一类平面 3 次扩展拟齐次系统的分岔

献给张芷芬教授 90 华诞

石仁祥, 巩金慧, 于江*

上海交通大学数学系, 上海 200240

E-mail: srxahu@aliyun.com, zhuanshudabao@163.com, jiangyu@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2016-06-30; 接受日期: 2016-08-24; 网络出版日期: 2016-09-22; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11431008) 和上海市自然科学基金 (批准号: 15ZR1423700) 资助项目

摘要 本文研究一类平面 3 次扩展拟齐次多项式微分系统的分岔问题; 证明在 3 参数族 $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ 中, 此系统不存在极限环; 运用拟齐次吹胀 (blow-up) 和无穷远奇点的 Poincaré-Lyapunov 紧化等方法, 给出系统的全局拓扑相图.

关键词 扩展拟齐次系统 Poincaré-Lyapunov 紧化 分岔 全局拓扑相图

MSC (2010) 主题分类 34C05, 34C07, 34C23

1 引言和主要结果

考虑平面多项式微分系统

$$\dot{x}_1 = Q_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = Q_2(x_1, x_2), \quad (1.1)$$

其中 Q_1 和 Q_2 是 x_1 和 x_2 的 n 次多项式函数, 符号 “ $\cdot$ ” 表示关于自变量 t 求导. 下面介绍一些定义.

定义 1 如果存在 $\alpha_1, \alpha_2, \delta \in \mathbb{N}$, 使得对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}^+$, 都有

$$f(\lambda^{\alpha_1} x_1, \lambda^{\alpha_2} x_2) = \lambda^\delta f(x_1, x_2),$$

那么称函数 $f(x_1, x_2)$ 为权重 δ 的 (α_1, α_2) -拟齐次多项式.

定义 2 如果存在 $\alpha_1, \alpha_2, \delta \in \mathbb{N}$, 使得对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}^+$, 有

$$Q_1(\lambda^{\alpha_1} x_1, \lambda^{\alpha_2} x_2) = \lambda^{\alpha_1 - 1 + \delta} Q_1(x_1, x_2), \quad Q_2(\lambda^{\alpha_1} x_1, \lambda^{\alpha_2} x_2) = \lambda^{\alpha_2 - 1 + \delta} Q_2(x_1, x_2),$$

那么称系统 (1.1) 为拟齐次的, 其中 α_1 和 α_2 为系统 (1.1) 的权重指数, δ 为相对于 α_1 和 α_2 的权重. 称向量 $\mathbf{w} = (\alpha_1, \alpha_2, \delta)$ 为系统 (1.1) 的权重向量. 称 $(Q_1, Q_2)^T$ 为权重向量 $\mathbf{w}$ 的拟齐次向量场. 特别地, 当 $\alpha_1 = \alpha_2$ 时, 系统 (1.1) 为我们所熟知的 $\alpha_1 - 1 + \delta$ 次的齐次多项式微分系统.

英文引用格式: Shi R X, Gong J H, Yu J. Bifurcation of a class of extended quasi-homogeneous polynomial differential systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 187–198, doi: 10.1360/N012016-00128

定义 3 设 $\mathbf{w}_m = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \delta^*)$ 和 $\mathbf{w} = (\alpha_1, \alpha_2, \delta)$ 为系统 (1.1) 的任意权重向量. 如果满足

$$\alpha_1 \geq \alpha_1^*, \quad \alpha_2 \geq \alpha_2^*, \quad \delta \geq \delta^*,$$

那么称权重向量 $\mathbf{w}_m$ 为系统 (1.1) 的最小权重向量.

定义 4 考虑如下形式的平面系统:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \cdots + \mathbf{Q}_\delta, \quad (1.2)$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{Q}_\delta \in \mathbb{R}^2$ 是权重向量为 $(\alpha_1, \alpha_2, \delta)$ 的拟齐次多项式向量场. 如果

$$\mathbf{Q}_i = f_i \cdot \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \mathbf{x},$$

其中 f_i 是权重为 $i-1$ ($i = 1, 2, \dots, \delta-1$) 的 (α_1, α_2) - 拟齐次多项式, 则称 (1.2) 为拟齐次多项式向量场 $\mathbf{Q}_\delta$ 的扩展拟齐次系统, 参见文献 [1].

