论文

基于高导热材料非均匀分布的体点导热构形优化

伍文君, 陈林根*, 谢志辉, 孙丰瑞

海军工程大学动力工程学院, 热科学与动力工程研究室, 舰船动力工程军队重点实验室, 武汉 430033

* E-mail: lingench@hotmail.com; lgchenna@yahoo.com

收稿日期: 2015-08-15; 接受日期: 2015-12-03; 网络出版日期: 2016-01-27

国家自然科学基金(批准号: 51176203, 51206184)资助项目

摘要 基于变截面高导热通道矩形单元体, 同时释放上一级构造体最优和高导热材料均匀分布两个约束条件, 对矩形区域体点导热问题进行构形优化. 优化结果表明, 单元体内高导热材料面积沿导热通道的最优分布并非均匀的. 导出了高导热材料的最优分布规律, 有效降低了构造体最大热阻. 进一步的分析还表明, 增加单元体个数并不总能降低最大热阻, 而矩形区域的长宽比接近 2 时, 矩形区域内的最大热阻最小.

关键词 构形理论, 体点导热, 广义热力学优化

1 引言

随着电子技术的飞速发展, 电子元器件的集成度越来越高, 电子器件的散热问题日益重要, 已经成为制约电子设备性能进一步提高的瓶颈问题之一. 解决这一问题的通常做法是, 通过在发热区域填充少量高导热材料, 形成高导热通道, 从而降低导热热阻, 达到冷却的目的. 这一问题在理论上可抽象为体点问题, 即如何在一定的空间(“体”)内布置一定的高导热材料, 使其内发热量高效地传到器件表面的某一指定位置(“点”).

针对体点导热问题, 许多学者做了相关研究, 提出了诸如生命演化^[1]、仿生优化^[2]、进化算法^[3]、模拟退火^[4]、元胞自动机^[5]和拓扑分析^[6,7]等优化算法. 1996 年, Bejan 提出构形理论^[8-28], 并将这一理论首先应用于体点问题, 创造了“树网”构造法^[29]. “树网”构

造法的提出, 为体点导热问题的更深入研究提供了新思路. “树网”构造法通过不断地组合优化各级构造体, 得到了矩形均匀发热区域内高导热材料的最优分布. 但最初的“树网”构造法, 为了简化求解过程, 对求解模型做了大量的假设和简化, 例如, 导热方向垂直高导热通道, 高导热通道截面恒定, 高导热通道之间相互垂直, 上一级构造体最优以及高导热材料均匀分布等等, 因此其得到的优化结果是粗略的. 为此, 许多学者在“树网”构造法的基础上, 不断释放约束条件, 以找寻更优的“树网”构形. Ghodoossi 等人^[30]去除高导热通道上热流密度线性分布的简化, 得到所谓精确解. 魏曙寰等人^[31]针对高级构造体中导热通道上的热流密度离散分布, 建立了基于离散变截面导热通道的构形优化模型. Ledezma 等人^[32]去除高导热通道截面等厚度的假设, 算得了高导热通道厚度的最优分布, 并使单元体热阻下降 6%. 随后, 文

引用格式: 伍文君, 陈林根, 谢志辉, 等. 基于高导热材料非均匀分布的体点导热构形优化. 中国科学: 技术科学, 2016, 46: 302-312
Wu W J, Chen L G, Xie Z H, et al. “Volume-point” heat conduction constructal optimization with nonuniformly distributed high conductivity material (in Chinese). Sci Sin Tech, 2016, 46: 302-312, doi: 10.1360/N092015-00009

献[32]进一步去除导热通道相互垂直的假设, 得到了最优的角度, 使热阻进一步降低. 周圣兵等人^[33]在文献[32]的基础上, 逐级组合优化各级构造体, 找到了热阻最小的最佳构造级数. Neagu 和 Bejan^[34]首先对单元体的最优外形进行探讨, 指出最优的单元体边界应为等温线, 由此得到了抛物线型单元体, 其最大热阻下降了 33%. 伍文君等人^[35]释放“上一级构造体最优”的约束条件, 重新优化后证明, 上一级构造体最优的简化并不合理, 所得最优构形的最大热阻下降 30% 以上. 魏曙寰等人^[36-38]还将焓耗散极值原理^[39-42]引入“树网”构造法, 以焓耗散率最小为目标对体点导热进行优化.

然而, 随着约束条件的不断被释放, “树网”构形模型越来越复杂, 解析求解已不可能, 越来越多的学者借助有限元等数值方法来做更进一步研究. Almogbel 和 Bejan^[43]考虑高导热通道与边界应有空隙, 数值优化得到了最优的空隙值, 并进一步提出了“T”型导热通道. Almogbel 和 Bejan^[44]去除组成第一级构造体的各单元体内高导热材料面积相等(即高导热材料均匀布置在第一级构造体内)的规定, 对第一级构造体数值优化后发现, 最优布置并非均匀, 而是相对原来位置存在偏移. Hajmohammadi^[45]和 Lorenzini^[46]分别提出“folk”型^[45]和“X”型导热通道^[46], 同样采用数值优化的方法对导热通道的结构尺寸进行了优化. 文献[57]还进一步探讨了非均匀“X”型导热通道下的最优构形. Hajmohammadi 等人^[48]还提出了“ ϕ ”型和“ φ ”型导热通道, 并对比分析了各型导热通道下树网构形的导热性能. 此外, 体点导热研究还被扩展到微纳米尺度^[20,49-52].

本文将在变截面导热通道, 以及释放“上一级构造体最优”约束的基础上, 借鉴文献[44]高导热材料非均匀布置的思想, 对矩形均匀发热区域内高导热通道最优分布进行优化. 不同于文献[44]的是, 本文释放了“上一级构造体最优”的约束条件, 并在此基础上得到了单元体高导热材料面积沿主高导热通道最优分布的解析关系. 所得优化结果对工程应用更具指导意义.

2 矩形单元体优化

采用变截面导热通道的矩形单元体, 其优化可参见文献[32], 这里只给出模型描述和优化结果.

