然科学基金(批准号: 60778002, 60908034)和教育部博士点基金(编号: 20090185120016)资助项目

摘要 琼斯矢量和琼斯矩阵是分析光束偏振态和光学元件时广泛使用的一种数学工具. 本文将琼斯矢量和琼斯矩阵的矩阵元素从常量扩展为与方位角相关的变量, 用以描述矢量光束和空间偏振转化器件. 探讨了组合半波片和组合偏振片对基模高斯光束和螺旋光束的变换作用, 提出了生成矢量光束的新方法和检测螺旋光束轨道角动量的新方法.

关键词 琼斯矢量, 琼斯矩阵, 组合半波片, 组合偏振片

PACS: 42.25.Ja, 42.60.Jf

doi: 10.1360/132012-937

矢量光束是一种波面内各点的偏振方向呈轴对称分布的光束, 其光束中心处偏振方向的不确定性导致其场强在光束中心出现奇点, 因此其场强分布为中空圆环. 目前矢量光束中应用最广的是一阶的径向偏振光. 径向偏振光束经过高数值孔径透镜的聚焦后, 焦平面上的聚焦光斑可以突破衍射极限并且具有很强的纵向电场分量^[1,2]. 其聚焦特性使径向偏振光束在高分辨率显微成像、光镊、粒子加速、激光加工、表面等离子体共振激发等领域具有潜在的应用前景^[3].

矢量光束是麦克斯韦波动方程在柱坐标系下的一种解, 但是其形式复杂, 不方便描述矢量光束的偏振分布. 因此, 采用一个简单数学模型来描述矢量光束的偏振分布及其相应转换器件就具有现实意义.

在描述光束和光学元件的方法中, 琼斯矢量和琼斯矩阵^[4]具有简洁的数学形式, 受到了广大研究者的青睐. 但是直接用传统的琼斯矢量和琼斯矩阵无法描述矢量光束和空间偏振转化器件, 因此本文将琼斯矢量和琼斯矩阵的元素从常量扩展为与方位角相关的变量, 使之适合描述矢量光束和空间偏振转化器件.

本文首先用扩展的琼斯矢量描述了矢量光束, 并根据组合半波片和组合偏振片的琼斯矩阵, 讨论了组合半波片和组合偏振片对基模高斯光束和螺旋光束的变换作用. 我们发现, 组合半波片将线偏振高斯光束变换为矢量光束, 而组合偏振片将圆偏振高斯光束变换为矢量光束, 并由此提出了矢量光束新的生成方法.

引用格式: 李辰, 辛璟焘, 刘义东. 矢量光束和空间偏振转化器件的矩阵分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43: 1029–1034

Li C, Xin J T, Liu Y D. Matrix analysis for vector beams and spatial polarization converters (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2013, 43: 1029–1034, doi: 10.1360/132012-937

目前, 已经报道的测量方法主要有衍射光栅测量法^[5]、二阶强度矩测量法^[6]、狭缝或小孔衍射法^[7]、干涉仪测量法^[8]等. 根据组合半波片和组合偏振片对螺旋光束的变换作用, 我们提出了螺旋光束轨道角动量新的检测方法.

1 用琼斯矢量描述矢量光束

琼斯矢量和琼斯矩阵是分析光束偏振态时广泛使用的一种数学工具, 但是直接用传统的琼斯矢量和琼斯矩阵无法描述矢量光束和空间偏振转化器件, 因此我们将琼斯矢量和琼斯矩阵中的元素从常量扩展为与方位角相关的变量.

根据矢量光束的定义, 矢量光束可以表示为^[9,10]

$$\mathbf{J}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(m\varphi + \theta_0) \\ \sin(m\varphi + \theta_0) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

其中 θ_0 是初始偏振方向, 而 φ 是方位角. m 是矢量光束的阶数, 也被称作拓扑荷.

当 $m=1$ 且 $\theta_0=0$ 时, 表示径向偏振光, 当 $m=1$ 且 $\theta_0=\pi/2$ 时, 表示角向偏振光.

扩展的琼斯矢量也可以描述普通的线偏光. 当 $m=0$ 时, 表示偏振方向与 x 轴的夹角为 θ_0 的线偏振光:

$$\mathbf{J}_{\text{linear}} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

2 用琼斯矩阵描述空间偏振转化器件

2.1 组合半波片的结构

2008 年, 以色列的 Machavariani 等人^[11]将八块扇形的半波片拼接在一起, 用一阶组合半波片得到了一阶的径向偏振光束. 本文对组合半波片这个器件进行了扩展并设计了高阶组合半波片^[12], 用于生成高阶矢量光束.

