轨形 Riemann 面的 Gromov-Witten 不变量 沿光滑点的加权胀开公式

杜承勇

四川师范大学数学与软件科学学院, 成都 610068
E-mail: cyd9966@hotmail.com

收稿日期: 2016-01-02; 接受日期: 2016-05-11; 网络出版日期: 2016-09-29

国家自然科学基金 (批准号: 11501393) 和四川省教育厅 (批准号: 15ZB0027) 资助项目

摘要 本文考虑当一个紧辛轨形 (orbifold) Riemann 面 (X, ω) 沿着光滑点作加权胀开时, 它的轨形 Gromov-Witten 不变量的变化情形和辛一致规则 (uniruledness) 性质的变化情形; 证明了如下的结果:

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle_{g,A}^X = \langle p^* \alpha_1, \dots, p^* \alpha_m, \underbrace{\mathbb{1}_{\widehat{X}_{(-\frac{1}{a_1})}}, \dots, \mathbb{1}_{\widehat{X}_{(-\frac{1}{a_1})}}}_{I_A} \rangle_{g,A}^{\widehat{X}},$$

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, [pt] \rangle_{g,A}^X = I_A \cdot \langle p^* \alpha_1, \dots, p^* \alpha_m, \underbrace{\mathbb{1}_{\widehat{X}_{(-\frac{1}{a_1})}}, \dots, \mathbb{1}_{\widehat{X}_{(-\frac{1}{a_1})}}}_{I_A} \rangle_{g,A}^{\widehat{X}}.$$

第一个公式表明, 当 (X, ω) 是辛一致规则的 (uniruled) 时, 它的沿光滑点的加权胀开 $(\widehat{X}, \widehat{\omega})$ 也是辛一致规则的.

关键词 轨形 Riemann 面 轨形 Gromov-Witten 不变量 加权胀开公式 辛一致规则

MSC (2010) 主题分类 53D45, 14N35

1 引言

(轨形 (orbifold)) Gromov-Witten (GW) 不变量的计算及应用一直是一个困难的问题. 目前常用的方法是文献 [1–4] 的虚拟局部化公式以及文献 [5–8] 的退化公式. 局部化公式可以帮助我们计算一些带有强对称性的辛流形/辛轨形的 GW 不变量; 而退化公式和辛手术的应用往往能给出一些 GW 不变量的结构性的性质及结果.

辛手术中最简单的是辛胀开. Hu^[9–11] 最早开始研究辛流形作胀开时 GW 不变量的变化情形. 在辛流形沿着低维辛子流形作胀开时, 有一大类 GW 不变量是保持不变的. Qi^[12] 和 He 等^[13] 推广了文献 [9] 中的一些结果. He 和 Hu^[14] 证明了辛轨形沿着光滑点作加权胀开时, 轨形 GW 不变量保持不变, 推广了文献 [9] 中的一个结果. 然而他们遗留下了辛轨形 Riemann 面沿光滑点作加权胀开的情形. 他们猜测他们的结果对这一情形也成立 (参见文献 [14, 注记 3.13]).

英文引用格式: Du C Y. Weighted blow-up of Gromov-Witten invariants of orbifold Riemannian surfaces along smooth points (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 409–422, doi: 10.1360/N012016-00003

给定一个光滑的 Riemann 面 Σ , 选定有限个点 $\{p_1, \dots, p_n\} \subset \Sigma$, 挖掉每个 p_i 的一个小的全纯同构于 $\mathbb{C}$ 中开圆盘 B_i 的邻域 U_i , 然后再粘合上 $B_i/\mathbb{Z}_{m_i}$, 即可得到轨形 Riemann 面. 这一过程实际上即是对光滑 Riemann 面沿着这些点作加权涨开. 因此, 沿光滑点作加权涨开是构造轨形 Riemann 面的一种好的方式.

本文考虑辛轨形 Riemann 面沿着光滑点作加权涨开时它的轨形 Gromov-Witten 不变量的变化情形. 我们发现需要对文献 [14] 中的公式作一些修改. 通过下面的证明可以发现, 这些修改是很自然的, 也是 2 维情形所独有的.

假设 (X, ω) 是一个紧辛轨形 Riemann 面. 任给一个光滑点 $P_0 \in X$ (从而 X 是有效的), 以及权 $\mathbf{a} = (a)$, $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 记 $(\hat{X}, \hat{\omega})$ 为 (X, ω) 沿着 P_0 的权 $-\mathbf{a}$ 涨开 (见第 2.2 小节). 如果 $\mathbf{a} = (1)$, 那么 $\hat{X}$ 就是 X 沿着 P_0 的通常的辛涨开. 此时, $(\hat{X}, \hat{\omega})$ 与 (X, ω) 形变等价. 它们的轨形 GW 理论是一致的. 因此, 下面我们只考虑

$$\mathbf{a} = (a), \quad a \geq 2 \quad (1.1)$$

的情形. 我们有一个自然投射 $p: \hat{X} \rightarrow X$. 注意到此时, 拓扑上我们有 $|X| = |\hat{X}|$, 而且 $p_*: H_*(|X|; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(|\hat{X}|; \mathbb{Z})$ 是恒等映射.

$\hat{X}$ 中的额外除子为 $E = [P_1/\mathbb{Z}_a]$. 它有一个扭曲部分 (twisted sector) $E_{(\frac{1}{a_1})}$ 和另一个扭曲部分 $E_{(\frac{-1}{a_1})}$ 分别包含 $(P_1, (e^{2\pi i \frac{1}{a_1}}))$ 和 $(P_1, (e^{2\pi i \frac{-1}{a_1}}))$. 相应的 $\hat{X}$ 也有扭曲部分分别包含 $(P_1, (e^{2\pi i \frac{1}{a_1}}))$. 我们将它们记为 $\hat{X}_{(\frac{1}{a_1})}$. 因为我们是沿着 X 的光滑点 P_0 作的加权涨开, 所以, 我们有 $\hat{X}_{(\frac{1}{a_1})} = E_{(\frac{1}{a_1})}$. 记 $H^0(\hat{X}_{(\frac{1}{a_1})}) = H^0(E_{(\frac{1}{a_1})})$ 的生成元为 $1_{\hat{X}_{(\frac{1}{a_1})}}$ 或 $1_{E_{(\frac{1}{a_1})}}$. 此生成元对应于取值为 1 的常值函数. 我们用 $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle_{g,A}^X$ 来记 X 的亏格 g , 同调类为 $A \in H_2(|X|; \mathbb{Z})$ 的轨形 GW 不变量.

在本文中, 我们证明如下的 (X, ω) 与 $(\hat{X}, \hat{\omega})$ 的轨形 GW 不变量的关系式.

定理 1.1 设 X 为紧辛轨形 Riemann 面. 对任意给定的 $\alpha_i \in H_{CR}^*(X)$, $1 \leq i \leq m$, 在 (1.1) 的条件下, 当 $g \geq 0$ 时, 我们有

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle_{g,A}^X = \langle p^* \alpha_1, \dots, p^* \alpha_m, \underbrace{1_{\hat{X}_{(\frac{1}{a_1})}}, \dots, 1_{\hat{X}_{(\frac{-1}{a_1})}}}_{I_A} \rangle_{g,A}^{\hat{X}}, \quad (1.2)$$

其中 $I_A = A \cdot [P_0]$.

定理 1.2 设 X 为紧辛轨形 Riemann 面. 对任意给定的 $\alpha_i \in H_{CR}^*(X)$, $1 \leq i \leq m$, 以及 P_0 的 Poincaré 对偶 $[pt] \in H_{dR}^{2n}(X)$, 在条件 (1.1) 下, 当 $g \geq 0$ 时, 我们有

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, [pt] \rangle_{g,A}^X = I_A \cdot \langle p^* \alpha_1, \dots, p^* \alpha_m, \underbrace{1_{\hat{X}_{(\frac{1}{a_1})}}, \dots, 1_{\hat{X}_{(\frac{-1}{a_1})}}}_{I_A} \rangle_{g,A}^{\hat{X}}. \quad (1.3)$$

注 1.3 如果对某个 i , $\deg_{CR} \alpha_i > 0$, 那么我们可以将 α_i 替换为 $\tau_{d_i} \alpha_i$, 此时上面的公式仍然成立.