矩形单元体如图 1 所示^[32]. 矩形区域($H_0 \times L_0 \times 1$)内各点均匀产热, 产热率 q''' , 单元体内的热流汇聚到高导热材料组成的宽为 D_0 路径中, 导热通道宽度 D_0 沿 x 方向变化, 用 $D_0(x)$ 表示. 高导热通道导热系数为 k_p , 其余部分导热系数为 k_0 , $k_p \gg k_0$. 热流从冷源 M_0 点(原点)流出, M_0 点温度为 T_{org} , 边界的其余部分是绝热的.

假设 $k_0/k_p \ll \phi_0 \ll 1$ ($\phi_0 = A_{p,0}/A_0$, 其中 $A_{p,0}$ 为单元体高导热材料面积), 则 k_0 材料中导热方向可认为平行于 y 轴, 而 k_p 材料中导热沿 x 轴. 在此假定条件下, 可算得单元体最大热阻为^[32]

$$\frac{\Delta T_{0,\max}}{q''' A_0 / k_0} = \int_0^{L_0} \frac{1}{\hat{k} D_0(x)} \left(1 - \frac{x}{L_0} \right) dx + \frac{1}{8} \frac{H_0}{L_0}, \quad (1)$$

式中, $\Delta T_{0,\max}$ 是单元体最大温差, $\hat{k} = k_p / k_0$. 优化式(1), 得 D_0 通道的最优外形为^[32]

$$D_0(x)_{\text{opt}} = \frac{3A_{p,0}}{2L_0} \left(1 - \frac{x}{L_0} \right)^{1/2} = \frac{3\phi_0 H_0}{2} \left(1 - \frac{x}{L_0} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

将式(2)代入式(1), 并进一步优化单元体长宽比, 得单元体的最优构形为^[32]

$$\left(\frac{H_0}{L_0} \right)_{\text{opt}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{\hat{k}\phi_0}}, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\Delta T_{0,\max}}{q''' A_0 / k_0} \right)_{\text{opt}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\hat{k}\phi_0}}. \quad (4)$$

3 第一级构造体

按图 2 所示方式组装单元体, 得到第一级构造体^[33]. 矩形单元体并列排在由新的高导热材料组成

图 1 矩形单元体^[32]

图2 第一级构造体^[33]

的宽为 D_1 的通道两边, D_1 同样为变截面通道, 沿 x 方向变化, 记为 $D_1(x)$. 每个单元体的热流汇聚到 D_1 路径上, 再沿该路径从原点流出. 第一级构造体面积为 $A_1 = H_1 \times L_1$, A_1 边界除原点 M_1 外, 其余部分绝热.

上述模型还可做进一步的细化假定:

(1) 假定矩形单元体的数目 $n_1 \gg 1$, 则 D_1 高导热通道上的热流密度分布可简化为线性的.

(2) 矩形单元体并非上节得到的最优矩形单元体. 矩形单元体的外形尺寸(长宽比 H_0/L_0)和高导热通道外形需要重新优化确定. 考虑到 D_1 高导热通道上的热流密度分布简化为线性的, D_1 通道的最优外形与单元体 D_0 通道的最优外形相同, 满足 $D_1(x) \propto x^{1/2}$. 单元体长宽比是本级构造体的一个新优化变量.

(3) 高导热材料非均匀分布. 传统“树网”构造法假定每个单元体的外形尺寸相同, 且各单元体内布置的高导热材料面积也是相同, 也即高导热材料均匀布置在各单元体. 去除高导热材料均匀分布的假定, 不失一般性, 假设每个单元体的外形尺寸相同, 但每个单元体内布置的高导热材料面积不同, 其符合某种分布规律 $A_{p,0}$, $1 \leq n \leq n_1/2$. 考虑到 $n_1 \gg 1$, $A_{p,0}(n)$ 可简化为连续函数 $A_{p,0}(x)$, $0 \leq x \leq L_1$.

在以上假设简化的基础上, 对第一级构造体模型进行优化求解. 首先求解各单元体高导热材料面积分布规律函数 $A_{p,0}(x)$. 第一级构造体的最大温差是 $A_{p,0}(x)$ 的泛函, 随 $A_{p,0}(x)$ 的变化而变化, 显然存在最优的 $A_{p,0}(x)$ 使第一级构造体的最大温差最小. 而第一级构造体的最大温度点必定位于构造体的上下两条边界上. 构造体边界上的温度为 $T_1(x, H_1/2)$, 它由 D_1 高导热通道上的温度 $T_1(x, 0)$ 和 x 处单元体的最大温差 $\Delta T_{0,\max}(x)$ 组成, 也即

$$T_1\left(x, \frac{H_1}{2}\right) = T_1(x, 0) + \Delta T_{0,\max}(x). \quad (5)$$

将式(1)代入式(5), 得

$$T_1\left(x, \frac{H_1}{2}\right) = T_1(x, 0) + (q''' A_0 / k_0) \cdot \left(\int_0^{L_0} \frac{1}{\hat{k} D_0(x)} \left(1 - \frac{x}{L_0}\right) dx + \frac{1}{8} \frac{H_0}{L_0} \right). \quad (6)$$

再将单元体高导热通道最优外形式(2)代入式(6), 有

$$T_1\left(x, \frac{H_1}{2}\right) = T_1(x, 0) + (q''' A_0 / k_0) \cdot \left(\frac{4}{9 \hat{k} \phi_0(x)} \frac{L_0}{H_0} + \frac{1}{8} \frac{H_0}{L_0} \right), \quad (7)$$

式中, $\phi_0(x) = A_{p,0}(x)/A_0$, 它表示 x 处单元体高导热材料面积占单元体面积的比例.