至今, 已有许多文献研究了齐次和拟齐次多项式微分系统. 文献 [2] 研究了齐次和拟齐次中心分支出极限环的上界. 文献 [3] 提出了获得给定 n 次多项式系统的所有拟齐次多项式系统的算法. 文献 [4] 得到了 3 次拟齐次系统的中心条件. 文献 [5] 证明了 4 次拟齐次且非齐次系统没有中心, 并给出了它们的拓扑相图. 文献 [6] 证明了 4 次拟齐次且非齐次系统有 2 类中心, 并给出了它们的拓扑相图. 文献 [1, 7] 研究了 3 维扩展拟齐次系统的孤立闭轨个数的上界. 文献 [8] 研究了一类特殊的平面多项式系统的极限环, 其向量场由 2 个具有特定权重和权指的拟齐次多项式构成, 可以将其转化为 Abel 方程研究. 我们知道 n 次多项式可以按权重向量展开成拟齐次多项式之和. 那么本文中的一个自然问题就是“估计形如 (1.2) 的扩展拟齐次系统的极限环上界”.

文献 [4] 考虑了平面 3 次拟齐次多项式系统 (1.1) (其中 Q_1 和 Q_2 是不可约的), 将其拓扑等价地分为 7 类, 并证明了仅有一类具有中心, 即

$$\dot{x}_1 = x_2(ax_1 + bx_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2^2, \quad (1.3)$$

其中 $(a-2)^2 + 8b < 0$. 拟齐次微分系统 (1.3) 的最小权重向量为 $\mathbf{w}_m = (2, 1, 2)$.

我们将研究拟齐次微分系统 (1.3) 对应的扩展 (一项) 拟齐次微分系统. 根据定义 4, 系统可写成

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2,$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$,

$$\mathbf{Q}_1 = f_0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} x_2(ax_1 + bx_2^2) \\ x_1 + x_2^2 \end{pmatrix}.$$

易知 f_0 为零次齐次多项式, 即 $f_0 \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$. 于是, 系统 (1.3) 的扩展拟齐次微分系统为

$$\dot{x}_1 = 2cx_1 + ax_1x_2 + bx_2^3, \quad \dot{x}_2 = cx_2 + x_1 + x_2^2. \quad (1.4)$$

当 $c = 0$ 时, (1.4) 为 3 次拟齐次系统. 此时, 系统有唯一有限远奇点, 参见文献 [2]. Aziz 等^[4] 证明了该奇点是中心当且仅当系统参数满足 $(a-2)^2 + 8b < 0$. 我们将研究扩展拟齐次微分系统 (1.4) 的动力学行为.

定理 1 系统 (1.3) 在参数 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ 空间中的分支图和全局拓扑相图见图 1.

定理 2 扩展拟齐次多项式微分系统 (1.4) 没有极限环; 进一步, 可得系统 (1.4) 的分支图和全局拓扑相图 (见图 2).

图 1 拟齐次系统 (1.3) 在 (a, b) 参数空间中的分岔图及拓扑相图

图 2 当 $c > 0$ 时, 扩展拟齐次系统 (1.4) 在 (a, b) 参数空间中的分岔图及拓扑相图

第 2 节给出 $c = 0$ 时系统 (1.4) 在 (a, b) 参数空间的全局拓扑相图和分岔图. 第 3 节证明 $c \neq 0$ 时扩展拟齐次微分系统 (1.4) 不存在极限环, 并且给出当 $c > 0$ 时, 该系统的全局拓扑相图和分岔图; 当 $c < 0$ 时, 拓扑相图可类似讨论, 略去.