注 1.4 结合 (1.2) 和 (1.3), 我们得到的实际上是轨形 GW 理论的除子公理.

定义 1.5 ^[14] 称一个辛轨形是辛一致规则的, 如果它有一个如下形式的亏格为 0 的非零轨形 GW 不变量

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, [pt] \rangle_{0,A}^X \neq 0,$$

其中 $A \neq 0, m \geq 0$.

定理 1.1 有如下直接的推论. 这将文献 [14, 推论 4.2] 推广到了实 2 维情形.

推论 1.6 如果紧辛轨形 Riemann 面 (X, ω) 是辛一致规则的, 那么它的沿光滑点的加权涨开 $(\hat{X}, \hat{\omega})$ 也是辛一致规则的.

本文的结构如下: 第 2 节分别回忆辛轨形群胚的定义和轨形 Riemann 面沿着光滑点的加权涨开, 以及绝对/相对轨形 GW 不变量和退化公式; 第 3 节证明上面的轨形 GW 不变量加权涨开变化公式和推论.

2 加权涨开与退化公式

2.1 辛轨形群胚

一个群胚 (groupoid) G 是一个所有态射都可逆的小范畴, 它包含一个对象空间 G_0 、一个态射空间 G_1 和 5 个结构映射:

- (1) 源映射 (source map) $s: G_1 \rightarrow G_0$, 将一个态射 $g: x \rightarrow y$ 映成它的原象空间 x ;
- (2) 目标映射 (target map) $t: G_1 \rightarrow G_0$, 将一个态射 $g: x \rightarrow y$ 映成它的象空间 y ;
- (3) 逆映射 (inverse map) $i: G_1 \rightarrow G_1$, 将一个态射 $g: x \rightarrow y$ 映成它的逆态射, 记为 $g^{-1}: y \rightarrow x$;
- (4) 单位映射 (unit/identity) $u: G_0 \rightarrow G_1$, 将一个对象 x 映成它上面的单位映射, 记为 $\text{id}_x: x \rightarrow x$;
- (5) 复合映射 (composition map) $m: G_0 \times_{s,t} G_1$, 将一对满足 $s(g) = t(h)$ 的态射 $h: x \rightarrow y, g: y \rightarrow z$ 映成它们的复合, 记为 $gh: x \rightarrow z$.

这些结构映射满足范畴定义中的基本公理, 详见文献 [15, 16]. 我们称 G_1 中元为箭头 (arrow), 并记为 $g: x \rightarrow y$.

如果 G_0 和 G_1 都是光滑流形, 以上 5 个结构映射都是光滑映射, 且 s 和 t 是淹没 (submersion), 我们就称 G 为 Lie 群胚 (Lie groupoid). 如果更进一步 $s \times t: G_1 \times G_1 \rightarrow G_0$ 是恰当的 (proper), 且 s 和 t 都是局部微分同胚, 则称 Lie 群胚 G 为轨形群胚 (orbifold groupoid). 一般地, 我们将一个轨形群胚记为 $G = (G_1 \rightrightarrows G_0)$. 此时对于任一点 $x \in G_0$, 我们有一个有限群 $G_x \triangleq s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x)$, 称为 x 的局部群 (或迷向群). 我们称 $\dim G_0 = \dim G_1$ 为 G 的维数.

一个轨形群胚之间的态射 $\phi: G \rightarrow H$ 是一对光滑映射 $\phi_i: G_i \rightarrow H_i, i = 0, 1$, 使得 ϕ 是一个函子.

给定轨形群胚 G , 在 G_0 上有一个自然的等价关系: 若存在 $g \in G_1$ 使得 $g: x \rightarrow y$, 我们就称 $x \sim y$. 我们称 G_0 在此等价关系下的商空间为 G 的粗空间 (coarse space), 并记为 $|G| \triangleq G_0 / \sim$.

给定一个轨形群胚 $G = (G_1 \rightrightarrows G_0)$, 我们可以定义它上面的微分形式

$$\Omega^k(G) \triangleq \{\omega_0 \in \omega^k(G_0) \mid s^*\omega_0 = t^*\omega_0\}.$$

我们称如此的 G_0 上的形式为 G_1 -不变的. 显然, $\Omega^*(G) = \bigoplus_{0 \leq k \leq \dim G} \Omega^k(G)$ 上有外微分算子 d , 使得 $(\Omega^*(G), d)$ 构成一个上链复形. 我们称

$$H_{dR}^k(G) = \frac{\ker d: \Omega^k(G) \rightarrow \Omega^{k+1}(G)}{\text{Im } d: \Omega^{k-1}(G) \rightarrow \Omega^k(G)}$$

为 G 的 k -阶 de Rham 上同调群. 文献 [17] 的结果说明此群与 $|G|$ 的奇异上同调群同构.

我们称一个 G 上的 2-形式 $\omega_0 \in \Omega^2(G)$ 为辛形式 (symplectic form), 如果 ω_0 是 G_0 上的辛形式. 因为此时 ω_0 是 G_1 -不变的, 且 s 和 t 是局部微分同胚, $\omega_1 \triangleq s^*\omega_0 = t^*\omega_0$ 也是 G_1 上的辛形式. 因

此, G 上的辛形式即是一对 G_0 和 G_1 上的满足一定相容性条件的辛形式. 此时我们称 (G, ω_0) 为一个辛轨形群胚. 类似地, 我们可以定义 (近) 复轨形群胚 (G, J_0) , 其中 J_0 是 G_0 上 G_1 - 不变的 (近) 复结构. 与光滑流形情形一样, 辛轨形群胚 (G, ω_0) 总带有 ω_0 - 驯服的近复结构.

2.2 辛轨形群胚沿着光滑点的加权涨开

假设 (X, ω) 是一个辛轨形 Riemann 面, P_0 是 X 中的一个光滑点, 即它的局部群 G_{P_0} 是平凡群, 那么由通常的 Darboux 定理知, 它的某个邻域 U 的模型为 $(\{1\} \ltimes \mathbb{C}, \omega_{\text{std}})$, 其中辛形式为

$$\omega_{\text{std}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} dz \wedge d\bar{z}.$$

在 U 上取 Hamilton 函数

$$H \triangleq a|z|^2 - \epsilon,$$

其中 $\epsilon > 0$, $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. H 诱导的 U 上的 S^1 - 作用为

$$\lambda \cdot z = \lambda^a z, \quad \lambda \in S^1.$$

利用这个局部的 Hamilton 函数, 我们可以在 X 上用辛切割手术得到 $\bar{X}^\pm$. 我们记 $\hat{X} \triangleq \bar{X}^-$ 为 X 沿着 P_0 的权为 $\mathfrak{a} = (a)$ 的加权涨开, 称除子 $Z = \mathbb{P}^{\mathfrak{a}} = [P_0/\mathbb{Z}_a]$ 为额外除子. 我们将它记为 $E \subset \hat{X}$. 事实上, 仔细观察即知 $\bar{X}^+ \cong \mathbb{P}^{\bar{\mathfrak{a}}} = \mathbb{P}(1, a)$, 是一条复加权射影线.

从拓扑的观点来看, 对 X 的加权涨开即是先移除以 P_0 为中心的一个小圆盘, 再粘上一个 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_a$. 如此我们得到一个态射 $p: \hat{X} \rightarrow X$, 而且 $p: |\hat{X}| \rightarrow |X|$ 为底空间之间的同胚. 具体可参见文献 [18].