D_1 通道的最优外形与 D_0 通道相同, 参考式(2), 有

$$D_1(x)_{\text{opt}} = \frac{3 A_{p,D_1}}{2 L_1} \left(1 - \frac{x}{L_1}\right)^{1/2} = \frac{3(\phi_1 - \Phi_0) H_1}{2} \left(1 - \frac{x}{L_1}\right)^{1/2}, \quad (8)$$

式中, A_{p,D_1} 表示第一级构造体中 D_1 高导热通道的面积, Φ_0 表示第一级构造体中各单元体中高导热材料面积总和占 A_1 的比例. D_1 通道温度分布函数 $T_1(x, 0)$ 的计算也与单元体中 D_0 通道温度分布函数的计算类似, 参照式(1)右边第一项, 并将式(8)代入得

$$\begin{aligned} T_1(x, 0) - T_{\text{org}} &= (q''' A_1 / k_0) \left(\int_0^x \frac{1}{\hat{k} D_1(x)} \left(1 - \frac{x}{L_1}\right) dx \right) \\ &= (q''' A_1 / k_0) \left(\frac{4}{9 \hat{k} (\phi_1 - \Phi_0)} \frac{L_1}{H_1} \left[1 - \left(1 - \frac{x}{L_1}\right)^{3/2} \right] \right). \end{aligned} \quad (9)$$

将式(9)代入式(7)得第一级构造体的最大温差为

$$\begin{aligned} \Delta T_{1,\max} &= \max_{x \in [0, L_1]} \left(T_1\left(x, \frac{H_1}{2}\right) \right) \\ &= \max_{x \in [0, L_1]} \left(T_1(x, 0) + \Delta T_{0,\max}(x) \right) \\ &= (q''' A_1 / k_0) \max_{x \in [0, L_1]} \left(\left(\frac{4}{9 \hat{k} (\phi_1 - \Phi_0)} \frac{L_1}{H_1} \left[1 - \left(1 - \frac{x}{L_1}\right)^{3/2} \right] \right) \right) \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{n_1}\left(\frac{4}{9\hat{k}\phi_0(x)}\frac{L_0}{H_0}+\frac{1}{8}\frac{H_0}{L_0}\right)\right). \quad (10)$$

考察式(10)可知, 必定存在一个最佳分布 $\phi_0(x)_{\text{opt}}$, 使得 $\Delta T_{1,\max}(x)$ 最小. 最佳分布 $\phi_0(x)_{\text{opt}}$ 应使第一级构造体上下两条边界为等温线. 该结论可用反证法求得.

假设求得某个最佳分布 $\phi_0(x)_{\text{opt}}$, 使得构造体上下边界并非等温线, 而是存在一个最大温差点, 则必然可以找到 $\phi_0(x)$ 的另外一种分布, 使得最大温差点温度降低, 构造体热阻下降, 因此最佳分布不成立. 由最佳分布 $\phi_0(x)_{\text{opt}}$ 使第一级构造体上下两条边界为等温线, 有

$$T_1\left(x, \frac{H_1}{2}\right) = T_1\left(x, -\frac{H_1}{2}\right) = \text{const}, \quad \forall x, \quad 0 \leq x \leq L_1. \quad (11)$$

结合式(11), 对式(10)整理后得

$$\frac{1}{n_1} \frac{4}{9\hat{k}\phi_0(x)_{\text{opt}}} \frac{L_0}{H_0} - \frac{4}{9\hat{k}(\phi_1 - \Phi_0)} \frac{L_1}{H_1} \left(1 - \frac{x}{L_1}\right)^{3/2} = \text{const}, \quad \forall x, \quad 0 \leq x \leq L_1, \quad (12)$$

式(12)两边对 x 求导, 并经整理后, 得

$$\left(1/\phi_0(x)_{\text{opt}}\right)' = -\frac{3n_1}{2(\phi_1 - \Phi_0)} \frac{H_0}{L_0} \frac{1}{H_1} \left(1 - \frac{x}{L_1}\right)^{1/2}. \quad (13)$$

考虑到约束条件

$$\frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \phi_0(x) dx = \Phi_0. \quad (14)$$

解微分方程式(13), 计算中代入关系式

$$\frac{H_1}{L_1} = \frac{4}{n_1} \frac{L_0}{H_0} = \frac{4}{n_1 a}, \quad (15)$$

式中, $a = H_0/L_0$, 得

$$\phi_0(x)_{\text{opt}} = \left(\frac{n_1^2 a^2}{4(\phi_1 - \Phi_0)} \left(1 - \frac{x}{L_1}\right)^{3/2} + C \right)^{-1}, \quad (16)$$

式中, C 为常数, 由约束条件式(14)确定. 令

$$C = \frac{n_1^2 a^2}{4(\phi_1 - \Phi_0)} C_1^3, \quad (17)$$

则 C_1 满足

$$\frac{1}{3} \frac{1}{C_1} \ln \left(\frac{C_1^2 - C_1 + 1}{C_1^2 + 2C_1 + 1} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{C_1} \left(\arctan \frac{2 - C_1}{\sqrt{3}C_1} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\Phi_0}{4(\phi_1 - \Phi_0)} n_1^2 a^2. \quad (18)$$

由式(18)可知, C_1 是 $\Phi_0/(\phi_1 - \Phi_0)$ 和 $n_1 a$ 的函数, 用 $C_1(\Phi_0/(\phi_1 - \Phi_0), n_1 a)$ 表示. 将式(16)代入式(10)算得第一级构造体最大热阻为

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_{1,\max}}{q''' A_1 / k_0} &= \frac{n_1 a}{9\hat{k}(\phi_1 - \Phi_0)} \\ &+ \frac{4}{9\hat{k}} \frac{1}{n_1 a} C \left(\frac{\Phi_0}{\phi_1 - \Phi_0}, n_1 a \right) + \frac{1}{8} \frac{a}{n_1} \\ &= \frac{n_1 a}{9\hat{k}(\phi_1 - \Phi_0)} + \frac{n_1 a}{9\hat{k}(\phi_1 - \Phi_0)} \\ &\cdot C_1^3 \left(\frac{\Phi_0}{\phi_1 - \Phi_0}, n_1 a \right) + \frac{1}{8} \frac{a}{n_1}. \end{aligned} \quad (19)$$

考察式(19), 等式右边前两项是 ϕ_1 , Φ_0 和 $n_1 a$ 的函数, 其中 ϕ_1 和 Φ_0 表征的是高导热材料的分布情况, 而由式(15)可知, $n_1 a$ 表征的是第一级构造体的长宽比. 等式右边第三项与单元体数目及单元体长宽比相关, 它给出的是单元体对最大热阻的影响, 独立于等式前两项. 当第一级构造体的长宽比一定时, 也即 $n_1 a$ 一定时, 等式右边前两项不变, 而右边第三项随 $a \rightarrow 0$ 或 $n_1 \rightarrow \infty$ 趋近于 0. 因此有, 当 $a \rightarrow 0$ 或 $n_1 \rightarrow \infty$ 时, 最大热阻取最小值, 即

$$\left(\frac{\Delta T_{1,\max}}{q''' A_1 / k_0} \right)_m = \frac{n_1 a}{9\hat{k}(\phi_1 - \Phi_0)} \left(1 + C_1^3 \left(\frac{\Phi_0}{\phi_1 - \Phi_0}, n_1 a \right) \right). \quad (20)$$