2 拟齐次系统 (1.4) 在 $c = 0$ 时的全局拓扑相图

本节证明定理 1. 将参数 (a, b) 空间分为以下集合 (见分岔图 1):

$$\begin{aligned} A &:= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a-2)^2 + 8b < 0\}, \\ B &:= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a-2)^2 + 8b > 0, a > b\}, \\ C &:= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a-2)^2 + 8b > 0, a < b\}, \\ D &:= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a-2)^2 + 8b = 0, (a, b) \neq (-2, -2)\}, \\ E &:= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = b, (a, b) \neq (-2, -2)\}, \\ F &:= \{(-2, -2)\}. \end{aligned}$$

定理 1 的证明 (1) 当 $a = b$ 时, 系统 (1.3) 可写成

$$\dot{x}_1 = ax_2(x_1 + x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2^2, \quad (2.1)$$

此时有充满奇点的不变代数曲线

$$x_1 + x_2^2 = 0.$$

系统 (2.1) 的通解为

$$x_1 - \frac{a}{2}x_2^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

这样, 我们得到了原点附近相图的所有情形, 见图 1.

(2) 当 $a \neq b$ 时, $ax_1x_2 + bx_2^3$ 与 $x_1 + x_2^2$ 是不可约的. 可知, 原点 $O(0, 0)$ 是系统 (1.3) 的唯一奇点, 且为退化的奇点.

下面首先研究原点附近的拓扑结构. 通过拟齐次吹胀 (blow-up), 将退化奇点吹胀 (blow-up) 成圆周上的初等奇点. 令

$$x_1 = r^2 \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad dt = \frac{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{r} d\tau,$$

系统 (1.3) 化为

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= r \sin \theta [a \cos^2 \theta + b \cos \theta \sin^2 \theta + \cos \theta + \sin^2 \theta], \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= 2 \cos^2 \theta + (2-a) \cos \theta \sin^2 \theta - b \sin^4 \theta. \end{aligned} \quad (2.2)$$

当 $\theta \neq k\pi$ 时, 可将 (2.2) 的第二方程改写成

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \sin^4 \theta \left[2 \left(\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right)^2 + (2-a) \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - b \right]. \quad (2.3)$$

当判别式 $D = (2-a)^2 + 8b < 0$ 时, $\frac{d\theta}{d\tau} \neq 0$. 由文献 [4] 知, 原点为中心. 当判别式 $D = (2-a)^2 + 8b \geq 0$ 时, 方程 (2.2) 有渐近方向 θ_{ij} ($i, j = 1, 2$), 满足 $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$, 解得

$$\frac{\cos \theta_{1j}}{\sin^2 \theta_{1j}} = \frac{a-2+\sqrt{D}}{4}, \quad \frac{\cos \theta_{2j}}{\sin^2 \theta_{2j}} = \frac{a-2-\sqrt{D}}{4}, \quad \theta_{i1} \leq \theta_{i2}.$$

当 $\theta \neq k\pi$ 时, 可将 (2.2) 的第一方程改写成

$$\frac{dr}{d\tau} = r \sin^3 \theta \left[\left(a \left(\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right)^2 + b \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \sin^2 \theta + \left(\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} + 1 \right) \right].$$

由方程 (2.3), 在 $\theta = \theta_{ij}$ 处, 我们有

$$a \frac{\cos \theta_{ij}}{\sin^2 \theta_{ij}} + b = 2 \left(\frac{\cos \theta_{ij}}{\sin^2 \theta_{ij}} \right)^2 + 2 \frac{\cos \theta_{ij}}{\sin^2 \theta_{ij}},$$

于是,

$$\left. \frac{dr}{d\tau} \right|_{\theta=\theta_{ij}} = r \sin \theta_{ij} (2 \cos^2 \theta_{ij} + \sin^2 \theta_{ij}) \left(\frac{\cos \theta_{ij}}{\sin^2 \theta_{ij}} + 1 \right).$$