2.3 轨形 GW 理论和退化公式

假设 (G, ω) 是一个 n 维紧辛轨形群胚, 带有一个 ω - 驯服的近复结构 J . 它有一个伴随的惯性轨形群胚 ΛG , 其定义如下 (参见文献 [15, 16, 19]). 考虑

$$\mathcal{S}_G \triangleq \{g \in G_1 \mid s(g) = t(g)\}.$$

我们有一个投射 $\pi_0: \mathcal{S}_G \rightarrow G_0$, $g \mapsto s(g) = t(g)$. G 按如下方式作用在 $\mathcal{S}_G$ 上:

$$\mu: G_1 \times_{s, \pi} \mathcal{S}_G \mapsto \mathcal{S}_G, \quad (h, g) \mapsto hgh^{-1}.$$

此作用满足 $\pi(\mu(h, g)) = t(h)$, $\mu(u(x), g) = g$ 和 $\mu(h, \mu(k, g)) = \mu(m(h, k), g)$. 如此我们得到一个群胚 $G \ltimes \mathcal{S}_G = (G_1 \times_{s, \pi} \mathcal{S}_G \rightrightarrows \mathcal{S}_G)$, 其中源映射和目标映射分别为 $s(h, g) = g$ 和 $t(h, g) = \mu(h, g) = hgh^{-1}$, 其他结构映射是显然的. $G \ltimes \mathcal{S}_G$ 为轨形群胚, 即为 G 的惯性轨形群胚 ΛG . 我们有一个自然的态射 $e = (e_0, e_1): \Lambda G \rightarrow G$, 在对象空间上, $e_0(g) = s(g) = t(g)$. ΛG 的粗空间为

$$|\Lambda G| = \{(x, (g))_{G_x} \mid x \in G_0, g \in G_x\}.$$

此空间一般是不连通的. G 有一个相应的骨架群胚 (skeletal groupoid) $C = (C_1 \rightrightarrows C_0)$, 其中 C_i 是 G_i 的连通分支组成的离散集, 结构映射由 G 中结构映射诱导而来. C 作用在 $\mathcal{S}_G$ 的连通分支组成的集

合 $C(\mathcal{S}_G)$ 上. 如上我们得到群胚 $\mathbb{C} \ltimes C(\mathcal{S}_G)$. 我们用 $\mathcal{T}_G$ 来记 $|\mathbb{C} \ltimes C(\mathcal{S}_G)|$ 的连通分支组成的集合, $(g) = ((g)_{G_x}) \in \mathcal{T}_G$ 为包含 $(g) \in \mathcal{S}_G$, $s(g) = x$ 的 $\mathcal{S}_G$ 中分支的象. 如此我们有剖分

$$\Lambda G = \coprod_{(g) \in \mathcal{T}_G} G_{(g)}.$$

当存在 $x \in G_0$ 使得 $(g) = (\text{id}_x)$ 时, 我们有 $G_{(g)} = G$, 称为非扭曲部分, 称余下的 $G_{(g)}$ 为扭曲部分.

任给一个 $g \in \mathcal{S}_G$, 记 $x = s(g) = t(g)$, 则 $g \in G_x$. 局部群 G_x 作用在 $T_x G_0$ 上. G 上的近复结构给出一个表示 $\rho_x: G_x \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$. g 是一个有限阶元素. 因此, $\rho_x(g)$ 为

$$\text{diag}(e^{2\pi i \frac{m_{1,g}}{m_g}}, \dots, e^{2\pi i \frac{m_{n,g}}{m_g}}),$$

其中 $m_g = \text{ord}(g)$, 且 $0 \leq m_{i,g} < m_g$. 这些数只依赖于 g 的共轭类 $(g)_{G_x}$. 我们定义

$$\iota(x, (g)_{G_x}) = \sum_{i=1}^n \frac{m_{i,g}}{m_g},$$

则此数在每个扭曲部分 $G_{(g)}$ 上是常数 (参见文献 [15, 引理 4.6]).

G 的 Chen-Ruan 上同调即定义为

$$H_{CR}^*(G) \triangleq \bigoplus_{(g) \in \mathcal{T}_G} H_{dR}^{*-2\iota(g)}(G_{(g)}).$$

用 $\overline{\mathcal{M}}_{g,m,A}(G)$ 表示从亏格为 g , 带 m 个标记点, 可能带结点的轨形 Riemann 曲面到 G 的稳定的代表下同调类 $A \in H_2(|G|, \mathbb{Z})$ 的 J -全纯映射的模空间. 用 $ev_i: \overline{\mathcal{M}}_{g,m,A}(G) \rightarrow \Lambda G$ 表示在第 i 个标记点 x_i 处的赋值映射. 从 $\Lambda G = \coprod_{(g) \in \mathcal{T}_G} G_{(g)}$, 我们可以将 $\overline{\mathcal{M}}_{g,m,A}(G)$ 剖分成连通分支的并:

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,m,A}(G) = \coprod_{(\mathbf{g})=((g_1), \dots, (g_m)), (g_i) \in \mathcal{T}_G} \overline{\mathcal{M}}_{g,(\mathbf{g}),A}(G),$$

其中 $(\mathbf{g})$ 表示第 i 个标记点被 ev_i 映射到 $G_{(g_i)}$.

Chen 和 Ruan [20] 发现模空间 $\overline{\mathcal{M}}_{g,A,(\mathbf{g})}(G)$ 带有一个虚拟基本类 $[\overline{\mathcal{M}}_{g,A,(\mathbf{g})}(G)]^{\text{vir}}$, 期望维数为

$$\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{g,A,(\mathbf{g})}(G) = c_1(A) + (n-3)(1-g) + m - \iota(\mathbf{g}),$$

其中 $\iota(\mathbf{g}) = \sum_i \iota(g_i)$, 而 $\iota(g_i)$ 是 $G_{(g_i)}$ 的度移数 (参见文献 [15, 16, 19]).

轨形 GW 不变量定义为

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle_{g,A,m,(\mathbf{g})}^G \triangleq \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,(\mathbf{g}),A}(G)]^{\text{vir}}} \prod_i ev_i^*(\alpha_i),$$

其中 $\alpha_i \in H^*(G_{(g_i)})$. 当 $\sum_i \deg \alpha_i \neq 2\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{g,A,(\mathbf{g})}(G)$ 时, 不变量定义为 0. 我们将此不变量简记为 $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle_{g,A}^G$. 带后裔 (descendent) 的轨形 GW 不变量定义为

$$\langle \tau_{d_1} \alpha_1, \dots, \tau_{d_m} \alpha_m \rangle_{g,A}^G \triangleq \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,(\mathbf{g}),A}(G)]^{\text{vir}}} \prod_i c_1(L_i)^{d_i} \wedge \prod_i ev_i^*(\alpha_i),$$

其中 L_i 是第 i 个标记点的余切空间形成的模空间上的线丛.

现在令 (G, Z) 是一个相对的对 (pair), 即 Z 是 G 的辛除子. 我们可以选取 G 上的 ω - 驯服的近复结构 J 使得 Z 成为 (G, J) 的近复子轨形群胚. 模空间 $\overline{\mathcal{M}}_{g,l,A,T_k}(G, Z)$ 表示从亏格为 g , 带 l 个绝对标记点和 k 个相对标记点, 可能带结点的轨形 Riemann 面到 G 的, 代表下同调类 A 且与 Z 有切触重数 $T_k = (\ell_1, \dots, \ell_k)$ 的, 稳定的 J - 全纯映射的等价类的集合, 其中切触重数 ℓ_i 定义如下.

对一个相对标记点 x , 若 $f(x) = y$, 则存在一个 x 附近的轨形坐标卡 $(\tilde{U}, \mathbb{Z}_r, \varphi)$ 和 y 附近的轨形坐标卡 $(\tilde{V}, G_y, \psi)$, 而且 f 可提升为一个光滑映射 $\tilde{f}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$. 相应的分数次切触重数 ℓ_x 即定义为 d/r , 其中 d 是 $\tilde{f}$ 的切触重数, r 为 x 的局部群的阶数.

我们同样有在绝对标记点 x_i ($i = 1, \dots, l$) 的赋值映射 $ev_i: \overline{\mathcal{M}}_{g,l,A,T_k}(G, Z) \rightarrow \Lambda G$ 和在相对标记点 y_j ($1 \leq j \leq k$) 的赋值映射 $ev_j^r: \overline{\mathcal{M}}_{g,l,A,T_k}(G, Z) \rightarrow \Lambda Z$. 我们也有剖分

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,l,A,T_k}(G, Z) = \coprod_{(g),(h)} \overline{\mathcal{M}}_{g,A,(g),(h),T_k}(G, Z),$$

其中 $(g) = \{(g_1), \dots, (g_l)\}$, $(h) = \{(h_1), \dots, (h_k)\}$, $(g_i) \in \mathcal{T}_G$, $(h_j) \in \mathcal{T}_Z$.