$a \rightarrow 0$ 意味着 $H_0 = 0$ 或 $L_0 = \infty$, 这是无法达到的, 但它表明单元体外形对最大热阻的影响随 a 单调减少. 这一结论也与文献[35]中去除“上一级构造体最优”约束条件后的优化结果相一致. $n_1 \rightarrow \infty$ 显然满足假设条件 $n_1 \gg 1$, D_1 高导热通道热流密度线性分布的假设也是合理的. 由式(20), 最大热阻还可针对高导热材料分布及 $n_1 a$ 做进一步优化. 为方便分析计算, 对式(20)做进一步整理后得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta T_{1,\max}}{q''' A_1 / k_0} \right)_m &= \frac{1}{\hat{k}\phi_1} \left(\frac{n_1 a}{9(1 - \Phi_0/\phi_1)} \left(1 + C_1^3 \left(\frac{\Phi_0/\phi_1}{1 - \Phi_0/\phi_1}, n_1 a \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)形式复杂, 无法直接算得最大热阻和参数 Φ_0/ϕ_1 及 $n_1 a$ 的解析关系式, 对其进行数值优化. 数值计算最大热阻随参数 Φ_0/ϕ_1 及 $n_1 a$ 变化的关系曲线. 图 3 给出的是 $n_1 a$ 分别取 1.5、2 及 2.2 时, 最大热阻随 Φ_0/ϕ_1 变化的关系曲线. 图 4 给出的是 Φ_0/ϕ_1 分别取 0.48、0.5 及 0.52 时, 最大热阻与 $n_1 a$ 的关系曲线. 从

图 3 和 4 可以看出, 最大热阻随参数 Φ_0/ϕ_1 及 n_1a 的变化趋势都是先减少后增大, 存在最优的 Φ_0/ϕ_1 和 n_1a , 使最大热阻最小, 从图中可以看到, 其最优值分别约为 0.5 和 2. $(\Phi_0/\phi_1)_{\text{opt}} \approx 0.5$ 表明: 当 D_1 通道的高导热材料面积和单元体中高导热材料面积相当时, 第一级构造体最优. 而 $(n_1a)_{\text{opt}} \approx 2$ 意味着, 第一级构造体的外形对导热性能也有较大的影响, 存在最优外形. 另外, 从图 3 和 4 还可以看出, 在最优 Φ_0/ϕ_1 及 n_1a 附近, 最大热阻变化平缓, 因此, 在最优 Φ_0/ϕ_1 及 n_1a 附近改变其数值, 对最大热阻的影响并不大.

经过大量数值计算, 算得最优 Φ_0/ϕ_1 约为 0.5, 最优 n_1a 约为 2.175. 第一级构造体的最优构形为

$$n_{1,\text{opt}} \rightarrow \infty, \quad (22)$$

$$\left(\frac{H_0}{L_0}\right)_{\text{opt}} \rightarrow \infty, \quad (23)$$

$$(n_1a)_{\text{opt}} \approx 2.175, \quad \left(\frac{H_1}{L_1}\right)_{\text{opt}} = \frac{4}{n_1a} \approx 1.8391, \quad (24)$$

$$\left(\frac{\Phi_0}{\phi_1}\right)_{\text{opt}} \approx 0.5, \quad (25)$$

图 3 最大热阻与 Φ_0/ϕ_1 关系曲线

图 4 最大热阻与 n_1a 关系曲线

$$\phi_0(x)_{\text{opt}} = \phi_1 \times \left(2.3653 \times \left(1 - \frac{x}{L_1} \right)^{3/2} - 0.1264 \right)^{-1}, \quad (26)$$

$$\left(\frac{\Delta T_{1,\text{max}}}{q''' A_1 / k_0} \right)_{m,m,m} \approx 0.7431 \frac{1}{\hat{k} \phi_1}. \quad (27)$$

4 第二级构造体

按照第一级构造体的组合方式, 对第一级构造体进行组装, 得到第二级构造体. 同样, 去除第一级构造体最优这一前提条件, 第一级构造体的各个参数是本级构造体优化的变量.

同样假定第一级构造体的数目 $n_2 \gg 1$, D_2 高导热通道上的热流密度分布简化为线性的, 第一级构造体内的高导热材料面积分布函数 $A_{p,1}(n)$ 简化为连续分布函数 $A_{p,1}(x)$.

第二级构造体的最大温度同样位于构造体的上下边界上, 有

$$\Delta T_{2,\text{max}} = \text{Max}_{x \in [0, L_2]} \left(T_2 \left(x, \frac{H_2}{2} \right) \right). \quad (28)$$

$T_2(x, H_2/2)$ 由 D_2 高导热通道上的温度 $T_2(x, 0)$ 和 x 处第一级构造体的最大温差 $\Delta T_{1,\text{max}}(x)$ 组成, 即

$$T_2 \left(x, \frac{H_2}{2} \right) = T_2(x, 0) + \Delta T_{1,\text{max}}(x). \quad (29)$$

这里, 第一级构造体非最优, 因此第一级构造体的长宽比及高导热材料的面积是待优化参数. 但仍然假定第一级构造体中的单元体数目 $n_1 \gg 1$, 故第一级构造体中高导热通道的外形满足式(8). 当第一级构造体中高导热材料面积一定时, 第一级构造体中高导热材料的分布独立于其他优化变量, 取其最优分布, 即单元体高导热材料占比函数 $\phi_0(x)$ 满足式(16). 由此, 第一级构造体最大温差应满足式(21), 将其代入式(29)得

$$T_2 \left(x, \frac{H_2}{2} \right) = T_2(x, 0) + \frac{q''' A_1 / k_0}{\hat{k} \phi_1(x)} \left(\frac{n_1 a}{9(1 - \Phi_0 / \phi_1)} \cdot \left[1 + C_1^3 \left(\frac{\Phi_0 / \phi_1}{1 - \Phi_0 / \phi_1}, n_1 a \right) \right] \right), \quad (30)$$

式中, $\phi_1(x) = A_{p,1}(x)/A_1$, 它表示 x 处第一级构造体高导热材料面积占该构造体总面积的比例.