如图 1, 组合半波片是由多片扇形半波片拼接而成, 其中箭头方向是每一片扇形半波片的快轴方向, 相邻两片的快轴之间的夹角等于 $m\pi/M$, 其中 m 是组合半波片的阶数, M 是半波片的片数. 当线偏振的高斯光束通过 m 阶组合半波片时, 扇形的半波片将入射到其区域的光场的偏振方向依次旋转 $0, 2m\pi/M, \dots, 2m\pi(M-1)/M$.

图 1 组合半波片将线偏振光转化为矢量光束

Figure 1 Vector beams transformed from linearly polarized beam by segmented half-wave plates.

2.2 组合半波片生成矢量光束

组合半波片是一片片半波片连接构成的, 片和片之间的光学特性是不连续的. 本文中, 为了便于写出组合半波片的琼斯矩阵, 我们只能假定组合半波片的光学特性是连续的. 我们用一个 m 阶组合半波片(快轴与 x 轴成角度 $m\varphi/2$)将线偏振高斯光束转化为矢量光束^[10], 如图 1 所示. m 阶组合半波片的琼斯矩阵表示为

$$\mathbf{M}_{m\text{-HWP}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos m\varphi & \sin m\varphi \\ \sin m\varphi & -\cos m\varphi \end{pmatrix}. \quad (3)$$

当线偏振光通过这个组合半波片时, 输出光的琼斯矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{m\text{-HWP}}(\varphi) \mathbf{J}_{\text{linear}} &= \begin{pmatrix} \cos m\varphi & \sin m\varphi \\ \sin m\varphi & -\cos m\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(m\varphi - \theta_0) \\ \sin(m\varphi - \theta_0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

从这个例子中我们可以看到, 组合半波片可将线偏振光转化为矢量光束.

图 2 是由 12 片的一至三阶组合半波片生成的一至三阶矢量光束. 我们看到, 矢量光束通过检偏器后的主瓣数是矢量光束阶数的二倍; 当检偏器旋转了角度 θ 时, 矢量光束通过检偏器后的图样旋转了角度 θ/m , m 是矢量光束的阶数; 如果 m 是负数, 图样的旋转方向和检偏器旋转的方向相反. 这三点经常用于检测光束是不是矢量光束, 以及检测矢量光束的阶数^[13].

图 2 12 片的组合半波片生成 1-3 阶矢量光束

第一列: 无检偏器; 第二至四列: 通过不同偏振方向检偏器的图样
Figure 2 Vector beams generated by twelve-plate segmented half-wave plates. The first row: no polarizer; the second, third and fourth row: passing through different linear polarizers.

2.3 组合半波片对螺旋光束的变换作用

当一束拓扑荷为 m_0 的水平偏振的螺旋光束通过 m 阶组合半波片时, 这个过程可以表示为^[14,15]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{out}}(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos m\varphi & \sin m\varphi \\ \sin m\varphi & -\cos m\varphi \end{pmatrix} e^{im_0\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{i(m_0+m)\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + e^{i(m_0-m)\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

从(5)式我们发现, m 阶组合半波片将入射的螺旋光束分解为一束拓扑荷为 m_0+m 的右旋圆偏振光和一束拓扑荷为 m_0-m 的左旋圆偏振光. 当 $m_0=\pm m$ 时, 其中一束光将退化成拓扑荷为 0 的基模高斯光束(中心处为亮点), 而另一束光为拓扑荷为 $\pm 2m$ 的圆偏振光(环状光束). 这一点常用于检测螺旋光束的拓扑荷. 在图 3 中我们看到, 当组合半波片的阶数和螺旋光束的拓扑荷的绝对值相等时, 出射光束的图样是中心一个亮点和外面一个亮环, 然而外面的亮环不是很清晰. 这是由于两束光的总能量是相同的, 而中心亮点的面积比外面亮环的面积小得多, 因此中心亮点的能量密度比外面亮环的能量密度大得多, 所以只能看到中心的亮点. 此外, 图 6 也存在类似的情况.

2.4 组合偏振片生成矢量光束

2007 年, Moh 等人^[16]提出了一种径向检偏器, 并且将其用于生成径向偏振光束. 由于径向检偏器可以由若干片扇形的偏振片拼接而成, 其结构与组合

图 3 螺旋光束通过不同阶的组合半波片后的光场分布

Figure 3 The light field distribution that helical beams passing through different orders of segmented half-wave plates.