Chen 等^[7] 证明了模空间 $\overline{\mathcal{M}}_{g,A,(g),(h),T_k}(G, Z)$ 有虚拟基本类 $[\overline{\mathcal{M}}_{g,A,(g),(h),T_k}(G, Z)]^{\text{vir}}$, 期望维数为

$$\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{g,A,(g),(h),T_k}(G, Z) = c_1(A) + (\dim_{\mathbb{C}} G - 3)(1 - g) + l + k - \iota_{(g)}^G - \iota_{(h)}^G - \sum_{i=1}^k [\ell_i],$$

其中 $[\ell_i]$ 表示不大于 ℓ_i 的最大的整数.

相对轨形 GW 不变量定义为

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_l \mid \beta_1, \dots, \beta_k \rangle_{g,A,(g),(h),T_k}^{G,Z} \triangleq \frac{1}{|\text{Aut}(\mathcal{T}_k)|} \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,A,(g),(h),T_k}]^{\text{vir}}} \prod_{i=1}^l ev_i^*(\alpha_i) \wedge \prod_{j=1}^k ev_j^{r,*}(\beta_j),$$

其中 $\alpha_i \in H^*(G_{(g_i)})$, $\beta_j \in H^*(Z_{(h_j)})$, 且当 $T_k = (\ell_1, \dots, \ell_k)$ 时, $\mathcal{T}_k = \{(\ell_1, (h_1), \beta_1), \dots, (\ell_k, (h_k), \beta_k)\}$, $\text{Aut}(\mathcal{T}_k)$ 是 $\mathcal{T}_k$ 自同构群. 我们将此不变量简记为 $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_l \mid \beta_1, \dots, \beta_k \rangle_{g,A,T_k}^{G,Z}$. 当 $\sum_i \deg \alpha_i + \sum_j \deg \beta_j \neq 2\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{g,A,(g),(h),T_k}$ 时, 此不变量定义为 0. 带后裔的相对轨形 GW 不变量为

$$\langle \tau_{d_1} \alpha_1, \dots, \tau_{d_l} \alpha_l \mid \beta_1, \dots, \beta_k \rangle_{g,A,T_k}^{G,Z} \triangleq \frac{1}{|\text{Aut}(\mathcal{T}_k)|} \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,A,T_k}]^{\text{vir}}} \prod_{i=1}^l c_1(L_i)^{d_i} \wedge \prod_{i=1}^l ev_i^*(\alpha_i) \wedge \prod_{j=1}^k ev_j^{r,*}(\beta_j),$$

其中 L_i 是第 i 个绝对标记点的余切空间形成的模空间上的线丛.

Chen 等^[7] 将 Li 和 Ruan^[5] 的退化公式推广到了轨形情形. 对于代数的堆栈 (stacks), Abramovich 和 Fantechi^[8] 也得到了类似的公式. 在对 (G, ω) 作了辛切割手术后, 我们得到一个投射 $\pi: G \rightarrow \bar{G}^+ \wedge_Z \bar{G}^-$. π 诱导同态 $\pi_*: H_2(|G|, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(|\bar{G}^+ \wedge_Z \bar{G}^-|, \mathbb{Z})$. 这个同态一般都不是单射. $\ker \pi_*$ 中的元称为消失的类 (vanishing cycles) (参见文献 [5, 7]). 令 $[A] \triangleq A + \ker \pi_*$. 定义

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle_{g,[A]}^G = \sum_{B \in [A]} \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle_{g,B}^G.$$

由 Gromov 紧性定理知, 这个求和式是有限求和.

当 G 退化成 $\bar{G}^+ \wedge_Z \bar{G}^-$ 时, 模空间 $\overline{\mathcal{M}}_{g,(g),[A]}(G)$ 也退化成 $\overline{\mathcal{M}}_{g,(g),\pi_*[A]}(\bar{G}^+ \wedge_Z \bar{G}^-)$. 它由一些分支组成, 每个分支对应 $u^\pm: \mathbb{C}^\pm \rightarrow \bar{G}^\pm$ 的一种拓扑型 Γ . 利用虚拟邻域技巧^[21], Chen 等^[7] 对每个分支 $\overline{\mathcal{M}}_\Gamma$ 定义了轨形 GW 不变量 $\langle \dots \rangle_\Gamma$, 并证明了

$$\langle \dots \rangle_{g,[A]}^G = \sum_{\Gamma} \langle \dots \rangle_\Gamma.$$

而退化公式即是用于计算 $\langle \cdots \rangle_\Gamma$. 每个 $\overline{\mathcal{M}}_\Gamma$ 包含一对 $(G^\pm, Z)$ 的相对模空间 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^\pm}$, 而 $\Gamma^\pm$ 一起决定了此分支的拓扑型 Γ .

为简单起见, 我们假设 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^\pm}$ 中的曲线都只有一个连通分支. 假设它们对应的拓扑型为

$$\Gamma = (\Gamma^+, \Gamma^-) = \{A^+, g^+, m^+, (g^+), (h^+), T_k^+; A^-, g^-, m^-, (g^-), (h^-), T_k^-\}, \quad (2.1)$$

则它们满足

$$(1) A^+ + A^- = \pi_*([A]), g = g^+ + g^- + k - 1, (g^+) \cup (g^-) = (g), m^+ + m^- = m;$$

$$(2) (h^+) = ((h^-)^{-1}), T_k^+ = T_k^- = (\ell_1, \dots, \ell_k).$$

我们有如下的退化公式.

定理 2.1 ^[7,8] 假设 $\alpha_i^\pm \in H^*(\Lambda \bar{G}^\pm)$ 且 $\alpha_i^+|_Z = \alpha_i^-|_Z$, 定义了类 $(\alpha_i^+, \alpha_i^-) \in H^*(\Lambda(\bar{G}^+ \wedge_Z \bar{G}^-))$. 令 $\alpha_i = \pi^*(\alpha_i^+, \alpha_i^-) \in H^*(\Lambda G)$, $i = 1, 2, \dots, m$, 那么对于 (2.1) 中的 Γ , 有

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle_\Gamma = \sum_I C(\Gamma, I) \langle \alpha_{i_1}^+, \dots, \alpha_{i_{m^+}}^+ | \beta^I \rangle_{g^+, A^+, T_k^+}^{\bar{G}^+, Z} \cdot \langle \alpha_{j_1}^-, \dots, \alpha_{j_{m^-}}^- | \beta_I \rangle_{g^-, A^-, T_k^-}^{\bar{G}^-, Z},$$

其中 $\{i_1, \dots, i_{m^+}\} \cup \{j_1, \dots, j_{m^-}\} = \{1, \dots, m\}$, β^I 跑遍所有 $(\beta_1, \dots, \beta_k)$, β_i 是 $H^*(Z_{(h_i)})$ 的基, 而 β_I 是 β^I 的对偶. 另外, $C(\Gamma, I) \triangleq |\text{Aut}(\mathcal{T}(\Gamma, \beta^I))| \cdot \prod_{j=1}^k \ell_j$, 其中 $\mathcal{T}(\Gamma, \beta^I) = \{(\ell_1, (h_1), \beta_1), \dots, (\ell_k, (h_k), \beta_k)\}$.

注 2.2 ^[5] 当我们用辛涨开手术来退化 G 时, 不存在消失的类.

注 2.3 固定一个拓扑型 Γ , 如 (2.1). 用 $\overline{\mathcal{M}}_\Gamma$ 记 $\overline{\mathcal{M}}_{g, (g), \pi_*([A])}(\bar{G}^+ \wedge_Z \bar{G}^-)$ 的对应于 Γ 的分支, 用 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^\pm}$ 记相应的 $G^\pm$ 的相对模空间, 那么我们有

$$\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_\Gamma = \text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+} + \text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-} - \dim_{\mathbb{C}} \prod Z_{(h_j)},$$

即

$$\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+} + \text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-} = k(n-1) - \iota_{(h)}^Z - \iota_{(h^{-1})}^Z + c_1(A) + (n-3)(1-g) + m - \iota_{(g)}^G. \quad (2.2)$$

3 主要结果的证明

我们先回忆文献 [14] 中如下的结果.

命题 3.1 模空间 $\overline{\mathcal{M}}_{(g, (g), A, (h), T_k)}(G, Z)$ 非空当且仅当对每个相对标记点

$$d_i \equiv r_i(\iota_{h_i}^G - \iota_{h_i}^Z) \pmod{r_i},$$

其中 d_i 是切触重数, r_i 是第 i 个相对标记点的局部群的阶数, 而且

$$\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{(g, (g), A, (h), T_k)}(G, Z) = c_1(A) + (n-3)(1-g) + m + k - \iota_{(g)}^G - \iota_{(h)}^Z - \sum_{j=1}^k \ell_j. \quad (3.1)$$

我们将主要结果的证明拆分成几个相对不变量和绝对不变量之间的比较结果.