D_2 高导热通道上的热流密度分布简化为线性,

D_2 通道最优外形参照式(8), 有

$$\begin{aligned} D_2(x)_{\text{opt}} &= \frac{3A_{p,D_2}}{2L_2} \left(1 - \frac{x}{L_2}\right)^{1/2} \\ &= \frac{3(\phi_2 - \Phi_1)H_2}{2} \left(1 - \frac{x}{L_2}\right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (31)$$

式中, Φ_1 表示第二级构造体中各第一级构造体高导热材料面积总和占 A_2 的比例, $T_2(x, 0)$ 的计算参照式(9), 有

$$\begin{aligned} T_2(x, 0) - T_{\text{org}} &= (q'''A_2/k_0) \left(\int_0^x \frac{1}{\hat{k}D_2(x)} \left(1 - \frac{x}{L_2}\right) dx \right) \\ &= (q'''A_2/k_0) \left(\frac{4}{9\hat{k}(\phi_2 - \Phi_1)} \frac{L_2}{H_2} \left(1 - \left(1 - \frac{x}{L_2}\right)^{3/2}\right) \right). \end{aligned} \quad (32)$$

将式(32)和式(30)代入式(28), 算得第二级构造体最大温差为

$$\begin{aligned} \Delta T_{2,\max} &= \text{Max}_{x \in [0, L_2]} \left(T_2\left(x, \frac{H_2}{2}\right) \right) \\ &= (q'''A_2/k_0) \cdot \text{Max}_{x \in [0, L_2]} \left(\frac{4}{9\hat{k}(\phi_2 - \Phi_1)} \frac{L_2}{H_2} \left(1 - \left(1 - \frac{x}{L_2}\right)^{3/2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n_2} \frac{1}{\hat{k}\phi_1(x)} \frac{n_1 a}{9(1 - \Phi_0/\phi_1)} \cdot \left(1 + C_1^3 \left(\frac{\Phi_0/\phi_1}{1 - \Phi_0/\phi_1}, n_1 a\right)\right) \right). \end{aligned} \quad (33)$$

考虑到 H_2/L_2 有

$$\frac{H_2}{L_2} = \frac{4}{n_2(H_1/L_1)} = n_1 a / n_2. \quad (34)$$

将式(34)代入式(33), 得

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_{2,\max}}{q'''A_2/k_0} &= \text{Max}_{x \in [0, L_2]} \left(\frac{4n_2/n_1 a}{9\hat{k}(\phi_2 - \Phi_1)} \left(1 - \left(1 - \frac{x}{L_2}\right)^{3/2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\hat{k}\phi_1(x)} \frac{n_1 a / n_2}{9(1 - \Phi_0/\phi_1)} \cdot \left(1 + C_1^3 \left(\frac{\Phi_0/\phi_1}{1 - \Phi_0/\phi_1}, n_1 a\right)\right) \right). \end{aligned} \quad (35)$$

首先优化第一级构造体长宽比参数 $n_1 a$ 及高导热

材料分布参数 Φ_0/ϕ_1 . 考察式(35), 第二级构造体长宽比 H_2/L_2 可由 $n_1 a/n_2$ 表征, 当 H_2/L_2 一定时, 参数 $n_1 a$ 仅影响式(35)中的 C_1 项, 且 C_1 值越小, $\Delta T_{2,\max}$ 越小. 参数 Φ_0/ϕ_1 仅影响等式右边第二项, 且当 $\Phi_0/\phi_1=0$ 而 C_1 取最小值时, $\Delta T_{2,\max}$ 最小. 令

$$m = \frac{\Phi_0}{4(\phi_1 - \Phi_0)} n_1^2 a^2. \quad (36)$$

根据式(18), 图5给出了 C_1 值与 m 的关系曲线. 从图中可以发现, C_1 值随 m 值的增加而单调减少, 当 $m \rightarrow \infty$, $C_1 \rightarrow 0$. 因此, 当 $\Phi_0/\phi_1 \rightarrow 0$ 且 $m \rightarrow \infty$ 时, $\Delta T_{2,\max}$ 取最小值, 即

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta T_{2,\max}}{q'''A_2/k_0} \right)_m &\rightarrow \\ \text{Max}_{x \in [0, L_2]} \left(\frac{4n_2/n_1 a}{9\hat{k}(\phi_2 - \Phi_1)} \left(1 - \left(1 - \frac{x}{L_2}\right)^{3/2}\right) + \frac{n_1 a / n_2}{9\hat{k}\phi_1(x)} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

$m \rightarrow \infty$ 则意味着 $n_1 a \rightarrow \infty$, 且考虑到 $\Phi_0/\phi_1 \rightarrow 0$, $(\Phi_0/\phi_1)n_1^2 a^2 \rightarrow \infty$. 而由式(15)可知, $n_1 a \rightarrow \infty$ 意味着 $H_1/L_1 \rightarrow 0$, 也即第一级构造体长宽比趋于 0. 这与最优第一级构造体相类似: 当上一级构造体长宽比趋于 0 时, 本级构造体达到最优. 由于 H_2/L_2 为有限值, $n_1 a \rightarrow \infty$, 则 $n_2 \rightarrow \infty$, 因此满足本节 $n_2 \gg 1$ 的假定, 所得优化结果是正确的.

$\Phi_0/\phi_1 \rightarrow 0$ 表 $\Phi_0 \rightarrow 0$, 也即单元体的高导热材料面积为 0. 此时, 第一级构造体退化为单元体, 而第二级构造体退化为第一级构造体. 因此, 第二级构造体的进一步优化已退化为第一级构造体的优化, 对比式(37)与式(12)也可发现, 式(37)的优化与式(12)的优化是相同的, 只是将第一级构造体的相关参数换成第二级构造体的相关参数, 其最优构形也与第一级构造体相同, 这里不再赘述. 可以证明, 更高级构造体的最优构形也都将退化为第一级构造体.

5 优化参数对最大热阻的影响

前述工作主要是寻找体点导热问题的理论最优构形. 但在实际应用中, 理论求解的最优状态往往无法满足, 例如 $n_1 \rightarrow \infty$ 等. 因此有必要进一步探讨优化参数对最大热阻的影响规律. 考虑到实际中 n_1 不能无限大, 第一级构造体外形 H_1/L_1 也通常是给定的, 本节主要探讨单元体数 n_1 对最大热阻的影响和第一级构造体外形(长宽比)对最大热阻的影响.

