综 述

关于 Hermite 展开和 Laguerre 展开的 Hardy-Littlewood 型定理和系数乘子

献给徐利治教授 95 华诞

李中凯^①, 胡卓然^①, 石冶郝^{②*}

^① 首都师范大学数学科学学院, 北京 100048;

^② 首都师范大学初等教育学院, 北京 100048

E-mail: lizk@cnu.edu.cn, 15811022966@163.com, cnusyh@163.com

收稿日期: 2015-02-06; 接受日期: 2015-04-21; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371258) 和北京市自然科学基金 (批准号: 1122011) 资助项目

摘要 本文给出关于 Hermite 展开和 Laguerre 展开的系数乘子理论的研究进展的综合评述, 主要侧重于本文作者在近期关于这一课题取得的成果, 内容包括: 关于 Hermite 展开的 Hardy 不等式的研究背景和解决过程, 关于广义 Hermite 展开的 Hardy-Littlewood 型定理, Hardy 空间中的函数关于广义 Hermite 展开和多元 Hermite 展开的各种系数乘子定理和 Paley 型不等式, Hardy 空间中的函数关于 Laguerre 展开的系数乘子定理等.

关键词 Hardy-Littlewood 定理 系数乘子 Hermite 函数 Laguerre 函数 Hardy 空间 Hardy 不等式 Paley 不等式

MSC (2010) 主题分类 42B30, 42C10, 42A45

1 引言

Hermite 函数和 Laguerre 函数出现在许多数学问题中, 以其独特的角色和性质发挥着重要作用, 例如, Hermite 函数是调和振荡子的特征函数, 也是 Fourier 变换的特征函数. 在关于 Heisenberg 群的表示理论和调和分析中, 大多问题的研究和解决取决于对 Hermite 函数、Laguerre 函数和特殊 Hermite 函数相关问题的处理方式, 参见文献 [1].

Hermite 函数系、Laguerre 函数系及其多元形式是 Euclid 空间 (一维或多维) 中的正交函数系, 也是 Euclid 空间上的调和分析中的重要工具和研究对象, 在许多方面取得了丰富的成果, 参见文献 [2] 及其后的文献. 本文关注的是 Euclid 空间中的函数关于 Hermite 函数系、多元 Hermite 函数系和 Laguerre 函数系展开的 Hardy-Littlewood 型定理和一般系数乘子问题, 给出近年来在这方面的研究进展的综合评述.

先给出几个一般记号. 设 (X, μ) 是一个测度空间, $\{\phi_n(x)\}$ 是 Hilbert 空间 $L^2(X, \mu)$ 中的一个标准正交函数系. 对 $f \in L^2(X, \mu)$, 相应的广义 Fourier 系数是

英文引用格式: Li Z K, Hu Z R, Shi Y H. On Hardy-Littlewood type theorems and coefficient multipliers for Hermite and Laguerre expansions (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1457–1472, doi: 10.1360/N012015-00082

$$a_n(f) = \int_X f(x) \overline{\phi_n(x)} d\mu(x).$$

对 $0 < q < \infty$, 序列空间 ℓ^q 是由满足 $\|\{a_n\}\|_q := (\sum |a_n|^q)^{1/q} < \infty$ 的所有数列 $\{a_n\}$ 构成的集合; ℓ^∞ 是由所有有界数列 $\{a_n\}$ 构成的集合, 且 $\|\{a_n\}\|_\infty = \sup |a_n|$.

设 $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, $\{\lambda_n\}$ 是一个给定的数列. 如果对每一 $f \in L^p(X, \mu)$, 都有 $\{\lambda_n a_n(f)\} \in \ell^q$, 即

$$\left(\sum |\lambda_n a_n(f)|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

则称数列 $\{\lambda_n\}$ 是一个相应于函数系 $\{\phi_n(x)\}$ 的 (L^p, ℓ^q) 乘子.

如果对 $(X, \mu) = (\mathbb{R}^1, dx)$ 或者 $(\mathbb{R}^d, dx)$ ($d \geq 2$), 以及 $0 < p < 1$, 广义 Fourier 系数 $a_n(f)$ 对 $f \in H^p(\mathbb{R}^1)$ 或 $f \in H^p(\mathbb{R}^d)$ 有适当的替代形式, 我们对 $0 < p \leq 1$ 可以用类似于上面的方式给出相应于函数系 $\{\phi_n(x)\}$ 的 (H^p, ℓ^q) 乘子的定义.

一个相应于函数系 $\{\phi_n(x)\}$ 的 (L^p, ℓ^q) 乘子或 (H^p, ℓ^q) 乘子统称为相应于函数系 $\{\phi_n(x)\}$ 的一个系数乘子.

经典的 Hardy-Littlewood 定理和系数乘子理论强烈地依赖于解析函数的复变结构 (参见文献 [3, 第 12 章] 和 [4, 第 6 章]), 这不适合于关于其他特征展开的问题. 例如, 文献 [5] 研究了关于在紧 Riemann 流形和紧对称空间上的 Laplace-Beltrami 算子的特征展开; 文献 [6] 研究了特殊 Hermite 展开. 作为现代数学最杰出成就的部分, 如函数的 Calderón-Zygmund 分解、 H^1 与有界平均振荡 (BMO) 空间的对偶关系、 H^p 空间的原子刻画等实变量方法为这些经典理论提供了新的证明 (参见文献 [7, 8]), 也使得这些经典理论可以推广到那些没有解析结构的框架中. 本文介绍的关于 Hermite 展开和 Laguerre 展开的 Hardy-Littlewood 型定理和一般系数乘子理论, 也是这些实变量方法的贡献.

本文的结构如下: 第 2 节介绍关于 Hermite 展开和 Laguerre 展开的一些记号, 特别是 Hardy 空间 H^p ($0 < p < 1$) 中的函数的 Hermite 系数和 Laguerre 系数的定义; 第 3 节是关于 Hermite 展开的 Hardy 不等式的研究背景和解决过程; 第 4 节是关于广义 Hermite 展开的 Hardy-Littlewood 型定理; 第 5 节介绍 Hardy 空间中的函数关于广义 Hermite 展开和多元 Hermite 展开的各种系数乘子定理和 Paley 型不等式; 第 6 节是关于 Hardy 空间中的函数关于 Laguerre 展开的一些研究进展.

2 Hermite 展开和 Laguerre 展开

2.1 L^p ($1 \leq p \leq \infty$) 空间中的函数的 Hermite 展开和 Laguerre 展开

经典的 Hermite 多项式是 $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (\frac{d}{dx})^n e^{-x^2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 它们构成直线 $(-\infty, \infty)$ 上关于 Gauss 测度 $e^{-x^2} dx$ 的正交多项式系, 即 (参见文献 [9, (5.5.1)])

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \pi^{\frac{1}{2}} 2^n n! \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

标准化的 Hermite 函数是

$$\mathcal{H}_n(x) = (\pi^{\frac{1}{2}} 2^n n!)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

自然地, $\{\mathcal{H}_n(x)\}_{n=0}^\infty$ 是直线 $(-\infty, \infty)$ 上关于 Lebesgue 测度的标准正交函数系.

本文叙述和证明的大部分结论都是关于广义 Hermite 展开的. 广义 Hermite 多项式和广义 Hermite 函数可以通过 Laguerre 多项式表示出来. 设 $\alpha > -1$. Laguerre 多项式系 $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是在正半实轴 $[0, \infty)$ 上关于测度 $x^\alpha e^{-x} dx$ 的正交多项式系, 即 (参见文献 [9, (5.1.1)])

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{mn}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

对应地, Laguerre 函数 $\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x) = [n!/\Gamma(n+\alpha+1)]^{1/2} x^{\alpha/2} e^{-x/2} L_n^{(\alpha)}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 构成 $[0, \infty)$ 上关于 Lebesgue 测度的标准正交函数系.