3.1 定理 1.1 的证明

引理 3.2 在定理 1.1 的假设下, 我们有

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle_{g, A}^X = \frac{1}{a^{I_A}} \cdot \langle p^* \alpha_1, \dots, p^* \alpha_m | \underbrace{\mathbb{1}_{E_{(-\frac{1}{a})}}, \dots, \mathbb{1}_{E_{(-\frac{1}{a})}}}_{I_A} \rangle_{g, p^!(A), (\frac{1}{a}, \dots, \frac{1}{a})}^{\widehat{X}, E}, \quad (3.2)$$

其中 $I_A = A \cdot [P_0]$.

证明 我们将 X 沿着光滑点 P_0 以权 $a = (a)$ 作辛涨开. 如此将 X 退化成 $(\bar{X}^+, Z) = (\mathbb{P}(1, a), P_1)$ 和 $(X^-, Z) = (\hat{X}, E)$. 在 $\mathbb{P}(1, a)$ 的齐次坐标 $[z_0, z_1]$ 下, $P_1 = [1, 0]$. 它的局部群为 $\mathbb{Z}_a$.

下面用退化公式来计算 (3.2) 的左边. 注意到此时没有消失的类 (参考注 2.2). 模空间退化成一些连通分支 $\coprod \overline{\mathcal{M}}_\Gamma$. 任取一个分支 $\Gamma = (\Gamma^+, \Gamma^-)$. 假设 $\Gamma^\pm$ 各自的同调类为 $A^\pm$. 在 2 维的情形, 我们有 $A^- = p_*^{-1}(A)$. 将之记为 $p^!(A)$. 注意到我们是沿着光滑点作涨开, 而且 $|\bar{X}^+| = \mathbb{P}^1$, 因此要从 A^- 和 A^+ 粘合成 A , 必有 $A^+ = (A \cdot [P_0])e = I_A e$.

假设分支 $\overline{\mathcal{M}}_\Gamma$ 中的映射 $u^\pm : C^\pm \rightarrow \bar{X}^\pm$ 由一些连通分支 $u_i^\pm : C_i^\pm \rightarrow \bar{X}^\pm$ ($i = 1, \dots, l^\pm$) 组成. 假设 $C_i^\pm$ 的亏格为 $g_i^\pm$, 记 $g^\pm = \sum_i g_i^\pm$. 假设 $C^\pm$ 有 $m^\pm$ 个绝对标记点和 $k^\pm = k$ 个相对标记点. 假设 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+}$ 中相对标记点被映射到 $Z_{(h_j)}$ 且带分数切触重数 ℓ_j . 记 $(h) = ((h_1), \dots, (h_k))$. 由 (3.1) 知, Γ^+ 对应模空间的分支的期望维数为

$$\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+} = \sum_{i=1}^{l^+} c_1^{\bar{X}^+}([u_i^+]) - 2(l^+ - g^+) + m^+ + k - \iota_{(g^+)}^{\bar{X}^+} - \iota_{(h)}^Z - \sum_{j=1}^k \ell_j.$$

因为 $\bar{X}^+ = \mathbb{P}(1, a)$, 所以,

$$\sum_{i=1}^{l^+} c_1^{\bar{X}^+}([u_i^+]) = (a+1) \sum \ell_j.$$

又因为 $\dim Z = 0$, 因此,

$$\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+} = a \sum \ell_j - 2(l^+ - g^+) + m^+ + k - \iota_{(g^+)}^{\bar{X}^+}. \quad (3.3)$$

假设 α_i 中前 b 项满足 $\deg_{CR} \alpha_i = \deg \alpha_i + 2\iota(\alpha_i) > 0$, 后面 $m - b = c$ 项均为 $H^0(X)$ 中元素. 由于轨形 GW- 不变量是线性的, 我们可以假设 $\alpha_i = 1_X$, $b < i \leq m$. 由于 P_0 是一个 X 的光滑点, 我们可以假设 α_i ($1 \leq i \leq b$) 支撑于 P_0 的一个邻域之外. 因此, 我们取 $\alpha_i^+ = 0$, $\alpha_i^- = p^* \alpha_i$, $i = 1, \dots, b$. 对余下的 $\alpha_i = 1_X$, $b < i \leq m$, 我们有 $\alpha_i^- = 1_{\hat{X}}$, $\alpha_i^+ = 1_{\bar{X}^+}$. 因而当有 α_i ($1 \leq i \leq b$) 中元分配到 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+}$ 时, 对于任意给定的 $\beta_j \in H_{CR}^*(Z)$, 我们都有

$$\langle \alpha_i^+ | \beta^I \rangle_{0, A^+, T_k^+}^{\bar{X}^+, Z} = 0.$$

这表明 $\langle \dots \rangle_\Gamma = 0$ 除了 α_i ($1 \leq i \leq b$) 全分配到 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-}$ 的情形. 因此, 下面假设所有 α_i ($1 \leq i \leq b$) 都分配到了 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-}$. 假设有 d ($0 \leq d \leq c$) 个 1_X 分配到了 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-}$, 余下的都分配到 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+}$, 则 $m^+ = c - d$, $\iota_{(g^+)}^{\bar{X}^+} = 0$. 由 (2.2) 和 (3.3) 可得

$$\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-} = c_1^X(A) - 2(1 - g - l^+ + g^+) + b + d - k - \iota_{(g)}^X - a \sum \ell_j.$$

另一方面, 如果

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \deg \alpha_i \neq \text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{g, A, (g)}(X) = c_1^X(A) - 2(1 - g) + m - \iota_{(g)}^X,$$

那么, 由轨形 GW 不变量的定义, 我们有

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle_{g, A}^X = \langle p^* \alpha_1, \dots, p^* \alpha_m | \underbrace{1_{E_{(-\frac{1}{a})}}, \dots, 1_{E_{(-\frac{1}{a})}}}_{I_A} \rangle_{g, A, (\frac{1}{a}, \dots, \frac{1}{a})}^{\hat{X}, E} = 0.$$

如此此引理自动成立. 因此, 下面还假设

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \deg \alpha_i = c_1^X(A) - 2(1-g) + m - \iota_{(\mathbf{g})}^X.$$

所以,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \deg \alpha_i - \mathrm{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-} = a \sum \ell_j - 2(l^+ - g^+) + k + c - d.$$

假设 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+}$ 中第 j 个相对标记点被映射到了 $(P_1, (\xi^{l_j}))$, 其中 $\xi = e^{\frac{2\pi i}{a}}$ 是 $\mathbb{Z}_a$ 的生成元, 那么 $\ell_j = q_j + \frac{l_j}{a}$, $q_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 因此,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \deg \alpha_i - \mathrm{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-} = \sum_{j=1}^k (aq_j + l_j) + k - 2l^+ + 2g^+ + c - d.$$

注意到 $a > 1$, 且 ℓ_j 为分式切触重数, 因此,

$$q_j \geq \begin{cases} 0, & \text{如果 } 1 \leq l_j < a, \\ 1, & \text{如果 } l_j = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

所以, $aq_j + l_j = a\ell_j \geq 1$, $\forall 1 \leq j \leq k$. 如此, 我们有

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \deg \alpha_i - \mathrm{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-} \geq 2(k - l^+) + 2g^+ + c - d \geq c - d \geq 0.$$

当 $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \deg \alpha_i - \mathrm{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-} > 0$ 时, 由相对轨形 GW 不变量的定义知此分支的不变量为 0. 因此具有非零贡献的分支一定满足 $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \deg \alpha_i - \mathrm{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-} = 0$. 这等价于

$$c = d, \quad l^+ = k, \quad g^+ = 0, \quad \text{且} \quad aq_j + l_j = 1, \quad \forall 1 \leq j \leq k.$$

由 (3.4) 知, 这等价于

$$c = d, \quad l^+ = k, \quad g^+ = 0, \quad \text{且} \quad l_j = 1, \quad \forall 1 \leq j \leq k. \quad (3.5)$$

因此, C^+ 有 k 个连通分支, 每一个分支不含有绝对标记点, 含有一个相对标记点映射到 $(P_1, (\xi^{\frac{1}{a}})) \in Z_{(\frac{1}{a})}$, 切触重数均为 $\ell_j = \frac{1}{a}$. 因为 $A^+ = I_A e$, 所以 $k = I_A$.