半波片相似, 只是将半波片换成了偏振片. 本文将其进行扩展, 将起偏方向具有轴对称结构的这一类检偏器命名为组合偏振片. 如图 4 所示是组合偏振片的示意图, 其中箭头方向表示扇形检偏器的起偏方向. m 阶组合偏振片中相邻两片之间的起偏角(起偏方向与水平方向的夹角)为 $2\pi m/M$, 其中 M 是扇形起偏器的数目. 与组合半波片一样, 我们假定组合偏振片的光学特性也是连续的.

组合偏振片可用琼斯矩阵来描述:

$$\mathbf{M}_{m-p}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos^2(m\varphi) & \sin(m\varphi)\cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi)\cos(m\varphi) & \sin^2(m\varphi) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

其中 φ 是方位角. 当 $m=1$ 时, $\mathbf{M}_{1-p}(\varphi)$ 表示径向起偏器.

当一束左旋高斯光束通过 m 阶组合偏振片时, 出射光束可表示为

图 4 组合偏振片的示意图

(a) 径向检偏器, (b) 角向检偏器, (c) 二阶组合偏振片

Figure 4 Diagram for segmented polarizers. (a) Radial segmented polarizers; (b) azimuthal segmented polarizers; (c) second order segmented polarizers.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\text{out}} &= \mathbf{M}_{m-P}(\varphi) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos^2(m\varphi) + i \sin(m\varphi) \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \cos(m\varphi) + i \sin^2(m\varphi) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{pmatrix} \exp(im\varphi). \quad (7)
\end{aligned}$$

上式表明, 出射光束的电场方向是轴对称的, 即与矢量光束相同, 但是比矢量光束多了一个螺旋相位项 $\exp(im\varphi)$. 具体地说, 光束的偏振态是轴对称分布的, 同时相位是螺旋状分布的. 因此, 可以用一束拓扑荷为 $-m$ 的螺旋光束代替高斯光束来消除这个螺旋相位, 实现矢量光束的生成. 其生成过程可用下面的数学表达式描述:

$$\mathbf{E}_{\text{out}} = \mathbf{M}_{m-P}(\varphi) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \exp(-im\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

同理, 我们也可以用一束拓扑荷为 m 的右旋圆偏振光入射到 m 阶轴对称起偏器上实现 m 阶矢量光束的生产. 图 5 是用组合偏振片产生的矢量光束. 通过图 5 和图 2 的对比我们发现, 两幅图具有很多相似之处, 这证明了组合偏振片产生的是矢量光束.

2.5 组合偏振片检测螺旋光束轨道角动量

在 2.3 节我们研究了用组合半波片检测螺旋光束轨道角动量的方法. 鉴于组合偏振片和组合半波片具有一些类似的功能, 我们设想组合偏振片同样可用于

图 5 组合偏振片生成 1-3 阶矢量光束

第一列: 无检偏器; 第二至四列: 通过不同偏振方向检偏器的图样
Figure 5 Vector beams generated by segmented polarizers. The first row: no polarizer; the second, third and forth row: passing through different linear polarizers.

螺旋光束轨道角动量的测量. 为此我们针对组合偏振片对圆偏振螺旋光束的变换特性进行了研究, 下面我们用数学方法(用琼斯矢量和琼斯矩阵)对这一现象进行描述. 一束拓扑荷为 m 的左旋螺旋光束通过 n 阶组合偏振片后的光场分布可以表示为

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\text{out}} &= \mathbf{M}_{n-P}(\varphi) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \exp(im\varphi) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{pmatrix} \exp(i(m+n)\varphi) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \exp(-in\varphi) + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \exp(in\varphi) \right) \exp(i(m+n)\varphi) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \exp(-im\varphi) + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \exp(i(2n+m)\varphi) \right). \quad (9)
\end{aligned}$$

可见出射光束可以分解为一束拓扑荷为 m 的左旋圆偏振光和一束拓扑荷为 $2n+m$ 的右旋圆偏振光. 当 $m=0$ 时, 出射光束为一束拓扑荷为 0 的左旋圆偏振光和一束拓扑荷为 $2n$ 的右旋圆偏振光的叠加. 当 $2n+m=0$ 且 $m \neq 0$ 时, 出射光束为一束拓扑荷为 m 的左旋圆偏振光和一束拓扑荷 0 的右旋圆偏振光的叠加. 这两种情况都表现为外面一个亮环包着中心一个亮点. 组合偏振片的这一特性可以用于检测螺旋光束的拓扑荷. 在图 6 中我们看到, 当入射螺旋光束的拓扑荷为 0, 或者入射螺旋光束的拓扑荷的绝对值是组合偏振片阶数的两倍时, 我们看到了中心的亮点, 但是外面的亮环不是很明显. 这是由于中心亮点的能量密度比外面亮环的能量密度大得多导致的.