对 $\lambda > -1/2$, 广义 Hermite 多项式 $H_n^{(\lambda)}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 由下列方式给出 (参见文献 [10]),

$$H_{2k}^{(\lambda)}(x) = \left(\frac{k!}{\Gamma(k+\lambda+1/2)} \right)^{1/2} L_k^{(\lambda-1/2)}(x^2), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

$$H_{2k-1}^{(\lambda)}(x) = \left(\frac{(k-1)!}{\Gamma(k+\lambda+1/2)} \right)^{1/2} x L_{k-1}^{(\lambda+1/2)}(x^2), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

它们构成了直线 $(-\infty, +\infty)$ 上关于测度 $|x|^{2\lambda} e^{-x^2} dx$ 的标准正交多项式系. 当 $\lambda = 0$ 时, $H_n^{(0)}(x)$ 与通常的 Hermite 多项式 $H_n(x)$ 是一致的 (除常数因子外, 参见文献 [2, (1.1.52) 和 (1.1.53)]). 对应地, 我们定义广义 Hermite 函数 $\mathcal{H}_n^{(\lambda)}(x)$ 如下:

$$\mathcal{H}_n^{(\lambda)}(x) = |x|^\lambda e^{-\frac{x^2}{2}} H_n^{(\lambda)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$\{\mathcal{H}_n^{(\lambda)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是直线 $(-\infty, \infty)$ 上关于 Lebesgue 测度的标准正交函数系.

下设 $\lambda \geq 0$. 对函数 $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, 它的广义 Hermite 展开是

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\lambda)}(f) \mathcal{H}_n^{(\lambda)}(x), \quad a_n^{(\lambda)}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathcal{H}_n^{(\lambda)}(t) dt. \quad (2.3)$$

特别地, 当 $\lambda = 0$ 时, 上式就是关于函数 f 的通常的 Hermite 展开.

我们也会谈到关于 Laguerre 展开的一些结果. 设 $\alpha \geq 0$. 对函数 $f \in L^p([0, \infty))$, $1 \leq p \leq \infty$, 它的 Laguerre 展开是

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\alpha)}(f) \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x), \quad c_n^{(\alpha)}(f) = \int_0^\infty f(t) \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(t) dt. \quad (2.4)$$

2.2 Hardy 空间 H^p ($0 < p < 1$) 中的函数的 Hermite 展开和 Laguerre 展开

因为 $H^1(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, 由 (2.3) 定义的广义 Hermite 系数 $a_n^{(\lambda)}(f)$ 适合所有 $f \in H^1(\mathbb{R})$; 但是当 $0 < p < 1$ 时, 一般来讲, Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R})$ 中的成员 f 是缓增分布, 我们需要对系数 $a_n^{(\lambda)}(f)$ 给出适当的定义, 这将基于 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R})$ 和 Lipschitz 空间 $\Lambda_{p-1-1}(\mathbb{R})$ 的对偶关系. 关于 Hardy 空间的实变理论, 参见文献 [7, 11, 12].

Lipschitz 空间 $\Lambda_\delta(\mathbb{R})$ 有多种等价定义, 这里采用的是通常的一种形式. 设 $m \geq 1$, $m-1 < \delta \leq m$, $\Lambda_\delta(\mathbb{R})$ 是满足下列条件的 $m-1$ 次可微函数 f 的集合,

$$\|f\|_{\Lambda_\delta} := \|f\|_{L^\infty} + \frac{\sup_{x,h} |f^{(m-1)}(x+h) - f^{(m-1)}(x)|}{|h|^{\delta+1-m}} < \infty, \quad \delta \neq m;$$

$$\|f\|_{\Lambda_\delta} := \|f\|_{L^\infty} + \frac{\sup_{x,h} |f^{(m-1)}(x+h) - 2f^{(m-1)}(x) + f^{(m-1)}(x-h)|}{|h|} < \infty, \quad \delta = m.$$

对任意 $\delta > 0$, 此处使用统一的记法 $\Lambda_\delta(\mathbb{R})$, 对 $\delta = m$ 不使用 Zygmund 的记号 $\Lambda_\delta^*(\mathbb{R})$.

当 $0 < p < 1$ 时, 我们根据下面的引理给出 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R})$ 中的函数 f 的 Hermite 系数 $a_n^{(\lambda)}(f)$ 的定义.

引理 1 (参见文献 [7, 第 130 页]) 设 $0 < p < 1$, $g \in \Lambda_{p-1-1}(\mathbb{R})$, 并记

$$\mathfrak{L}_g(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^p(\mathbb{R}),$$

则 $\mathfrak{L}_g$ 可以延拓成 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R})$ 上的有界线性泛函, 且满足 $|\mathfrak{L}_g(f)| \leq A\|g\|_{\Lambda_{p-1-1}}\|f\|_{H^p}$, 其中 A 是不依赖于 g 和 f 的常数.

注 1 文献 [13] 有关于引理 1 的另一种描述; 引理的逆命题也成立.

对 $0 < p < 1$, Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R})$ 中的函数 f 的广义 Hermite 展开的系数 $a_n^{(\lambda)}(f)$ 定义为

$$a_n^{(\lambda)}(f) = \mathfrak{L}_{\mathcal{H}_n^{(\lambda)}}(f). \quad (2.5)$$

易知, 对“好”函数来说, 这个定义与 (2.3) 是相同的. 然而, 一般来讲, 该定义并非对 $0 < p < 1$ 时的所有 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R})$ 都有意义, 这是因为 Hermite 函数 $\mathcal{H}_n^{(\lambda)}(x)$ 对于一般的参数 λ 关于 x 并不是充分光滑的. 我们下面的命题 (参见文献 [14]; $\mathbb{N}_0$ 表示非负整数集, $2\mathbb{N}_0$ 表示非负偶数集).

命题 1 设 $\lambda \geq 0$, 当 $\lambda \in 2\mathbb{N}_0$ 时记 $\lambda^* = \infty$, 否则记 $\lambda^* = \lambda + 1$. 则对 $f \in H^p(\mathbb{R})$, $1/\lambda^* < p < 1$, 由 (2.5) 定义的 Hermite 系数 $a_n^{(\lambda)}(f)$ 是有意义的.

对于 Laguerre 展开, 我们考虑正半实轴 $[0, \infty)$ 上的 Hardy 空间

$$H^p([0, \infty)) = \{f \in H^p(\mathbb{R}) : \text{supp } f \subset [0, \infty)\}, \quad 0 < p \leq 1.$$

因为 $H^1([0, \infty)) \subset L^1([0, \infty))$, 由 (2.4) 定义的 Laguerre 系数 $c_n^{(\alpha)}(f)$ 适合所有 $f \in H^1([0, \infty))$. 当 $0 < p < 1$ 时, 我们采用类似于 (2.5) 的方式来定义 Hardy 空间 $H^p([0, \infty))$ 中的函数 f 的 Laguerre 展开的系数 $c_n^{(\alpha)}(f)$. 在此之前, 我们需要以适当的方式把 Laguerre 函数 $\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x)$ 从 $[0, \infty)$ 延拓到整个直线上, 并保持其光滑性和衰减性. 为此, 记

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ (1 - e^{\frac{1}{x}}) \exp\left(-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x+1}\right), & \text{当 } -1 < x < 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x \leq -1 \text{ 时.} \end{cases}$$

如果 $\alpha \in 2\mathbb{N}_0$, 定义

$$\tilde{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x) = \psi(nx)\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x);$$

如果 $\alpha \in [0, \infty) \setminus (2\mathbb{N}_0)$, 则记 $\tilde{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}(x) = \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x)\chi_{(0, \infty)}(x)$.