图5 常数项 C_1 与 m 关系曲线 图6 最优 Φ_0/Φ_1 与 H_1/L_1 关系曲线 图7 最小最大热阻与 H_1/L_1 关系曲线

实际中 n_1 只能取具体的值, 而非无限值. 考察 n_1 取值对最大热阻的影响. 根据式(19), 并考虑到 $H_1/L_1=4/(n_1 a)$, 经整理后得第一级构造体的最大热阻为

$$\frac{\Delta T_{1,\max}}{q'' A_1 / k_0} = \frac{4}{9\hat{k}(\phi_1 - \Phi_0)} \frac{L_1}{H_1} + \frac{4}{9\hat{k}(\phi_1 - \Phi_0)} \frac{L_1}{H_1} \cdot C_1^3 \left(\frac{\Phi_0}{\phi_1 - \Phi_0}, \frac{H_1}{L_1} \right) + \frac{1}{2n_1^2} \frac{L_1}{H_1}. \quad (38)$$

由式(38)可知, n_1 仅影响等式右边的第三项. 因此, 当 H_1/L_1 及 Φ_0/ϕ_1 取定值, 而 n_1 取较大值时, 继续增

加 n_1 对最大热阻的影响很小, 实际应用中通过无限增加 n_1 来减小最大热阻是不合理的, n_1 取定某个较大值就能起到较好的冷却效果.

实际应用中, 待冷却区域的外形通常是一定, 对于矩形区域来说, 就是其长宽比是一定的. 对于特定的长宽比, 也应有相应的最优高导热材料分布. 根据式(21), 图6和7分别给出了第一级构造体长宽比 H_1/L_1 与最优 Φ_0/ϕ_1 的关系曲线, 以及 H_1/L_1 与最小最大热阻的关系曲线.

从图6可以看出, $(\Phi_0/\phi_1)_{\text{opt}}$ 随 H_1/L_1 单调增大, 也即随着构造体的长宽比的增大, 单元体中分配的高导热材料比例相应增大. 这一结论符合常理, 当 H_1/L_1 变大时, D_1 高导热通道的长度变小, 其分配的高导热材料面积也应减少. 实际应用中, 应根据图6中曲线, 选择合适的高导热材料分配比例 Φ_0/ϕ_1 , 从而使非最优 H_1/L_1 下, 产热区域也能有效冷却.

图7表明, 最大热阻最小值先随 H_1/L_1 增大而减少, 而后随 H_1/L_1 增大而增大, 最大热阻在 $H_1/L_1=2$ 附近取最小值, 且在最小值附近变化缓慢. 因此实际应用中, 应尽量使 $H_1/L_1=2$, 以取得更小的最大热阻, 当 H_1/L_1 一定时, 也可通过优化高导热材料分布, 来有效降低最大热阻. 另外, $(n_1 a)_{\text{opt}} \approx 2$ 意味着矩形产热区域是扁长形, 而非正方形或长条形, 这与人们的普遍认识是有偏差的. 在最近关于体点导热优化的文献[45~48]中, 都是将产热区域外形设定为正方形, 且没有对产热区域的外形进行优化, 因此本文的这一研究结论对实际工程应用更具指导意义.

6 数值模拟与对比分析

为进一步验证本文理论推导的正确性, 采用 Anasys 有限元软件分别模拟文献[35](定截面导热通道下, 释放“上一级构造体最优”约束后的优化结果)给出树网结构与本文给出树网结构的实际导热情况.

取 $H_1/L_1=2$, $\phi_1=0.1$, $\hat{k}=100$, $\Phi_0/\phi_1=0.5$. 根据本文优化结果, 单元体长宽比无限小, 单元体个数无限多, 单元体高导热材料占比 $\phi_0(n)$ 简化为连续函数 $\phi_0(x)$, 但实际中无法实现. 这里取单元体个数 n_1 分别为6和8, 单元体中高导热材料占比 $\phi_0(n)$ 近似为函数 $\phi_0(x)$ 在单元体宽度上的积分, 也即

$$\phi_0(n) = \begin{cases} \frac{H_0}{3} \int_{(n-1)H_0}^{nH_0} \phi_0(x) dx, & n_1 = 6, n = 1, 2, 3, \\ \frac{H_0}{4} \int_{(n-1)H_0}^{nH_0} \phi_0(x) dx, & n_1 = 8, n = 1, 2, 3, 4, \end{cases} \quad (39)$$

将式(16)代入上式, 得到 $n_1=6$ 时, $\phi_0(n)$ 分别为 0.0336, 0.0436, 0.0727; $n_1=8$ 时, $\phi_0(n)$ 分别为 0.0335, 0.04, 0.0531, 0.0753. 将 $\phi_0(n)$ 代入式(2), 得到各单元体内高导热通道外形, 将 $\phi_1 - \phi_0 = 0.05$ 代入式(8), 得到 D_1 高导热通道最优外形.

图 8 给出了文献[35]最优构形的温度分布云图, 图 9 给出了本文优化结果的温度分布云图. 从图 8 可

以看出, 当高导热材料均匀分布在各单元体中时, 最大温度点出现在离冷源最近的点(图中 P 点), 且高温区域集中在 P 点附近, 整个区域的温度分布很不均匀, $n_1=6$ 时, 最大温差为 167.4 K, $n_1=8$ 时, 最大温差为 159.8 K. 而当高导热材料非均匀分布在各单元体中时, 如图 9 所示, 高温区域相对均匀分布在矩形产热区域的上下两条边界上, 最大温度点也不一定位于 P 点, 最大温度点位置与模型的离散误差有关. 另外, 高导热材料非均匀分布下最大温差比均匀分布时要大为降低, $n_1=6$ 时, 最大温差为 93.5 K, $n_1=8$ 时, 最大温差为 71.8 K. 以上数值模拟表明, 通过将高导热材

图 8 均匀分布下温度分布云图(单位: K)

(a) $n_1=6$; (b) $n_1=8$

图 9 非均匀分布下温度分布云图(单位: K)