因为此时有 $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \deg \alpha_i - \mathrm{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-} = 0$, 所以, $(\bar{X}, E)$ 的相对输入 (insertion) 为 I_A 个 $\mathbb{1}_{E_{(-\frac{1}{a})}}$, $(\bar{X}^+, Z)$ 的相对输入为 I_A 个 $\mathbb{1}_{Z_{(\frac{1}{a})}}$. 最后, 由定理 2.1, 我们得到

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle_{g,A}^X = \frac{1}{a^{I_A}} \cdot \langle p^* \alpha_1, \dots, p^* \alpha_m \mid \underbrace{\mathbb{1}_{E_{(-\frac{1}{a})}}, \dots, \mathbb{1}_{E_{(-\frac{1}{a})}}}_{I_A} \rangle_{g, p^!(A), (\frac{1}{a}, \dots, \frac{1}{a})}^{\bar{X}, E} \cdot (\langle \emptyset \mid \mathbb{1}_{Z_{(\frac{1}{a})}} \rangle_{0, e, (\frac{1}{a})}^{\bar{X}^+, Z})^{I_A}.$$

注意到 $(\bar{X}^+, Z) = (\mathbb{P}(1, a), P_1 = [1, 0])$. 利用虚拟局部化技巧, 我们有

$$\langle \emptyset \mid \mathbb{1}_{Z_{(\frac{1}{a})}} \rangle_{0, e, (\frac{1}{a})}^{\bar{X}^+, Z} = 1.$$

引理证毕. □

引理 3.3 在定理 1.1 的假设下, 我们有

$$\begin{aligned} & \langle p^* \alpha_1, \dots, p^* \alpha_m, \underbrace{\mathbb{1}_{\widehat{X}_{(-\frac{1}{a})}}, \dots, \mathbb{1}_{\widehat{X}_{(-\frac{1}{a})}}}_{I_A} \rangle_{g, p^!(A)}^{\widehat{X}} \\ &= \frac{1}{a I_A} \cdot \langle p^* \alpha_1, \dots, p^* \alpha_m \mid \underbrace{\mathbb{1}_{E_{(-\frac{1}{a})}}, \dots, \mathbb{1}_{E_{(-\frac{1}{a})}}}_{I_A} \rangle_{g, p^!(A), (\frac{1}{a}, \dots, \frac{1}{a})}^{\widehat{X}, E}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

证明 我们将 $\widehat{X}$ 沿着除子 E 以平凡权 (即 $a = (1)$) 作涨开, 将 $\widehat{X}$ 退化成 $(\widehat{X}^+, Z) = (\mathbb{P}^1/\mathbb{Z}_a, P_1/\mathbb{Z}_a)$ 和 $(\widehat{X}^-, Z) = (\widehat{X}, E)$, 其中 $\mathbb{Z}_a$ 在 $\mathbb{P}^1$ 作用为 $\xi \cdot [z_0, z_1] = [\xi z_0, z_1]$, 且 $P_1 = [0, 1]$, 而 $\widehat{X}$ 中的 E 变成了 $\widehat{X}^+$ 中的 $[1, 0]/\mathbb{Z}_a$.

下面利用退化公式来计算每个分支的贡献. 任取一个分支 $\overline{\mathcal{M}}_\Gamma$, 若

$$\begin{aligned} \Gamma^+ &= \{p^!(A)^+, g^+, m^+, (g^+), \{\ell_1, \dots, \ell_k\}, (h^+)\}, \\ \Gamma^- &= \{p^!(A)^-, g^-, m^-, (g^-), \{\ell_1, \dots, \ell_k\}, (h^-)\}, \end{aligned}$$

$(h^+) = ((h^-)^{-1}) = (h)$, $g = g^+ + g^-$, 则必有 $p^!(A)^- = p^!(A)$, $p^!(A)^+ = I_A e$, 其中 $e \in H_2(|\widehat{X}^+|; \mathbb{Z}) = H_2(\mathbb{P}^1; \mathbb{Z})$ 为生成元. 假设 $u^\pm: C^\pm \rightarrow \widehat{X}^\pm$ 有 $l^\pm$ 个连通分支 $u_i^\pm: C_i^\pm \rightarrow \widehat{X}^\pm$, $i = 1, \dots, l^\pm$, 那么有

$$\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+} = \sum c_1^{\widehat{X}^+}([u_i^+]) - 2(l^+ - g^+) + m^+ + k - \iota_{(g^+)}^{\widehat{X}^+} - \iota_{(h)}^Z - \sum \ell_j.$$

如上我们假设 α_i 中前 b 项满足 $\deg_{CR} \alpha_i = \deg \alpha_i + 2\iota(\alpha_i) > 0$, 后面 $m - b = c$ 项均为 $\mathbb{1}_X$, $b < i \leq m$. 因此, $p^* \alpha_i$ ($1 \leq i \leq b$) 支撑于一个 E 的小邻域之外. 因而对 $1 \leq i \leq b$, 我们取 $(p^* \alpha_i)^+ = 0$, $(p^* \alpha_i)^- = p^* \alpha_i$. 对 $p^* \mathbb{1}_X = \mathbb{1}_{\widehat{X}}$, 我们有 $\mathbb{1}_{\widehat{X}}^- = \mathbb{1}_{\widehat{X}}$, $\mathbb{1}_{\widehat{X}}^+ = \mathbb{1}_{\widehat{X}^+}$. 最后, 由于 $\widehat{X}_{(-\frac{1}{a})} = E_{(-\frac{1}{a})}$, 因此, 我们取

$$\mathbb{1}_{\widehat{X}_{(-\frac{1}{a})}}^+ = \mathbb{1}_{E_{(-\frac{1}{a})}}, \quad \mathbb{1}_{\widehat{X}_{(-\frac{1}{a})}}^- = 0.$$

因此, 我们只需考虑所有 α_i ($1 \leq i \leq b$) 都分配到 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-}$, 所有 $\mathbb{1}_{\widehat{X}_{(-\frac{1}{a})}}$ 都分配到 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+}$ 的情形. 再假设我们有 d ($0 \leq d \leq c$) 个 $\mathbb{1}_{\widehat{X}}$ 分配到 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-}$ 上. 因此, $m^+ = I_A + c - d$, $m^- = b + d$. 由 $\dim Z = 0$ 和引理 3.1 可得

$$\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+} = \sum c_1^{\widehat{X}^+}([u_i^+]) - 2(l^+ - g^+) + (c - d) + k + I_A(1 - \iota^{\widehat{X}^+}(\mathbb{1}_{E_{(-\frac{1}{a})}})) - \sum \ell_j.$$

分别记 E 和 Z 在 $\widehat{X}^+$ 中的 Poincaré 对偶为 η_E 和 η_Z , 那么 $\eta_Z = \eta_E$, $c_1(\widehat{X}^+) = 2\eta_Z = 2\eta_E$. 因此,

$$\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+} = 2 \sum \ell_j - 2(l^+ - g^+) + (c - d) + k + I_A(1 - \iota^{\widehat{X}^+}(\mathbb{1}_{E_{(-\frac{1}{a})}})) - \sum \ell_j.$$

$E = [[1, 0]/\mathbb{Z}_a]$ 在 $\widehat{X}^+$ 中局部坐标为 (z_1) , 局部群 $\mathbb{Z}_a$ 作用为

$$e^{2\pi i \frac{1}{a}} \cdot (z_1) = (e^{2\pi i \frac{-1}{a}} z_1).$$

因此, $\iota^{\widehat{X}^+}(\mathbb{1}_{E_{(-\frac{1}{a})}}) = \frac{1}{a}$. 所以,

$$\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+} = \sum \ell_j - 2(l^+ - g^+) + (c - d) + k + \frac{a-1}{a} I_A.$$