对 $0 < p < 1$, Hardy 空间 $H^p([0, \infty))$ 中的函数 f 的 Laguerre 系数 $c_n^{(\alpha)}(f)$ 定义为

$$c_n^{(\alpha)}(f) = \mathfrak{L}_{\tilde{\mathcal{L}}_n^{(\alpha)}}(f). \quad (2.6)$$

对“好”函数来说, 这个定义与 (2.4) 是相同的. 与 Hermite 系数类似, 一般来讲, 该定义并非对 $0 < p < 1$ 时的所有 Hardy 空间 $H^p([0, \infty))$ 都有意义, 因为函数 $\tilde{L}_n^{(\alpha)}(x)$ 对于一般的参数 α 关于 x 并不是充分光滑的. 事实上, 我们有下面的命题 (参见文献 [15]).

命题 2 设 $\alpha \geq 0$, 当 $\alpha \in 2\mathbb{N}_0$ 时记 $\alpha^* = \infty$, 否则记 $\alpha^* = 1 + \alpha/2$. 则对 $f \in H^p([0, \infty))$, $1/\alpha^* < p < 1$, 由 (2.6) 定义的 Laguerre 系数 $c_n^{(\alpha)}(f)$ 是有意义的.

2.3 多元 Hermite 展开

设 $d \geq 2$. 我们用 $\mathbf{k}$ 表示 d 元非负整数组 $(k_1, k_2, \dots, k_d)$, $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \dots + k_d$; 对 $\mathbb{R}^d$ 中的向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, 记 $\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_d^{k_d}$. d 元 Hermite 函数 $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ 定义为一元 Hermite 函数 $\mathcal{H}_{k_j}(x_j)$ ($1 \leq j \leq d$) 的乘积, 即

$$\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d \mathcal{H}_{k_j}(x_j), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

它们构成了 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R}^d, d\mathbf{x})$ 的一个完备的标准正交系 (参见文献 [2, 第 5 页]).

给定 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, f 的 (多元) Hermite 展开是

$$f \sim \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{k}}(f) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \quad a_{\mathbf{k}}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.7)$$

对 $n \in \mathbb{N}_0$, 若记 f 在第 n 个特征子空间上的投影为 $P_n f$, 即

$$P_n f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=n} a_{\mathbf{k}}(f) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}),$$

则 f 的 Hermite 展开 (2.7) 可以写成

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} P_n f,$$

且有 Plancherel 公式

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} |a_{\mathbf{k}}(f)|^2.$$

2.4 指数型广义 Hermite 函数

从文献 [16, 17] 可知, 广义 Hermite 多项式 $H_n^{(\lambda)}(x)$ ($n \geq 0$) 满足下面的方程:

$$\left(\Delta_{\lambda} - 2x \frac{d}{dx} \right) H_n^{(\lambda)}(x) = -2n H_n^{(\lambda)}(x), \quad (2.8)$$

其中

$$\Delta_{\lambda} f(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) + \frac{2\lambda}{x} \frac{d}{dx} f(x) - \frac{\lambda}{x^2} (f(x) - f(-x))$$

是对应于直线上的反射群 $G = \mathbb{Z}_2$ 的二阶 Dunkl 算子 (h -Laplace 算子, 参见文献 [18]). Li 和 Liu [19] 给出了方程 (2.8) 的一个更合适的变形, 即

$$\tilde{\Delta}_{\lambda} H_n^{(\lambda)}(x) = -4 \left[\frac{n+1}{2} \right] H_n^{(\lambda)}(x),$$

其中

$$\tilde{\Delta}_\lambda f(x) = \Delta_\lambda f(x) - 2x \frac{d}{dx} f(x) - (f(x) - f(-x)),$$

$[b]$ 表示不超过实数 b 的最大整数, 下同. $\tilde{\Delta}_\lambda$ 的优点是它有完全平方分解 $\tilde{\Delta}_\lambda = T_\lambda^2$, 其中

$$T_\lambda f(x) = \frac{d}{dx} f(x) + \left(\frac{\lambda}{x} - 2x \right) (f(x) - f(-x)).$$

若记 $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)|x|^{2\lambda}e^{-x^2}dx$, 不难验证, 对 $f, g \in C_c^1(\mathbb{R})$, $\langle T_\lambda f, g \rangle = -\langle f, T_\lambda g \rangle$, 即 T_λ 是“反对称的”.

如果记 $E_0^{(\lambda)} = H_0^{(\lambda)}$, 而对 $k \geq 1$, 令

$$E_k^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ H_{2k}^{(\lambda)}(x) + i H_{2k-1}^{(\lambda)}(x) \}, \quad E_{-k}^{(\lambda)}(x) = \overline{E_k^{(\lambda)}(x)},$$

则函数系 $\{E_k^{(\lambda)}(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 是在 $(-\infty, \infty)$ 上关于测度 $|x|^{2\lambda}e^{-x^2}dx$ 的标准正交系, 且对 $k \geq 0$, 有

$$T_\lambda E_{\pm k}^{(\lambda)}(x) = \pm i 2\sqrt{k} E_{\pm k}^{(\lambda)}(x).$$

上式说明, 函数 $E_k^{(\lambda)}(x)$ 具有指数函数的特征, 因此称为指数型广义 Hermite 多项式, 细节参见文献 [19]. 相应地, 指数型广义 Hermite 函数是 $|x|^\lambda e^{-x^2/2} E_k^{(\lambda)}(x)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 它们构成 $(-\infty, \infty)$ 上关于 Lebesgue 测度的标准正交系. 本文介绍的关于广义 Hermite 展开的大部分结论都可以借助指数型广义 Hermite 函数系 $\{|x|^\lambda e^{-x^2/2} E_k^{(\lambda)}(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 重新表述.

3 关于 Hermite 展开的 Hardy 不等式

关于 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R})$ 中函数的 Hermite 展开的 Hardy 型不等式已有很多工作, 其中第一个结果出现在文献 [20]. Kanjin [20] 证明了, 存在不依赖于 f 的常数 A , 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{29}{36}} |a_n^{(0)}(f)| \leq A \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad f \in H^1(\mathbb{R}). \quad (3.1)$$

Balasubramanian 和 Radha [21] 将 Kanjin 的结果延拓到 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R})$, $0 < p \leq 1$, 他们的结论是

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} |a_n^{(0)}(f)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_p \|f\|_{H^p(\mathbb{R})}, \quad f \in H^p(\mathbb{R}), \quad (3.2)$$

其中 A_p 是不依赖于 f 的常数,

$$\sigma = \frac{2-p}{12} \cdot \frac{18[p^{-1}] + 11}{2[p^{-1}] + 1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{12[p^{-1}] + 6} \right) (2-p).$$

Radha 和 Thangavelu [22] (又可参见文献 [6]) 研究了高维 Hermite 展开和特殊 Hermite 展开的 Hardy 型不等式. 对于高维 Hermite 展开, 他们证明了两种类型的结果, 我们分别叙述如下:

(I) 设 $d \geq 2$, $0 < p \leq 1$, 则存在不依赖于 f 的常数 A_p , 使得

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{d+2}{4}(2-p)} \|P_n f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_p \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^d)}, \quad f \in H^p(\mathbb{R}^d); \quad (3.3)$$

(II) 设 $d \geq 2$, $0 < p \leq 1$, 则存在不依赖于 f 的常数 A_p , 使得

$$\left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d, \mathbf{k} \neq \mathbf{0}} |\mathbf{k}|^{-\frac{3d}{4}(2-p)} |a_{\mathbf{k}}(f)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_p \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^d)}, \quad f \in H^p(\mathbb{R}^d). \quad (3.4)$$

与高维 ($d \geq 2$) 情形的结论 (3.3) 和 (3.4) 对照, 一维 Hermite 展开的 Hardy 不等式 (3.1) 中的指标 $\frac{29}{36}$ 应当用更小的值 $\frac{3}{4}$ 来代替, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{4}} |a_n^{(0)}(f)| \leq A \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad f \in H^1(\mathbb{R}), \quad (3.5)$$

其中 A 是不依赖于 f 的常数. 然而遗憾的是, Radha 和 Thangavelu [22] 处理高维问题的方法对一维情形失效.