(a) $n_1=6$; (b) $n_1=8$

表 1 本文与文献[29,33,35]优化结果对比

	最优构造体	$n_{1,\text{opt}}$	$(H_0 / L_0)_{\text{opt}}$	$(H_1 / L_1)_{\text{opt}}$	$(\Phi_0 / \phi_1)_{\text{opt}}$	$\left(\frac{\Delta T_{1,\text{max}}}{q'' A_1 / k_0}\right)_{m,m,m}$
文献[29]	第一级构造体	$(\hat{k}\phi)^{1/2}$	$2 / (\hat{k}\phi_0)^{1/2}$		0.5	$\sqrt{2} / (\hat{k}\phi)$
文献[33]	第一级构造体	$\frac{3\sqrt{2}}{4}(\hat{k}\phi)^{1/2}$	$\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{\hat{k}\phi_0}\right)^{1/2}$	$\sqrt{2}$	0.5	$(8\sqrt{2}/9) / (\hat{k}\phi)$
文献[35]	第一级构造体	∞	∞	2	0.5	$1 / (\hat{k}\phi)$
本文结果	第一级构造体	∞	∞	≈ 1.8391	≈ 0.5	$0.7431 / (\hat{k}\phi)$

料非均匀分布在各单元体中,可以有效降低热阻。

将本文的理论优化结果与文献[29,33,35]的理论优化结果相对比,如表 1 所示。其中文献[29]是定截面导热通道下的优化结果;文献[33]是变截面导热通道的优化结果;文献[35]是定截面导热通道下,释放“上一级构造体最优”约束后的优化结果。对这些最优构型进行对比可以发现,最优的构造体级数都是第一级构造体,更高级的构造体并不会导致更优结果;随着约束条件的不断释放,理论最大热阻值不断减小,本文的最大热阻最小值相比文献[29,33,35],分别下降约 47.4%, 40.1%和 25.7%;在释放上一级构造体最优这一约束条件下,最优构造体的最优外形也是类似的,长宽比等于或约等于 2,单元体高导热材料面积占总面积之比等于或约等于 0.5。

7 结论

本文在“变截面导热通道”和释放“上一级构造体最优”的基础上,考虑到高导热材料非均匀分布,对矩形区域体点导热问题进行重新优化。理论推导和数值模拟都表明,在考虑高导热材料非均匀分布后,理论最大热阻最小值进一步降低,结构的导热效果得以增强。考虑到实际应用中,理论最大热阻最小值对应的最优构形并不可能实现,本文还分析了单元体数和构造体长宽比对最大热阻最小值的影响。结果表明:随着单元体数的增加,最大热阻最小值的变化越来越小,故实际中无需无限增大单元体数来减少最大热阻;而矩形区域长宽比取 $H_1/L_1=2$ 附近时,对应的最大热阻最小。这些优化结论对于工程应用具有指导意义。

致谢 审稿人对本文提出了细心、无私和充满建设性的意见,在此致以诚挚的谢意!

参考文献

- 1 夏再忠, 过增元. 用生命演化过程模拟导热优化. 自然科学进展, 2001, 8: 845–852
- 2 程新广, 李志信, 过增元. 基于仿生优化的高效导热通道的构造. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2003, 33: 251–256
- 3 Mathieu-Potvin F, Gosselin L. Optimal conduction pathways for cooling a heat-generating body: A comparison exercise. Int J Heat Mass Transfer, 2007, 50: 2996–3006
- 4 Xu X, Liang X G, Ren J X. Optimization of heat conduction using combinatorial optimization algorithms. Int J Heat Mass Transfer, 2007, 50: 1675–1682
- 5 Boichot R, Luo L, Fan Y. Tree-network structure generation for heat conduction by cellular automation. Energy Convers Mgmt, 2009, 50: 376–386
- 6 Gersborg-Hansen A, Bendsoe M P, Sigmund O. Topology optimization of heat conduction problems using the finite volume method. Struct Multidisc Optim, 2006, 31: 251–259
- 7 Liu S, Zhang Y. Design of conducting paths based on topology optimization. Heat Mass Transfer, 2008, 44: 1217–1227
- 8 Bejan A. Street network theory of organization in nature. J. Advanced Transportation, 1996, 30: 85–107
- 9 Bejan A. Shape and Structure, from Engineering to Nature. Cambridge UK: Cambridge University Press, 2000
- 10 Bejan A, Lorente S. Constructal theory of generation of configuration in nature and engineering. J Appl Phys, 2006, 100: 041301