再由 (2.2) 和 $\dim Z = 0$, 可得到

$$\begin{aligned} \mathrm{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-} &= c_1^{\widehat{X}}(p^!(A)) - 2(1 + g^+ - g - l^+) + m - \iota_{(\mathbf{g})}^{\widehat{X}} + I_A(1 - \iota_{\widehat{X}(\frac{-1}{a})}^{\widehat{X}})) \\ &\quad - \sum \ell_j - k - (c - d) - \frac{a-1}{a} I_A \\ &= c_1^{\widehat{X}}(p^!(A)) - 2(1 + g^+ - g - l^+) + b + d - \iota_{(\mathbf{g})}^{\widehat{X}} - \sum \ell_j - k. \end{aligned}$$

另一方面, 由轨形 GW 不变量的定义, 我们可以假设

$$\frac{1}{2} \sum \deg p^* \alpha_i = c_1^{\widehat{X}}(p^!(A)) - 2(1 - g) + m + I_A(1 - \iota_{\widehat{X}(\frac{-1}{a})}^{\widehat{X}})) - \iota_{(\mathbf{g})}^{\widehat{X}}.$$

假设 $(h_j) = (P_1, (\xi_{\frac{l_j}{a}}))$, 即 $Z_{(h_j)} = Z_{(\frac{l_j}{a})}$, 则 $\ell_j = q_j + \frac{l_j}{a}$, $q_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $1 \leq j \leq k$. 那么我们有

$$\frac{1}{2} \sum_i \deg p^* \alpha_i - \mathrm{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-} = \sum_j \ell_j + k + (c - d) - 2(l^+ - g^+) + \frac{a-1}{a} I_A.$$

因为 $P^!(A)^+ \cdot Z = \frac{I_A}{a}$, 而每个相对标记点的切触重数 ℓ_j 至少是 $\frac{1}{a}$, 因此 $k \leq I_A$. 此时我们仍有 (3.4). 所以, 对于这些模空间分支, 我们总有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \deg p^* \alpha_i - \mathrm{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-} &\geq \sum_j \ell_j + (c - d) + k - 2(l^+ - g^+) + \frac{a-1}{a} k \\ &= \sum_j \left(q_j + \frac{a+l_j-1}{a} \right) + (c - d) + k - 2(l^+ - g^+) \\ &\geq \sum_j 1 + (c - d) + k - 2l^+ + 2g^+ \\ &\geq 2(k - l^+) + 2g^+ + (c - d) \geq c - d \geq 0. \end{aligned}$$

因此, 具有非零贡献的分支必须满足

$$c = d, \quad l^+ = k = I_A, \quad g^+ = 0, \quad \text{且} \quad q_j + \frac{a+l_j-1}{a} = 1, \quad \forall 1 \leq j \leq k.$$

因为 $a > 1$, 这等价于

$$c = d, \quad l^+ = k = I_A, \quad g^+ = 0, \quad \text{且} \quad q_j = 0, \quad l_j = 1, \quad \forall 1 \leq j \leq k.$$

因此, C^+ 由 I_A 个连通分支组成, 每一个分支上有一个绝对标记点和一个相对标记点, 被映射到 $Z_{(\frac{1}{a})}$ 并带有切触重数 $\frac{1}{a}$. 由定理 2.1 即得到

$$\begin{aligned} &\langle p^* \alpha_1, \dots, p^* \alpha_m, \underbrace{\mathbb{1}_{\widehat{X}(\frac{-1}{a})}, \dots, \mathbb{1}_{\widehat{X}(\frac{-1}{a})}}_{I_A} \rangle_{g, p^! A}^{\widehat{X}} \\ &= \frac{1}{a^{I_A}} \cdot \langle p^* \alpha_1, \dots, p^* \alpha_m \mid \underbrace{\mathbb{1}_{E(\frac{-1}{a})}, \dots, \mathbb{1}_{E(\frac{-1}{a})}}_{I_A} \rangle_{g, p^! A, (\frac{1}{a}, \dots, \frac{1}{a})}^{\widehat{X}, E} \cdot (\langle \mathbb{1}_{E(\frac{-1}{a})} \mid \mathbb{1}_{Z(\frac{1}{a})} \rangle_{0, e, (\frac{1}{a})}^{\widehat{X}^+, Z})^{I_A}. \end{aligned}$$

再由虚拟局部化, 我们有 $\langle \mathbb{1}_{E(\frac{-1}{a})} \mid \mathbb{1}_{Z(\frac{1}{a})} \rangle_{0, e, (\frac{1}{a})}^{\widehat{X}^+, Z} = 1$. 引理证毕. $\square$

定理 1.1 的证明 综合引理 3.2 和 3.3, 注意到 $p^!(A) = A$, 我们得到 (1.2). 证毕. $\square$

推论 1.6 的证明 如果 (X, ω) 是辛一致规则的, 那么, 它有如下的非零轨形 GW 不变量:

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, [pt]_X \rangle_{0,A}^X \neq 0,$$

其中 $A \neq 0$. 由定理 1.1 知, $(\widehat{X}, \widehat{\omega})$ 有非零的轨形 GW 不变量

$$\langle p^* \alpha_1, \dots, p^* \alpha_m, p^* [pt]_X, \underbrace{\mathbb{1}_{\widehat{X}_{(\frac{-1}{a})}}, \dots, \mathbb{1}_{\widehat{X}_{(\frac{-1}{a})}}}_{I_A} \rangle_{0, p^!(A)}^X \neq 0.$$

然而, $p^*[pt]_X = [pt]_{\widehat{X}}$, 且 $p^!(A) \neq 0$. 因此, $(\widehat{X}, \widehat{\omega})$ 是辛一致规则的. 证毕. $\square$

3.2 定理 1.2 的证明

引理 3.4 在定理 1.2 的假设下, 我们有下面的等式:

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, [pt] \rangle_{g,A}^X = \frac{I_A}{a^{I_A}} \cdot \langle p^* \alpha_1, \dots, p^* \alpha_m \mid \underbrace{\mathbb{1}_{E_{(\frac{-1}{a})}}, \dots, \mathbb{1}_{E_{(\frac{-1}{a})}}}_{I_A} \rangle_{g, p^!(A), (\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a})}^{\widehat{X}, E}. \quad (3.7)$$

证明 与引理 3.2 的证明一样, 我们将 X 沿着光滑点 P_0 以权 $\mathbf{a} = (a)$ 作涨开把 X 退化成 $(\bar{X}^+, Z) = (\mathbb{P}(1, a), P_1 = [1, 0])$ 和 $(\bar{X}^-, Z) = (\widehat{X}, E)$. 下面用退化公式来计算 (3.7) 的左边.

与前面引理的证明一样, 任取一个分支 $\Gamma = (\Gamma^+, \Gamma^-)$. 那么必有 $A^- = p^!(A)$, $A^+ = I_A e$. 假设该分支中的映射 $u^\pm : C^\pm \rightarrow \bar{X}^\pm$ 由一些连分支 $u_i^\pm : C_i^\pm \rightarrow \bar{X}^\pm$ ($i = 1, \dots, l^\pm$) 组成. 假设 $C_i^\pm$ 的亏格为 $g_i^\pm$, 记 $g^\pm = \sum_i g_i^\pm$. 假设 $C^\pm$ 有 $m^\pm$ 个绝对标记点和 $k^\pm = k$ 个相对标记点. 假设 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+}$ 中相对标识点映射到 $Z_{(h_j)}$ 且带分数切触重数 ℓ_j . 记 $(\mathbf{h}) = ((h_1), \dots, (h_k))$. 类似于引理 3.2 的证明可知, Γ^+ 对应模空间的分支的期望维数为

$$\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+} = a \sum \ell_j - 2(l^+ - g^+) + m^+ + k - \iota_{(\mathbf{g}^+)}^{\bar{X}^+}.$$

与引理 3.2 的证明一样, 我们假设 α_i 中前 b 项满足 $\deg_{CR} \alpha_i = \deg \alpha_i + 2\iota(\alpha_i) > 0$, 后面 $m - b = c$ 项均为 $\mathbb{1}_X$, $b < i \leq m$. 同样地, 我们取 $\alpha_i^+ = 0$, $\alpha_i^- = p^* \alpha_i$, $i = 1, \dots, b$, $\alpha_i^- = \mathbb{1}_{\widehat{X}}$, $\alpha_i^+ = \mathbb{1}_{\bar{X}^+}$, $b < i \leq m$, 再取 $[pt]^- = 0$ 和 $[pt]^+ = [pt]_{\mathbb{P}^1}$, 则我们只需考虑所有 α_i ($1 \leq i \leq b$) 都分配到 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-}$, $[pt]$ 分配到 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+}$ 的情形. 再假设有 d 个 $\mathbb{1}_X$ 分配到 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+}$, 那么 $m^+ = c - d + 1$, $\iota_{(\mathbf{g}^+)}^{\bar{X}^+} = 0$. 因此,

$$\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^+} = a \sum \ell_j - 2(l^+ - g^+) + c - d + 1 + k.$$