上述猜测在文献 [23] 中得到了进一步印证. Kanjin [23] 证明了, (3.1) 中的指标 $\frac{29}{36}$ 可以改进为 $\frac{3}{4} + \epsilon$ ($\epsilon > 0$), 而且此时, 相应的不等式对任意 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 成立, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{4}-\epsilon} |a_n^{(0)}(f)| \leq A(\epsilon) \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad (3.6)$$

其中 $A(\epsilon)$ 是不依赖于 f , 但依赖于 ϵ 的常数. Kanjin [23] 还证明了, 存在函数 $f_0 \in L^1(\mathbb{R})$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{4}} |a_n(f_0)| = \infty.$$

这说明不等式 (3.5) 是深刻的.

文献 [20, 23] 对 (3.1) 和 (3.6) 的证明是基于 Hermite 函数的点态估计. 对给定 $\tau > 0$, 存在正数 A, η 和 ξ , 使得对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 和 $n \geq 1$ 有

$$|\mathcal{H}_n(x)| \leq C(|x| + \sqrt{n})^{-\frac{1}{4}} (||x| - \sqrt{2n}| + n^{-\frac{1}{6}})^{-\frac{1}{4}} \Psi_n(x), \quad (3.7)$$

其中

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \leq |x| \leq \sqrt{2n}, \\ \exp(-\eta n^{\frac{1}{4}} ||x| - \sqrt{2n}|^{3/2}), & \text{当 } \sqrt{2n} \leq |x| \leq (1+\tau)\sqrt{2n}, \\ e^{-\xi x^2}, & \text{当 } (1+\tau)\sqrt{2n} \leq |x|. \end{cases} \quad (3.8)$$

Skovgaard 曾给出 Hermite 函数在不同变量范围中的描述, 参见文献 [24]. 上述统一简洁的形式出现在文献 [14] 中, 它基于关于 Laguerre 多项式的一致估计 (参见文献 [25, (2.2)], [24, 第 699 页] 和 [26]) 和 Hermite 多项式与 Laguerre 多项式的关系 (2.1) 和 (2.2).

从 (3.7) 和 (3.8) 立即可以看出,

$$|\mathcal{H}_n(x)| \leq A n^{-\frac{1}{12}}, \quad (3.9)$$

$\mathcal{H}_n(x)$ 在点 $x = \sqrt{2n}$ 周围靠近这个界, 但对大多数 $x < \sqrt{2n}$, 它的界是 $n^{-\frac{1}{4}}$ 的常数倍, 这远远小于 $n^{-\frac{1}{12}}$. 要合理且有效地使用 Hermite 函数这种不均衡性质是非常困难的, 就像文献 [20, 23], 当然也就很难对相关问题得到理想的结果.

如果 $d \geq 2$, d 元 Hermite 函数 $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ 具有下面的估计 (参见文献 [2, 引理 3.2.2]):

$$\sum_{|\mathbf{k}|=n} |\Phi_{\mathbf{k}}(x_1, \dots, x_d)|^2 \leq A(n+1)^{\frac{d}{2}-1}, \quad (3.10)$$

其中 A 是不依赖于 n 和 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ 的常数. 显然, 当 $d = 1$ 时, (3.10) 是不对的. (3.10) 中的估计已经被用于多元情形下的各种问题的研究中, 如文献 [2]; 它也是在文献 [22] 中证明关于多元 Hermite 展开的 Hardy 型不等式 (3.3) 和 (3.4) 的关键工具.

Li 等人 [27] 用不同于文献 [20, 22, 23] 中的方法证明了 Kanjin 的猜测, 即不等式 (3.5). 事实上, 文献 [27] 中的证明是对广义 Hermite 展开统一给出的, 其方法是利用 $H^1(\mathbb{R}^1)$ 中函数的广义 Hermite 展开的 Poisson 积分的平方模估计.

关于广义 Hermite 函数的 Poisson 核是 $\mathcal{P}^{(\lambda)}(r; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \mathcal{H}_n^{(\lambda)}(x) \mathcal{H}_n^{(\lambda)}(y)$, 它的封闭形式是 (参见文献 [27])

$$\mathcal{P}^{(\lambda)}(r; x, y) = |xy|^{\lambda} \frac{(1-r^2)^{-\lambda-1/2}}{\Gamma(\lambda+1/2)} \exp\left(-\frac{1+r^2}{1-r^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{2}\right) E_{\lambda}\left(\frac{2rxy}{1-r^2}\right),$$

其中 $E_{\lambda}(z)$ 是一维 Dunkl 核

$$E_{\lambda}(z) = j_{\lambda-1/2}(iz) + \frac{z}{2\lambda+1} j_{\lambda+1/2}(iz),$$

$j_{\alpha}(z)$ 是标准化的 Bessel 函数 $j_{\alpha}(z) = 2^{\alpha} \Gamma(\alpha+1) z^{-\alpha} J_{\alpha}(z)$. 若 $\lambda = 0$, 则 $E_0(z) = e^z$.

对函数 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 它的广义 Hermite 展开的 Poisson 积分为

$$f_{\lambda}(r; x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}^{(\lambda)}(r; x, y) f(y) dy. \quad (3.11)$$

文献 [27] 证明了, 对 $\lambda \geq 0$, 存在不依赖于 f 的常数 A , 使得

$$\int_0^1 (1-r)^{-\frac{3}{4}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_{\lambda}(r; x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dr \leq A \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad f \in H^1(\mathbb{R}). \quad (3.12)$$

根据上面的估计, 文献 [27] 证明了 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R})$ 中的函数关于广义 Hermite 展开的 Hardy 型不等式, 即对 $\lambda \geq 0$, 存在不依赖于 f 的常数 A , 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{4}} |a_n^{(\lambda)}(f)| \leq A \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad f \in H^1(\mathbb{R}). \quad (3.13)$$

4 关于广义 Hermite 展开的 Hardy-Littlewood 型定理

4.1 $1 < p \leq 2$

对一般的标准正交函数系, 有一个在 L^p ($1 < p \leq 2$) 空间中的 Hardy-Littlewood 型定理, 参见文献 [3, 第 II 卷第 156 页] 或 [28]; 根据这一定理, 利用 (3.9) 可以得到关于 Hermite 展开在 L^p ($1 < p \leq 2$) 空间中的 Hardy-Littlewood 型定理. 但是这个一般的定理要求正交函数系中的成员的界关于 n 是非减的, 但 (3.9) 却恰恰相反. 下面给出这个定理的改进形式, 它可以直接用于 Hermite 函数系.