注意 $r > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \left(\left. \frac{dr}{d\tau} \right|_{\theta=\theta_{1j}} \right) &= \operatorname{sgn}(\sin \theta_{1j}) \operatorname{sgn} \left(\frac{a+2+\sqrt{D}}{4} \right), \\ \operatorname{sgn} \left(\left. \frac{dr}{d\tau} \right|_{\theta=\theta_{2j}} \right) &= \operatorname{sgn}(\sin \theta_{2j}) \operatorname{sgn} \left(\frac{a+2-\sqrt{D}}{4} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

因为

$$(a+2+\sqrt{D})(a+2-\sqrt{D}) = 8(a-b),$$

所以当 $a \neq b$ 时,

$$\operatorname{sgn}(\dot{r}|_{\theta=\theta_{ij}}) \neq 0, \quad i, j = 1, 2,$$

并且,

$$\begin{aligned} a+2+\sqrt{D} > 0, \quad a+2-\sqrt{D} > 0 &\Leftrightarrow a > b, \quad a > -2, \\ a+2+\sqrt{D} < 0, \quad a+2-\sqrt{D} < 0 &\Leftrightarrow a > b, \quad a < -2, \\ a+2+\sqrt{D} > 0, \quad a+2-\sqrt{D} < 0 &\Leftrightarrow a < b. \end{aligned} \quad (2.5)$$

具体分成两种情形讨论.

情形 1 $D = 0$.

当 $a = 2$ 时, 由 $D = 0$ 得 $b = 0$. 所以,

$$\theta_{11} = \theta_{21} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{12} = \theta_{22} = \frac{3\pi}{2}.$$

显然,

$$\left. \frac{dr}{d\tau} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = r > 0, \quad \left. \frac{dr}{d\tau} \right|_{\theta=\frac{3\pi}{2}} = -r < 0.$$

当 $a < 2$ 时,

$$\theta_{11} = \theta_{21} =: \theta_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \theta_{12} = \theta_{22} =: \theta_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right);$$

当 $a > 2$ 时,

$$\theta_{11} = \theta_{21} =: \theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \theta_{12} = \theta_{22} =: \theta_2 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right).$$

由 (2.4), 有

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{dr}{d\tau} \Big|_{\theta=\theta_1}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{a+2}{4}\right), \quad \operatorname{sgn}\left(\frac{dr}{d\tau} \Big|_{\theta=\theta_2}\right) = -\operatorname{sgn}\left(\frac{a+2}{4}\right).$$

因此, 当 $a > -2$ 时, 有

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{dr}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_1}\right) > 0, \quad \operatorname{sgn}\left(\frac{dr}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_2}\right) < 0;$$

当 $a < -2$ 时, 有

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{dr}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_1}\right) < 0, \quad \operatorname{sgn}\left(\frac{dr}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_2}\right) > 0.$$

情形 2 $D > 0$.

由

$$\frac{\cos \theta_{1j}}{\sin^2 \theta_{1j}} = \frac{a-2+\sqrt{D}}{4}, \quad \frac{\cos \theta_{2j}}{\sin^2 \theta_{2j}} = \frac{a-2-\sqrt{D}}{4}, \quad \theta_{i1} \leq \theta_{i2},$$

可以判断得到当 $b > 0$ 时,

$$0 < \theta_{11} < \frac{\pi}{2} < \theta_{21} < \pi < \theta_{22} < \frac{3\pi}{2} < \theta_{12} < 2\pi.$$

进一步地, 由 (2.4) 和 (2.5) 可知, 当 $a > b > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\left(\frac{dr}{d\tau} \Big|_{\theta=\theta_{11}}\right) &> 0, & \operatorname{sgn}\left(\frac{dr}{d\tau} \Big|_{\theta=\theta_{12}}\right) &< 0, \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{dr}{d\tau} \Big|_{\theta=\theta_{21}}\right) &> 0, & \operatorname{sgn}\left(\frac{dr}{d\tau} \Big|_{\theta=\theta_{22}}\right) &< 0. \end{aligned}$$