图 6 螺旋光束通过不同阶数的组合偏振片后的光强分布

Figure 6 The light field distribution that helical beams passing through different orders of segmented polarizers.

3 结论

本文分别用琼斯矢量和琼斯矩阵描述矢量光束和空间偏振转化器件. 我们重点研究了组合半波片

和组合偏振片对基模高斯光束和螺旋光束的作用, 给出了生成矢量光束的新方法和检测螺旋光束轨道角动量的新方法.

参考文献

- 1 Dorn R, Quabis S, Leuchs G. Sharper focus for a radially polarized light beam. *Phys Rev Lett*, 2003, 91: 233901
- 2 Kitamura K, Sakai K, Noda S. Sub-wavelength focal spot with long depth of focus generated by radially polarized narrow-width annular beam. *Opt Express*, 2010, 18: 4518–4525
- 3 Zhan Q. Cylindrical vector beams: From mathematical concepts to applications. *Adv Opt Photon*, 2009, 1: 1–57
- 4 Matsuo S. Matrix calculus for axially symmetric polarized beam. *Opt Express*, 2011, 19: 12815–12824
- 5 Gibson G, Courtial J, Padgett M, et al. Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum. *Opt Express*, 2004, 12: 5448–5456
- 6 Bekshaev A Y, Karamoch A I. Astigmatic telescopic transformation of a high-order optical vortex. *Opt Commun*, 2008, 281: 5687–5696
- 7 Sztul H I, Alfano R R. Double-slit interference with Laguerre-Gaussian beams. *Opt Lett*, 2006, 31: 999–1001
- 8 Leach J, Courtial J, Skeldon K, et al. Interferometric methods to measure orbital and spin, or the total angular momentum of a single photon. *Phys Rev Lett*, 2004, 92: 013601
- 9 Stalder M, Schadt M. Linearly polarized light with axial symmetry generated by liquid-crystal polarization converters. *Opt Lett*, 1996, 21: 1948–1950
- 10 Moreno I, Davis J A, Ruiz I, et al. Decomposition of radially and azimuthally polarized beams using a circular-polarization and vortex-sensing diffraction grating. *Opt Express*, 2010, 18: 7173–7183
- 11 Machavariani G, Lumer Y, Moshe I, et al. Spatially-variable retardation plate for efficient generation of radially- and azimuthally-polarized beams. *Opt Commun*, 2008, 281: 732–738
- 12 Xin J, Gao C, Li C, et al. Measuring orbital angular momentum of helical beams by spatially variable retardation plates. *Appl Phys B-Lasers Opt*, 2012, 108: 703–706
- 13 Stalder M, Schadt M. Linearly polarized light with axial symmetry generated by liquid-crystal polarization converters. *Opt Lett*, 1996, 21: 1948–1950
- 14 Gao C, Qi X, Liu Y, et al. Superposition of helical beams by using a Michelson interferometer. *Opt Express*, 2010, 18: 72–78
- 15 Liu Y, Gao C, Gao M, et al. Superposition and detection of two helical beams for optical orbital angular momentum communication. *Opt Commun*, 2008, 281: 3636–3640
- 16 Moh K J, Yuan X C, Bu J, et al. Generating radial or azimuthal polarization by axial sampling of circularly polarized vortex beams. *Appl Opt*, 2007, 46: 7544–7551

Matrix analysis for vector beams and spatial polarization converters

LI Chen¹, XIN JingTao^{1*} & LIU YiDong²

¹ *School of Optical-Electronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;*

² *School of Physical Electronics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China*

Jones vector and Jones matrix are well known methods for analyzing the beam polarization and optical components. In this paper, the elements of Jones vector and Jones matrix are extended to parameters of azimuth so as to describe vector beams and spatial polarization converters. We study the transformation effects of segmented half-wave plates and segmented polarizers to fundamental Gaussian beam and helical beams. New methods are proposed to generate vector beams, and then new methods are proposed to check the orbital angular momentum of helical beams.

Jones vector, Jones matrix, segmented half-wave plates, segmented polarizers

PACS: 42.25.Ja, 42.60.Jf

doi: 10.1360/132012-937