命题 3 设 $1 \leq p_0 < 2$, $\{\phi_n(x)\}$ 是 $L^2(X, \mu)$ 中的一个标准正交函数系. 又设 $\|\phi_n\|_{L^{p'_0}(X, \mu)} \leq M_n < \infty$. 如果

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^{-\frac{2}{2-p_0}} M_k^{-\frac{2p_0}{2-p_0}} = O((nM_n^2)^{-\frac{p_0}{2-p_0}}), \quad n \rightarrow \infty,$$

则对 $p_0 < p \leq 2$, $f \in L^p(X, \mu)$ 关于函数系 $\{\phi_n(x)\}$ 的正交展开系数列 $\{a_n(f)\}$ 满足

$$\left(\sum (nM_n^{p_0})^{-\frac{2-p}{2-p_0}} |a_n(f)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_{p,p_0} \|f\|_{L^p(X, \mu)}, \quad f \in L^p(X, \mu), \quad (4.1)$$

其中 A_{p,p_0} 是不依赖于 f 的常数.

文献 [29] 中有命题 3 的证明. 对 Hermite 函数系 $\{\mathcal{H}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, 取 $p_0 = 1$, 由 (3.9) 知, $M_n = An^{-\frac{1}{12}}$, 且满足

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^{-2} M_k^{-2} = A^{-2} \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\frac{11}{6}} \leq A^{-2} A' n^{-\frac{5}{6}} = A'(nM_n^2)^{-1}.$$

根据命题 3, 从 (4.1) 立即可知, 对 $1 < p \leq 2$, 存在不依赖于 f 的常数 A_p , 使得

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{11}{12}(2-p)} |a_n^{(0)}(f)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}). \quad (4.2)$$

进一步观察会发现, (4.2) 中的指标 $\frac{11}{12}(2-p)$ 是很不令人满意的 (参见文献 [20]). 事实上, 对 Kanjin 的不等式 (3.6) 和 Plancherel 公式 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(0)}(f)|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ 应用 Riesz-Thorin 定理可得如下的改进形式: 对给定 $\epsilon > 0$, $1 \leq p \leq 2$, 存在不依赖于 f 的常数 $A_{p,\epsilon}$, 使得

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(\frac{3}{4}+\epsilon)(2-p)} |a_n^{(0)}(f)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_{p,\epsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}).$$

我们自然期待, 对 $1 < p < 2$, 上述不等式中的指标 $(\frac{3}{4}+\epsilon)(2-p)$ 是否可以用 $\frac{3}{4}(2-p)$ 替代? 这个问题的答案在关于 Hermite 展开的 Hardy 不等式 (3.5) 被证明之前是不明确的; 现在对 Hardy 不等式 (3.13) 和 Plancherel 公式 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(\lambda)}(f)|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ 利用 Hardy 空间的插值定理 (参见文献 [30]), 便可得到, 对 $\lambda \geq 0$, $1 < p \leq 2$, 存在不依赖于 f 的常数 A_p , 使得

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{4}(2-p)} |a_n^{(\lambda)}(f)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}). \quad (4.3)$$

4.2 $p = 1$

对 $p = 1$, 我们将给出不等式 (3.6) 的一个改进. 主要依据是下面的命题.

命题 4 设 ψ 是 $(0, 1]$ 上的非负非减函数, 且满足

$$\int_0^1 \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty, \quad (4.4)$$

则存在不依赖于 f 的常数 A_ψ , 使得

$$\int_0^1 (1-r)^{-\frac{3}{4}} \psi(1-r) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_\lambda(r; x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dr \leq A_\psi \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}).$$

我们的主要结论是下面的定理 (参见文献 [29]).

定理 1 设 ψ 是 $(0, 1]$ 上的非负非减函数且满足条件 (4.4), 则存在不依赖于 f 的常数 A_ψ , 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{4}} \psi(n^{-1}) |a_n^{(\lambda)}(f)| \leq A_\psi \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}).$$

特别取 $\psi(t) = (\log \frac{3}{t})^{-1} (\log \log \frac{3}{t})^{-\sigma}$, $\sigma > 1$, 我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-\frac{3}{4}} |a_n^{(\lambda)}(f)|}{(\log 3n)(\log \log 3n)^\sigma} \leq A_1 \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad (4.5)$$

其中 A_1 是不依赖于 f 的常数. 显然, 对 $\lambda = 0$, 不等式 (4.5) 是 (3.6) 的本质改进.

4.3 $0 < p < 1$

当 $0 < p < 1$ 时, 关于 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R})$ 中的函数的 Hermite 展开的系数的已知结论是文献 [21] 中证明的 (3.2); 但是与 Hardy 不等式 (3.5)、当 $1 < p \leq 2$ 时的 Hardy-Littlewood 不等式 (4.3) 及文献 [22] 中证明的关于高维 ($d \geq 2$) Hermite 展开的 Hardy-Littlewood 型不等式 (3.3) 和 (3.4) 相比, 不等式 (3.2) 远远不够深刻, 期待的形式应当是将其中的指标 σ 用 $\frac{3}{4}(2-p)$ 替代. 我们在最近的文献 [29] 中对广义 Hermite 展开的系数给出了这一论断的证明, 即对 $\lambda \geq 0$, $1/\lambda^* < p < 1$ (关于 λ^* 的描述见命题 1), 存在不依赖于 f 的常数 A_p , 使得

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{4}(2-p)} |a_n^{(\lambda)}(f)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_p \|f\|_{H^p(\mathbb{R})}, \quad f \in H^p(\mathbb{R}). \quad (4.6)$$

特别地, 上述不等式当 $\lambda = 0$ 时对所有 $0 < p < 1$ 成立.

如在第 3 节中所指出, Radha 和 Thangavelu [22] 处理高维问题的方法不适合于一维 Hermite 展开; 我们需要利用 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R})$ ($0 < p < 1$) 中函数相应于广义 Hermite 展开的 Poisson 积分的平方模估计, 也就是需要当 $0 < p < 1$ 时与不等式 (3.12) 相对应的估计.

由于 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R})$ ($0 < p < 1$) 中的成员一般来讲是缓增分布, 我们也要利用 $H^p(\mathbb{R})$ 和 $\Lambda_{p-1-1}(\mathbb{R})$ 的对偶关系 (见引理 1) 给出关于广义 Hermite 展开的 Poisson 积分的替代定义, 即对 $f \in H^p(\mathbb{R})$, $0 < p < 1$,

$$f_\lambda(r; x) = \mathfrak{L}_{\mathcal{P}^{(\lambda)}(r; x, \cdot)}(f). \quad (4.7)$$

当然, 对“好”函数来讲, 这个定义与 (3.11) 是相同的. 然而与 Hermite 系数 (2.5) 类似, 一般来讲, 该定义并非对 $0 < p < 1$ 时的所有 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R})$ 都有意义, 因为 Poisson 核函数 $\mathcal{P}^{(\lambda)}(r; x, y)$ 对于一般的参数 λ 关于 y 并不充分光滑. 类似于命题 1, 我们有, 当 $1/\lambda^* < p < 1$ 时, $f \in H^p(\mathbb{R})$ 关于广义 Hermite 展开的 Poisson 积分 (4.7) 是有意义的.

我们利用原子分解, 得到 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R})$ ($0 < p < 1$) 中的函数相应于广义 Hermite 展开的 Poisson 积分的平方模估计 (参见文献 [29]).