当 $b > 0, a < b$ 时, 有

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\left(\frac{dr}{d\tau} \Big|_{\theta=\theta_{11}}\right) &> 0, & \operatorname{sgn}\left(\frac{dr}{d\tau} \Big|_{\theta=\theta_{12}}\right) &< 0, \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{dr}{d\tau} \Big|_{\theta=\theta_{21}}\right) &< 0, & \operatorname{sgn}\left(\frac{dr}{d\tau} \Big|_{\theta=\theta_{22}}\right) &> 0. \end{aligned}$$

类似讨论 $b \leq 0$, 我们可以确定沿 $\theta = \theta_{ij}$ 的轨道渐近方向, 见表 1.

下面举两个例子说明 (1.3) 在原点附近吹胀 (blow-up) 相图和缩并 (blow-down) 相图.

(1) 当 $D > 0, a > b > 0$ 时, 系统 (1.3) 在奇点附近的吹胀 (blow-up) 和缩并 (blow-down) 示意图 (见图 3).

(2) 当 $D > 0, a < b, b > 0$ 时, 系统 (1.3) 在奇点附近的吹胀 (blow-up) 和缩并 (blow-down) 示意图 (见图 4).

最后, 无穷远处奇点的研究与原点处奇点类似. 我们运用 Poincaré-Lyapunov 紧化原理, 将平面系

表 1 $b \leq 0$ 时, 系统 (2.2) 中 $dr/d\tau$ 的符号

	$a < b < 0$	$b < a < -2$	$-2 < a < 2, b > a$	$b < 0, a < 2$
$\operatorname{sgn}(\frac{dr}{d\theta} _{\theta=\theta_{11}})$	+	-	+	+
$\operatorname{sgn}(\frac{dr}{d\theta} _{\theta=\theta_{12}})$	-	+	-	-
$\operatorname{sgn}(\frac{dr}{d\theta} _{\theta=\theta_{21}})$	-	-	+	+
$\operatorname{sgn}(\frac{dr}{d\theta} _{\theta=\theta_{22}})$	+	+	-	-

图 3 (a) 吹胀 (blow-up); (b) 缩并 (blow-down)

图 4 (a) 吹胀 (blow-up); (b) 缩并 (blow-down)

统紧化到圆盘上. 令

$$x_1 = \frac{\cos \theta}{z^2}, \quad x_2 = \frac{\sin \theta}{z}, \quad dt = z(2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\tau. \quad (2.6)$$

将系统 (1.3) 化为

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= -z \sin \theta [a \cos^2 \theta + b \cos \theta \sin^2 \theta + \cos \theta + \sin^2 \theta], \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= 2 \cos^2 \theta + (2 - a) \cos \theta \sin^2 \theta - b \sin^4 \theta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

我们注意到, 系统 (2.7) 与 (2.2) 的 $d\theta/d\tau$ 相同, $dz/d\tau$ 的表达式相差一个负号. 因此, 系统 (2.7) 在赤道 $z = 0$ 上的奇点与系统 (2.2) 在 $r = 0$ 上的奇点相同, 而渐近方向相反. 因而, 类似可讨论在 $z = 0$ 上的动力学行为.

综上所述, 我们可以在 Poincaré-Lyapunov 紧化圆盘上给出系统 (1.3) 的全局相图, 见图 1. $\square$

3 扩展拟齐次系统 (1.4) 的全局拓扑相图

本节证明定理 2. 令

$$x_1 = r^2 \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad dt = \frac{\cos^2 \theta + 1}{r} d\tau,$$

系统 (1.4) 化为

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= c(\cos^2 \theta + 1) + (a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta \cos \theta + \cos \theta + \sin^2 \theta) \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= 2 \cos^2 \theta + (2 - a) \cos \theta \sin^2 \theta - b \sin^4 \theta. \end{aligned} \quad (3.1)$$