所以, 由 (2.2)、(3.3) 和 $\dim Z = 0$, 我们有

$$\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-} = c_1^X(A) - 2(1 - g - l^+ + g^+) + b + d - k - \iota_{(\mathbf{g})}^X - a \sum \ell_j.$$

另一方面, 由轨形 GW 不变量的定义, 我们还可以假设

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \deg \alpha_i + 1 = \text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{g, A, (\mathbf{g})}(X) = c_1^X(A) - 2(1 - g) + m + 1 - \iota_{(\mathbf{g})}^X,$$

如此我们有

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \deg \alpha_i - \text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma^-} = a \sum \ell_j - 2(l^+ - g^+) + k + c - d.$$

按照引理 3.2 的证明即知, 具有非零贡献的分支一定满足: $\mathbb{C}^+$ 有 k 个连通分支, 每个连通分支含有唯一一个相对标记点, 被映射到 $(P_1, (e^{2\pi i \frac{1}{a}})) \in \mathbb{Z}_{(\frac{1}{a})}$; 而且每个分支代表的下同调类为 $e \in H_2(|\mathbb{P}^a|; \mathbb{Z}) = H_2(\mathbb{P}^1; \mathbb{Z})$. 因此 $A^+ = ke$. 所以 $k = I_A$. 同时, $\mathbb{C}^+$ 含有唯一的一个绝对标记点, 它可以分布在 $\mathbb{C}^+$ 的 I_A 个分支中任何一个, 因此, 它的位置给出了 I_A 个不同的具有非零贡献的模空间分支. 这个绝对标记点的输入是 $[pt]^+$. 最后由定理 2.1 可得

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, [pt] \rangle_{g,A}^{\mathbf{x}} &= \frac{I_A}{a^{I_A}} \cdot \langle p^* \alpha_1, \dots, p^* \alpha_m \mid \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{E}_{(\frac{-1}{a_1})}}, \dots, \mathbb{1}_{\mathbb{E}_{(\frac{-1}{a_1})}}}_{I_A} \rangle_{g, p^!(A), (\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a})}^{\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{E}} \\ &\quad \times \langle [pt] \mid \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_{(\frac{1}{a})}} \rangle_{0, e, (\frac{1}{a})}^{\bar{\mathbf{x}}^+, \mathbf{Z}} \cdot (\langle \emptyset \mid \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_{(\frac{1}{a})}} \rangle_{0, e, (\frac{1}{a})}^{\bar{\mathbf{x}}^+, \mathbf{Z}})^{I_A - 1}. \end{aligned}$$

注意到 $(\bar{\mathbf{x}}^+, \mathbf{Z}) = (\mathbb{P}(1, a), P_1 = [1, 0])$. 利用虚拟局部化技巧, 我们有

$$\langle [pt] \mid \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_{(\frac{1}{a})}} \rangle_{0, e, (\frac{1}{a})}^{\bar{\mathbf{x}}^+, \mathbf{Z}} = \langle \emptyset \mid \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_{(\frac{1}{a})}} \rangle_{0, e, (\frac{1}{a})}^{\bar{\mathbf{x}}^+, \mathbf{Z}} = 1.$$

引理证毕. □

定理 1.2 的证明 综合引理 3.3 和 3.4, 注意到 $p^!(A) = A$, 我们即得到 (1.3). 证毕. □

致谢 作者感谢导师李安民院士和陈柏辉教授长期以来的指导与鼓励, 也感谢审稿人给出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Graber T, Pandharipande R. Localization of virtual classes. *Invent Math*, 1999, 135: 487–518
- 2 Chen B, Tian G. Virtual manifolds and localization. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2010, 26: 1–24
- 3 Chen B, Li A M. Symplectic virtual localization of Gromov-Witten invariants. *ArXiv:math/0610370*, 2006
- 4 Graber T, Vakil R. Relative virtual localization and vanishing of tautological classes on moduli spaces of curves. *Duke Math J*, 2005, 130: 1–37
- 5 Li A M, Ruan Y. Symplectic surgery and Gromov-Witten invariants of Calabi-Yau 3-folds. *Invent Math*, 2001, 145: 151–218
- 6 Li J. A degeneration formula of GW-invariants. *J Differential Geom*, 2002, 60: 199–293
- 7 Chen B, Li A M, Sun S, et al. Relative orbifold Gromov-Witten theory and degeneration formula. *ArXiv:1110.6803*, 2011
- 8 Abramovich D, Fantechi B. Orbifold techniques in degeneration formulas. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci (5)*, 2016, 16: 519–579
- 9 Hu J. Gromov-Witten invariants of blow-ups along points and curves. *Math Z*, 2000, 233: 709–739
- 10 Hu J. Gromov-Witten invariants of blow-ups along surfaces. *Compos Math*, 2001, 125: 345–352
- 11 Hu J. Local Gromov-Witten invariants of blowups of Fano surfaces. *J Geom Phys*, 2011, 61: 1051–1060
- 12 Qi X. A blow-up formula of high-genus Gromov-Witten invariants of symplectic 4-manifolds. *Adv Math (China)*, 2014, 43: 603–607
- 13 He W, Hu J, Ke H Z, et al. Blowup formulae of high genus Gromov-Witten invariants in dimensional six. *ArXiv:1402.4221*, 2014
- 14 He W, Hu J. Orbifold Gromov-Witten invariants of weighted blow-up at smooth points. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2015, 31: 825–846
- 15 Adem A, Leida J, Ruan Y. *Orbifolds and Stringy Topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007
- 16 Chen B, Hu S. A deRham model for Chen-Ruan cohomology ring of abelian orbifolds. *Math Ann*, 2006, 336: 51–71

- 17 Satake I. On a generalization of the notion of manifold. Proc Natl Acad Sci USA, 1956, 42: 359–363
- 18 Godinho L. Blowing up symplectic orbifolds. Ann Global Anal Geom, 2001, 20: 117–162
- 19 Chen W, Ruan Y. A new cohomology theory of orbifold. Comm Math Phys, 2004, 248: 1–31
- 20 Chen W, Ruan Y. Orbifold quantum cohomology. Contemp Math, 2000, 310: 25–85
- 21 Chen B, Li A M, Wang B. Virtual neighborhood technique for pseudo-holomorphic spheres. ArXiv:1306.3276, 2013

Weighted blow-up of Gromov-Witten invariants of orbifold Riemannian surfaces along smooth points

DU ChengYong

Abstract In this paper, we study the change of orbifold Gromov-Witten invariants, and the change of the symplectic uniruledness of a compact symplectic orbifold Riemannian surface under weighted blow-up along smooth points. We prove that

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle_{g,A}^X &= \langle p^* \alpha_1, \dots, p^* \alpha_m, \underbrace{\mathbb{1}_{\widehat{X}_{(\frac{-1}{a_1})}}, \dots, \mathbb{1}_{\widehat{X}_{(\frac{-1}{a_1})}}}_{I_A} \rangle_{g,A}^{\widehat{X}}, \\ \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, [pt] \rangle_{g,A}^X &= I_A \cdot \langle p^* \alpha_1, \dots, p^* \alpha_m, \underbrace{\mathbb{1}_{\widehat{X}_{(\frac{-1}{a_1})}}, \dots, \mathbb{1}_{\widehat{X}_{(\frac{-1}{a_1})}}}_{I_A} \rangle_{g,A}^{\widehat{X}}.\end{aligned}$$

The first formula shows that when (X, ω) is symplectic uniruled, then so is $(\widehat{X}, \widehat{\omega})$, the weighted blow up of (X, ω) along smooth point.

Keywords orbifold Riemannian surfaces, orbifold Gromov-Witten invariant, weighted blow-up formula, symplectic uniruledness

MSC(2010) 53D45, 14N35

doi: 10.1360/N012016-00003