命题 5 设 $\lambda \geq 0$, $1/\lambda^* < p < 1$, 则存在不依赖于 f 的常数 A_p , 使得

$$\left(\int_0^1 (1-r)^{-\frac{2+p}{4}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_\lambda(r; x)|^2 dx \right)^{\frac{p}{2}} dr \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_p \|f\|_{H^p(\mathbb{R})}, \quad f \in H^p(\mathbb{R}). \quad (4.8)$$

根据命题 5, 文献 [29] 证明了 Hardy-Littlewood 不等式 (4.6). 文献 [29] 利用 Marcinkiewicz 插值定理建立了当 $1 < p \leq 2$ 时与 (4.8) 相应的 L^p 估计, 即对 $\lambda \geq 0, 1 < p \leq 2$, 存在不依赖于 f 的常数 A_p , 使得

$$\left(\int_0^1 (1-r)^{-\frac{2+p}{4}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_{\lambda}(r; x)|^2 dx \right)^{\frac{p}{2}} dr \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}). \quad (4.9)$$

根据 (4.9) 可以给出不等式 (4.3) 的另一证明.

5 Hardy 空间中的函数关于广义 Hermite 展开和多元 Hermite 展开的系数乘子

L^p 空间和 Hardy 空间 H^p 中的乘子问题是调和分析中的重要问题, 包括以乘子形式定义的线性算子和系数乘子; 相应于 Fourier 变换情形的“系数乘子”也称为 $\mathcal{FL}^p$ 乘子或 $\mathcal{FHP}$ 乘子, 如文献 [31]; 相关问题与振荡积分有着密切的联系. 我们在近期的一系列工作中 (参见文献 [14, 15, 32–34]), 建立了 Hardy 空间中的函数关于广义 Hermite 函数系、多元 Hermite 函数系和 Laguerre 函数系的系数乘子定理; 根据这些乘子定理, 我们分别得到了相应于这些函数系的 Paley 型不等式.

5.1 关于广义 Hermite 展开的系数乘子

我们针对 $p = 1$ 和 $0 < p < 1$ 两种情形, 有下面三种形式的系数乘子定理 (参见文献 [14, 32]).

定理 2 设 $\lambda \geq 0, 2 \leq q < \infty$. 如果数列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足条件

$$\sum_{k=n}^{2n} |\lambda_k|^q = O(n^{\frac{q}{12}}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.1)$$

则 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是相应于广义 Hermite 函数系 $\{\mathcal{H}_n^{(\lambda)}(x)\}$ 的 (H^1, ℓ^q) 乘子, 且存在不依赖于 f 的常数 A_q , 使得

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n a_n^{(\lambda)}(f)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq A_q \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad f \in H^1(\mathbb{R}).$$

定理 3 设 $\lambda \geq 0$. 如果数列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足条件

$$\sup_N \sum_{j=1}^{\infty} \left[\sum_{k=jN}^{(j+1)N-1} k^{-\frac{1}{12}} |\lambda_k| \right]^2 < \infty, \quad (5.2)$$

则 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是相应于广义 Hermite 函数系 $\{\mathcal{H}_n^{(\lambda)}(x)\}$ 的 (H^1, ℓ^1) 乘子, 且存在不依赖于 f 的常数 A , 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n a_n^{(\lambda)}(f)| \leq A \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad f \in H^1(\mathbb{R}). \quad (5.3)$$

定理 4 设 $\lambda \geq 0, \lambda^*$ 如命题 1 中定义, 再设 $\lambda^{*-1} < p < 1 \leq q < \infty$. 如果数列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足条件

$$\sum_{k=n}^{2n} |\lambda_k|^q = O(n^{\frac{q}{2}(\frac{7}{6} - \frac{1}{p})}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.4)$$

则 $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ 是相应于广义 Hermite 函数系 $\{\mathcal{H}_n^{(\lambda)}(x)\}$ 的 (H^p, ℓ^q) 乘子, 且存在不依赖于 f 的常数 $A_{p,q}$, 使得

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n a_n^{(\lambda)}(f)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq A_{p,q} \|f\|_{H^p(\mathbb{R})}, \quad f \in H^p(\mathbb{R}).$$

在上述三个定理的证明中, 除了技术性困难外, 分别要用到 H^1 与 BMO 空间的对偶关系、 $H^p(\mathbb{R})$ 与 $\Lambda_{p-1-1}(\mathbb{R})$ 的对偶关系, 以及下面两个关于 Hermite 函数的引理 (参见文献 [14, 32]).

引理 2 设 $\lambda \geq 0$, 则存在常数 A , 使得对任意区间 $I \subset \mathbb{R}$, $j, k \in \mathbb{N}_0$, $j \leq k$, 有

$$\left| \int_I \mathcal{H}_k^{(\lambda)}(x) \mathcal{H}_j^{(\lambda)}(x) dx \right| \leq A \left[\left(\frac{j}{k} \right)^{\frac{5}{12}} \frac{|I|}{k^{\frac{1}{6}}} + \frac{1}{k^{\frac{7}{12}} j^{\frac{1}{12}}} \right].$$

引理 3 设 $\lambda \geq 0$, 给定 $m \in \mathbb{N}_0$, 则

(i) 对任意 $\lambda > 0$, $0 \leq m < \lambda$, 存在不依赖于 n 和 x 的常数 A , 使得

$$\left| \frac{d^m}{dx^m} \mathcal{H}_n^{(\lambda)}(x) \right| \leq A(n^{\frac{1}{2}} + |x|)^m \mathcal{N}_n^{(\lambda-m)}(x);$$

(ii) 对 $\lambda \in 2\mathbb{N}_0$, $m \geq \lambda$, 存在不依赖于 n 和 x 的常数 A , 使得

$$\left| \frac{d^m}{dx^m} \mathcal{H}_n^{(\lambda)}(x) \right| \leq A(n^{\frac{1}{2}} + |x|)^m \mathcal{N}_n^{(0)}(x),$$

其中

$$\mathcal{N}_n^{(\lambda)}(x) = |x|^\lambda (n^{-\frac{1}{2}} + |x|)^{-\lambda} (|x| + \sqrt{n})^{-\frac{1}{4}} (||x| - \sqrt{2n}| + n^{-\frac{1}{6}})^{-\frac{1}{4}} \Psi_n(x),$$

$\Psi_n(x)$ 由 (3.8) 给出, 那里的 $\tau > 0$ 是任意取定的, $\eta, \xi > 0$ 是适当选择的.

定理 2 和 4 的一个有趣的应用是关于广义 Hermite 展开的 Paley 型不等式.

推论 1 设 $\lambda \geq 0$, λ^* 如命题 1 中定义, 再设 $\lambda^{*-1} < p \leq 1$. 若 $\{n_k\}$ 是一个 Hadamard 数列, 即有常数 $\rho > 1$ 使得 $n_{k+1}/n_k \geq \rho$ ($k = 1, 2, \dots$), 则存在不依赖于 f 的常数 $A_{p,\rho}$, 使得

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{\frac{7}{6} - \frac{1}{p}} |a_{n_k}^{(\lambda)}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq A_{p,\rho} \|f\|_{H^p(\mathbb{R})}, \quad f \in H^p(\mathbb{R}). \quad (5.5)$$

首先注意到, 如果 $\{n_k\}$ 是 Hadamard 数列, 那么, 对任意 $N = 1, 2, \dots$, 位于区间 $[N, 2N]$ 中的集合 $\{n_k\}$ 的元素个数有一个不依赖于 N 的界. 事实上, 若 $n_{k-1} < N \leq n_k$, 则对满足 $n_j \leq 2N$ 的 $j \geq k$, 我们有 $1 \leq 2N n_j^{-1} \leq 2N n_k^{-1} \rho^{k-j} \leq 2\rho^{k-j}$, 因此, $2/(1 - \rho^{-1})$ 就是这样一个界. 现在当 $n = n_k$ 时, 取 $\lambda_n = n_k^{\frac{1}{2}(\frac{7}{6} - \frac{1}{p})}$, 否则取 $\lambda_n = 0$, 则对 $p = 1$ 或 $0 < p < 1$, 数列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ 满足 (5.1) 或 (5.4) (取 $q = 2$). 因此, 根据定理 2 和 4, 得到不等式 (5.5).