- 11 Bejan A, Merckx G W. *Constructal Theory of Social Dynamics*. New York: Springer, 2007
- 12 Bejan A, Lorente S. *Design with Constructal Theory*. New Jersey: Wiley, 2008
- 13 Bejan A, Lorente S, Miguel A F, et al. *Constructal Human Dynamics, Security & Sustainability*. Amsterdam: IOS Press, 2009
- 14 谢志辉, 陈林根, 孙丰瑞. 以焓耗散最小为目标的空腔几何构形优化. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2009, 39: 1949–1957
- 15 肖庆华, 陈林根, 孙丰瑞. 基于焓耗散率最小的“盘点”导热构形优化. 科学通报, 2010, 55: 2427–2437
- 16 Bejan A, Lorente S. The constructal law and the evolution of design in nature. *Phys Life Rev*, 2011, 8: 209–240
- 17 肖庆华, 陈林根, 孙丰瑞. 基于焓耗散率和流阻最小的冷却流道构形优化. 中国科学: 技术科学, 2011, 41: 251–261
- 18 谢志辉, 陈林根, 孙丰瑞. T 形肋焓耗散率最小与最大热阻最小构形优化的比较研究. 中国科学: 技术科学, 2011, 41: 962–970
- 19 肖庆华, 陈林根, 孙丰瑞. 基于变截面单元体的焓耗散率最小导热构形优化. 科学通报, 2011, 56: 1401–1410
- 20 冯辉君, 陈林根, 孙丰瑞. 基于焓耗散率最小的三维圆柱形单元体和微、纳米尺度下矩形、三角形单元体体点导热构形优化. 中国科学: 技术科学, 2012, 42: 257–271
- 21 陈林根. 构形理论及其应用的研究进展. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2012, 42: 505–524
- 22 谢志辉, 陈林根, 孙丰瑞. 以最大热阻最小化为目标的二级组合 Y 形肋构形优化. 中国科学: 技术科学, 2012, 42: 1188–1196
- 23 Bejan A, Lorente S. Constructal law of design and evolution: Physics, biology, technology, and society. *J Appl Phys*, 2013, 113: 151301
- 24 冯辉君, 陈林根, 谢志辉, 等. 对流和辐射边界条件下轧钢加热炉壁绝热层焓构形优化. 科学通报, 2014, 59: 1417–1422
- 25 龚舒文, 陈林根, 谢志辉, 等. 基于焓理论的圆柱体热源构形研究. 科学通报, 2014, 59: 3609–3614
- 26 冯辉君, 陈林根, 谢志辉, 等. 基于焓耗散率最小的“盘点”脉管网络构形优化. 中国科学: 技术科学, 2014, 44: 71–80
- 27 Feng H J, Chen L G, Xie Z H, et al. Generalized constructal optimization for secondary cooling process of slab continuous casting based on entransy theory. *Sci China Tech Sci*, 2014, 57: 784–795
- 28 Feng H J, Chen L G, Xie Z H, et al. Constructal entransy dissipation rate minimization for helm-shaped fin with inner heat sources. *Sci China Tech Sci*, 2015, 58: 1084–1090
- 29 Bejan A. Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume. *Int J Heat Mass Transfer*, 1997, 40: 799–816
- 30 Ghodoossi L, Egrican N. Exact solution for cooling of electronics using constructal theory. *J Appl Phys*, 2003, 93: 4922–4929
- 31 Wei S H, Chen L G, Sun F R. The volume-point constructal optimization for discrete variable cross-section conducting path. *Appl Energy*, 2009, 86: 1111–1118
- 32 Ledezma G A, Bejan A, Errera M R. Constructal tree networks for heat transfer. *J Appl Phys*, 1997, 82: 89–100
- 33 Zhou S B, Chen L G, Sun F R. Optimization of constructal volume-point conduction with variable cross-section conducting path. *Energy Convers Mgmt*, 2007, 48: 106–111
- 34 Neagu M, Bejan A. Constructal-theory tree networks of ‘constant’ thermal resistance. *J Appl Phys*, 1999, 86: 1136–1144
- 35 伍文君, 陈林根, 孙丰瑞. 导热优化的“树网”构造法的改进. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2006, 36: 773–781
- 36 魏曙寰, 陈林根, 孙丰瑞. 基于矩形单元体的以焓耗散最小为目标的“体点”导热构形优化. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2009, 39: 278–285
- 37 Wei S H, Chen L G, Sun F R. Constructal entransy dissipation minimization for “volume-point” heat conduction without the premise of optimized last-order construct. *Int J Exergy*, 2010, 7: 627–639
- 38 魏曙寰, 陈林根, 孙丰瑞. 基于焓耗散率最小的离散和连续变截面导热通道构形优化. 中国科学: 技术科学, 2010, 40: 1189–1200
- 39 Guo Z Y, Zhu H Y, Liang X G. Entransy: A physical quantity describing heat transfer ability. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, 50: 2545–2556
- 40 Chen Q, Liang X G, Guo Z Y. Entransy theory for the optimization of heat transfer: A review and update. *Int J Heat Mass Transfer*, 2013, 63: 65–81
- 41 陈林根. 焓理论及其应用的进展. 科学通报, 2012, 57: 2815–2835
- 42 Chen L G. Progress in optimization of mass transfer processes based on mass entransy dissipation extremum principle. *Sci China Tech Sci*, 2014, 57: 2305–2327
- 43 Almgöble M, Bejan A. Conduction trees with spacings at the tips. *Int J Heat Mass Transfer*, 1999, 42: 3739–3756
- 44 Almgöble M, Bejan A. Constructal optimization of nonuniformly distributed tree-shaped flow structures for conduction. *Int J Heat Mass Transfer*, 2001, 44: 4185–4194
- 45 Hajmohammadi M, Abianeh A, Moezzinajafabadi M, et al. Fork-shaped highly conductive pathways for maximum cooling in a heat generating piece. *Appl Thermal Engng*, 2013, 61: 228–235
- 46 Lorenzini G, Biserni C, Rocha L. Constructal design of X-shaped conductive pathways for cooling a heat-generating body. *Int J Heat Mass*

- Transfer, 2013, 58: 513–520
- 47 Lorenzini G, Biserni C, Rocha L. Constructal design of non-uniform X-shaped conductive pathways for cooling. *Int J Thermal Sci*, 2013, 71: 140–147
- 48 Hajmohammadi M, Joneydi Shariatzadeh O, Moulod M, et al. Phi and Psi shaped conductive routes for improved cooling in a heat generating piece. *Int J Thermal Sci*, 2014, 77 : 66–74
- 49 Gosselin L, Bejan A. Constructal heat trees at micro and nanoscales. *J Appl Phys*, 2004, 96: 5852–5859
- 50 Chen L G, Feng H J, Xie Z H, et al. Constructal optimization for “disc-point” heat conduction at micro and nanoscales. *Int J Heat Mass Transfer*, 2013, 67: 704–11
- 51 陈林根, 冯辉君, 谢志辉, 等. 微、纳米尺度下圆盘焯耗散率最小构形优化. *物理学报*, 2013, 62: 134401
- 52 冯辉君, 陈林根, 谢志辉, 等. 微、纳米尺度下基于构形理论的树状圆盘整体导热性能优化. *工程热物理学报*, 2014, 35: 557–562

“Volume-point” heat conduction constructal optimization with nonuniformly distributed high conductivity material

WU WenJun, CHEN LinGen, XIE ZhiHui & SUN FengRui

Institute of Thermal Science and Power Engineering, Military Key Laboratory for Naval Ship Power Engineering, College of Power Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China

Based on the rectangular element and variable cross-section conducting path, the high effective-conduction channel distribution was re-optimized without premises that the last-order construct must be optimal and the high effective-conduction material is uniformly distributed in every element. The optimization results show that the optimal distribution of the area of high effective-conduction material in each element along the conducting path is nonuniformly. The optimal distribution of high effective-conduction material is deduced, and the maximum thermal resistance is reduced effectively. Further theoretical analysis reveals that increasing the number of elements is not always reducing the maximum thermal resistance remarkably, and the optimal aspect ratio of the rectangular area is close to 2.

constructal theory, volume-point heat conduction, generalized thermodynamic optimization

doi: 10.1360/N092015-00009