如果取 $\lambda_n = n^{-\frac{11}{12}}$ ($n \geq 1$), 则 $\{\lambda_n\}$ 满足定理 3 中的条件 (5.2), 此时不等式 (5.3) 是一个 Hardy 型不等式, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{11}{12}} |a_n^{(\lambda)}(f)| \leq A \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad f \in H^1(\mathbb{R}).$$

这是不等式 (4.2) 对应于 $p = 1$ 的形式, 但远不及不等式 (3.13) 深刻. 这个例子说明, 定理 3 中的条件 (5.2)、定理 2 中的条件 (5.1) 和定理 4 中条件 (5.4) 可以在很大程度上予以减弱, 但用目前的方法很难实现, 需要探索新的途径. 另外, 还有一些范围中的 p 和 q , 我们没有任何形式的乘子条件, 例如, (i) $p = 1 < q < 2$; (ii) $1/\lambda^* < p < q < 1$. 这些都是很有意义的问题.

5.2 关于多元 Hermite 展开的系数乘子

我们在文献 [34] 中研究了关于多元 Hermite 展开的系数乘子, 证明了两种形式的 (H^1, ℓ^2) 乘子定理, 分别叙述如下:

定理 5 如果数列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ 满足条件

$$\sum_{n=N}^{2N} |\lambda_n|^2 = O(N^{2-\frac{11}{6}d}), \quad N \rightarrow \infty, \quad (5.6)$$

则 $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ 是相应于多元 Hermite 函数系 $\{\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$ 的 (H^1, ℓ^2) 乘子, 且存在不依赖于 f 的常数 A , 使得

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^2 \|P_n f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq A \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}, \quad f \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

定理 6 如果多重指标数列 $\{\lambda_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d\}$ 满足条件

$$\sum_{|\mathbf{k}| \leq n} |\lambda_{\mathbf{k}}|^2 |\mathbf{k}|^{\frac{5}{6}d} = O(n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.7)$$

则 $\{\lambda_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d\}$ 是相应于多元 Hermite 函数系 $\{\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$ 的 (H^1, ℓ^2) 乘子, 且存在不依赖于 f 的常数 A , 使得

$$\left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} |\lambda_{\mathbf{k}}|^2 |a_{\mathbf{k}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq A \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}, \quad f \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

当 $d=1$ 时, 条件 (5.6) 与 (5.7) 是等价的, 且与定理 2 中的条件 (5.1) (取 $q=2$) 一致.

利用定理 5, 我们可以得到一个多元 Paley 型不等式.

推论 2 若 $\{n_j\}$ 是一个 Hadamard 数列, 即有常数 $\rho > 1$ 使得 $n_{j+1}/n_j \geq \rho$ ($j=1, 2, \dots$), 则存在不依赖于 f 的常数 A_ρ , 使得

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} n_j^{2-\frac{11}{6}d} \|P_{n_j} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq A_\rho \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}, \quad f \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

当 $n=n_j$ 时, 取 $\lambda_n = n_j^{1-\frac{11}{12}d}$, 否则取 $\lambda_n = 0$. 与关于推论 1 的分析一样, 数列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ 满足 (5.6). 根据定理 5, 推论 2 得证.

与一元 Hermite 展开对比, 关于多元 Hermite 展开的系数乘子有更多的待解决的问题.

6 Hardy 空间中的函数关于 Laguerre 展开的系数乘子

本节介绍 Hardy 空间 $H^p([0, \infty))$ 中的函数关于 Laguerre 展开的一些结果. Kanjin [20] 最先证明了 Hardy 空间 $H^1([0, \infty))$ 中函数关于 Laguerre 展开的 Hardy 型不等式, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |c_n^{(\alpha)}(f)| \leq A \|f\|_{H^1([0, \infty))}, \quad f \in H^1([0, \infty)),$$

其中 A 是不依赖于 f 的常数. Satake^[35] 将 Kanjin 的结果延拓到 Hardy 空间 $H^p([0, \infty))$, $0 < p \leq 1$, 他的结论是

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} |c_n^{(\alpha)}(f)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_p \|f\|_{H^p([0, \infty))}, \quad f \in H^p([0, \infty)),$$

其中 A_p 是不依赖于 f 的常数.

针对 $0 < p < 1$ 和 $p = 1$ 两种情形, 我们在文献 [15, 33] 中分别证明了下面两个系数乘子定理.

定理 7 设 $\alpha \geq 0$, α^* 如命题 2 中定义, 再设 $\alpha^{*-1} < p < 1 \leq q < \infty$. 若数列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足条件

$$\sum_{k=n}^{2n} |\lambda_k|^q = O(n^{q(1-p^{-1})}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (6.1)$$

则 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是相应于 Laguerre 函数系 $\{\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 的 (H^p, ℓ^q) 乘子, 且存在不依赖于 f 的常数 $A_{p,q}$, 使得

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n c_n^{(\alpha)}(f)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq A_{p,q} \|f\|_{H^p([0, \infty))}, \quad f \in H^p([0, \infty)).$$

定理 8 设 $\alpha \geq 0$, $2 \leq q < \infty$. 如果数列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足条件

$$\sum_{k=n}^{2n} |\lambda_k|^q = O(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (6.2)$$

则 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是相应于 Laguerre 函数系 $\{\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 的 (H^1, ℓ^q) 乘子, 且存在不依赖于 f 的常数 A_q , 使得

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n c_n^{(\alpha)}(f)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq A_q \|f\|_{H^1([0, \infty))}, \quad f \in H^1([0, \infty)).$$

利用上面两个定理, 我们可以得到关于 Laguerre 展开的 Paley 型不等式.

推论 3 设 $\alpha \geq 0$, α^* 如命题 2 中定义, 再设 $\alpha^{*-1} < p \leq 1$. 若 $\{n_k\}$ 是一个 Hadamard 数列, 即有常数 $\rho > 1$ 使得 $n_{k+1}/n_k \geq \rho$ ($k = 1, 2, \dots$), 则存在不依赖于 f 的常数 $A_{p,\rho}$, 使得

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{2(1-p^{-1})} |c_{n_k}^{(\alpha)}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq A_{p,\rho} \|f\|_{H^p([0, \infty))}, \quad f \in H^p([0, \infty)).$$

当 $n = n_j$ 时, 取 $\lambda_n = n_j^{1-p^{-1}}$, 否则取 $\lambda_n = 0$. 与关于推论 1 的分析一样, 对 $0 < p < 1$ 或 $p = 1$, 数列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 (6.1) 或 (6.2) (取 $q = 2$). 根据定理 7 和 8, 推论 3 得证.

有趣的是, 有关 Laguerre 展开的这些结论与经典情形下的结论在形式上非常相近 (关于条件的不同表达方式的等价性, 参见文献 [14, 命题 1.8]); 但是还有一些范围中的 p 和 q , 相应条件下关于 Laguerre 展开的系数乘子定理是否成立还有待研究, 例如, (i) $p = 1 < q < 2$; (ii) $1/\alpha^* < p < q < 1$. 另外, 这些关于 Laguerre 展开的系数乘子定理中的条件是否还可以减弱, 也是非常有意义的问题.

注 2 关于经典情形下的系数乘子的理论参见文献 [4, 36–40]; 关于其他特征展开的系数乘子问题也有许多研究, 例如, 文献 [41, 42] 建立了关于 Jacobi 展开的 Paley 不等式和 Hardy 不等式; 文献 [43] 研究了关于指数型 Jacobi 展开的一般系数乘子; 文献 [44, 45] 分别建立了关于 Dunkl-Gegenbauer 展开和关于一元 Dunkl 变换的 Hardy-Littlewood 型定理, 等等.

参考文献

- 1 Thangavelu S. Harmonic Analysis on the Heisenberg Group. Boston: Birkhäuser, 1998
- 2 Thangavelu S. Lectures on Hermite and Laguerre Expansions. Princeton: Princeton University Press, 1993
- 3 Zygmund A. Trigonometric Series, vols. I and II. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1959
- 4 Duren P L. Theory of H^p Spaces. New York: Academic Press, 1970
- 5 Colzani L, Travaglini G. Hardy-Lorentz spaces and expansions in eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator on compact manifolds. Colloq Math, 1990, 58: 305–316
- 6 Thangavelu S. On regularity of twisted spherical means and special Hermite expansion. Proc Indian Acad Sci Math Sci, 1993, 103: 303–320
- 7 Stein E M. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton: Princeton University Press, 1993
- 8 Torchinsky A. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. Orlando: Academic Press, 1986
- 9 Szegő G. Orthogonal Polynomials. 4th ed. Providence, RI: Amer Math Soc, 1975
- 10 Chihara T S. An Introduction to Orthogonal Polynomials. New York: Gordon and Breach, 1978
- 11 Stein E M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton: Princeton University Press, 1970
- 12 Uchiyama A. Hardy Spaces on the Euclidean Space. Tokyo: Springer-Verlag, 2001
- 13 Walsh T. The dual of $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ for $p < 1$. Canad J Math, 1973, 25: 567–577
- 14 Li Z K, Shi Y H. Multipliers of Hardy spaces associated with generalized Hermite expansions. Constr Approx, 2014, 39: 517–540
- 15 Shi Y H, Li Z K. Multipliers of Hardy spaces associated with Laguerre expansions. J Math Soc Japan, in press, 2014
- 16 Rosenblum M. Generalized Hermite polynomials and the Bose-like oscillator calculus. In: Operator Theory: Advances and Applications, vol. 73. Basel: Birkhäuser Verlag, 1994, 369–396
- 17 Rösler M. Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators. Comm Math Phys, 1998, 192: 519–542
- 18 Dunkl C F. Differential-difference operators associated to reflection groups. Trans Amer Math Soc, 1989, 311: 167–183
- 19 Li Z K, Liu L M. Uncertainty principles for Sturm-Liouville operators. Constr Approx, 2005, 21: 193–205
- 20 Kanjin Y. Hardy's inequalities for Hermite and Laguerre expansions. Bull Lond Math Soc, 1997, 29: 331–337
- 21 Balasubramanian R, Radha R. Hardy-type inequalities for Hermite expansions. J Inequal Pure Appl Math, 2005, 6: 1–4
- 22 Radha R, Thangavelu S. Hardy's inequalities for Hermite and Laguerre expansions. Proc Amer Math Soc, 2004, 132: 3525–3536
- 23 Kanjin Y. Hardy's inequalities for Hermite and Laguerre expansions revisited. J Math Soc Japan, 2011, 63: 753–767
- 24 Askey R, Wainger S. Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series. Amer J Math, 1965, 87: 695–708
- 25 Muckenhoupt B, Webb D W. Two-weight norm inequalities for Cesàro means of Laguerre expansions. Trans Amer Math Soc, 2000, 353: 1119–1149
- 26 Muckenhoupt B. Asymptotic forms for Laguerre polynomials. Proc Amer Math Soc, 1970, 24: 288–292
- 27 Li Z K, Yu Y F, Shi Y H. The Hardy inequality for Hermite expansions. J Fourier Anal Appl, 2015, 21: 267–280
- 28 Marcinkiewicz J, Zygmund A. Some theorems on orthogonal systems. Fund Math, 1937, 28: 309–335
- 29 Li Z K, Zhang X L, Shi Y H. Hardy-Littlewood theorems for generalized Hermite expansions. Math Ann, in press, 2015
- 30 Han Y S. A version of Calderón-Zygmund's decomposition and its applications to interpolation of operators. Sci China Ser A, 1985, 28: 134–146
- 31 Hörmander L. Oscillatory integrals and multipliers on FLP . Ark Mat, 1973, 11: 1–11
- 32 Shi Y H. On coefficient multipliers of Hardy spaces. PhD Thesis. Beijing: Capital Normal University, 2014
- 33 Shi Y H, Li Z K. Coefficient multipliers of H^1 into l^q associated with Laguerre expansions. J Math Soc Japan, in press, 2014
- 34 Shi Y H, Li Z K. Multipliers of Hardy spaces associated with multiple Hermite expansions. Submitted
- 35 Satake M. Hardy's inequalities for Laguerre expansions. J Math Soc Japan, 2000, 52: 17–24
- 36 Hardy G H, Littlewood J E. Notes on the theory of series (XX): Generalizations of a theorem of Paley. Quart J Math, 1937, 8: 161–171
- 37 Hardy G H, Littlewood J E. Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions. Quart J Math, 1941, 12: 221–256

- 38 Duren P L, Shields A L. Coefficient multipliers of H^p and B^p spaces. *Pacific J Math*, 1970, 32: 69–78
- 39 Sledd W T. On multipliers of H^p spaces. *Indiana Univ Math J*, 1978, 27: 797–803
- 40 Stein E M, Zygmund A. Boundedness of translation invariant operators on Hölder spaces and L^p -spaces. *Ann of Math*, 1967, 85: 337–349
- 41 Kanjin Y, Sato K. Paley’s inequality for the Jacobi expansions. *Bull Lond Math Soc*, 2001, 33: 483–491
- 42 Kanjin Y, Sato K. Hardy’s inequality for Jacobi expansions. *Math Inequal Appl*, 2004, 7: 551–555
- 43 Li Z K, Shi Y H. Coefficient multipliers of H^p into l^q associated with Jacobi expansions of exponential type. *J Funct Anal*, in press, 2015
- 44 Li Z K, Liao J Q. Hardy spaces for Dunkl-Gegenbauer expansions. *J Funct Anal*, 2013, 265: 687–742
- 45 Li Z K, Liao J Q. Harmonic analysis associated with the one-dimensional Dunkl transform. *Constr Approx*, 2013, 37: 233–281

On Hardy-Littlewood type theorems and coefficient multipliers for Hermite and Laguerre expansions

LI ZhongKai, HU ZhuoRan & SHI YeHao

Abstract This paper surveys the recent advances of the theory of coefficient multipliers associated with Hermite and Laguerre expansions, with an emphasis on the results of the authors on the topic. It includes, the background and the solution of the Hardy inequality associated with Hermite expansions, the Hardy-Littlewood type theorems associated with generalized Hermite expansions, several theorems about coefficient multipliers and the Paley type inequalities of functions in Hardy spaces associated with generalized Hermite expansions and multiple Hermite expansions, and the theorems about coefficient multipliers of functions in Hardy spaces associated with Laguerre expansions.

Keywords Hardy-Littlewood theorem, coefficient multipliers, Hermite function, Laguerre function, Hardy space, Hardy inequality, Paley inequality

MSC(2010) 42B30, 42C10, 42A45

doi: 10.1360/N012015-00082