于是, (3.1) 中两式作比, 可得

$$\frac{dr}{d\theta} + p(\theta)r = q(\theta), \quad (3.2)$$

其中

$$\begin{aligned} p(\theta) &= -\frac{(a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta \cos \theta + \cos \theta + \sin^2 \theta) \sin \theta}{2 \cos^2 \theta + (2 - a) \cos \theta \sin^2 \theta - b \sin^4 \theta}, \\ q(\theta) &= \frac{c(\cos^2 \theta + 1)}{2 \cos^2 \theta + (2 - a) \cos \theta \sin^2 \theta - b \sin^4 \theta}. \end{aligned}$$

定理 2 的证明 首先, 证明系统 (3.2) 没有极限环. 注意当 $c = 0$ 时, $q(\theta) \equiv 0$. 此时, 系统 (3.2) 相应于拟齐次系统 (1.3).

情形 1 当 $(a - 2)^2 + 8b < 0$ 时, Aziz 等^[4] 已证明拟齐次系统 (1.3) 的唯一奇点为中心, 即 $q(\theta) \equiv 0$ 时, 系统 (3.2) 相应齐次系统的任一非零解都以 2π 为周期. 因此,

$$\bar{p} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta = 0.$$

那么, 当 $c \neq 0$, 即 $q(\theta)$ 不恒等于 0 时, 由于 $\bar{p} = 0$, 所以, 非齐次系统 (3.2) 没有极限环.

情形 2 当 $(a - 2)^2 + 8b \geq 0$ 时, 注意到经过吹胀 (blow-up) 变换后, 系统 (3.1) 和 (2.2) 有相同的 $d\theta/d\tau$. 我们知道, 方程 (2.3) 在 $(a - 2)^2 + 8b \geq 0$ 的条件下有解, 所以, 系统 (3.1) 有连接原点和无穷远的不变曲线, 因此, 系统 (3.2) 不可能有极限环.

综上, 系统 (1.4) 没有极限环.

其次, 我们进一步研究系统 (1.4) 在 (a, b) - 参数空间的相图. 与定理 1 的证明类似, 我们按照 $a = b$ 和 $a \neq b$ 分成两大类情形进行讨论.

情形 1 当 $a \neq b$ 时, 作 Poincaré-Lyapunov 紧化 (2.6), 系统 (1.4) 转化为

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= -z \sin \theta [a \cos^2 \theta + b \cos \theta \sin^2 \theta + \cos \theta + \sin^2 \theta] - (1 + \cos^2 \theta) cz^2, \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= 2 \cos^2 \theta + (2 - a) \cos \theta \sin^2 \theta - b \sin^4 \theta. \end{aligned} \quad (3.3)$$

对比系统 (2.7), 系统 (3.3) 多一个 z 的二次项 $-(1 + \cos^2 \theta)z^2$, 不影响系统 (1.4) 在无穷远处的性态. 因此, 当 $a \neq b$ 时, 系统 (1.4) 与 (1.3) 在无穷远处的相图一致. 我们只需研究系统 (1.4) 在有限远处的动力学行为即可. 下面仅证明 $c > 0$ 的情形.

情形 1.1 当 $D = (a - 2)^2 + 8b > 0$ 时, 系统 (1.4) 有三个奇点, 分别为

$$O(0, 0), \quad M\left(-\frac{\xi + (b + 2)\sqrt{D}}{2(b - a)^2}c^2, \frac{a + 2 + \sqrt{D}}{2(b - a)}c\right), \quad N\left(-\frac{\xi - (b + 2)\sqrt{D}}{2(b - a)^2}c^2, \frac{a + 2 - \sqrt{D}}{2(b - a)}c\right),$$

其中 $\xi = ab - 2a + 6b + 4$. 易知, $O(0, 0)$ 为不稳定结点. 奇点 M 和 N 的线性近似系统矩阵 J 的行列式分别为

$$J_M = \det(J)|_M = \frac{\sqrt{D} + a + 2}{2(a - b)}c^2\sqrt{D}, \quad J_N = \det(J)|_N = \frac{\sqrt{D} - (a + 2)}{2(a - b)}c^2\sqrt{D}. \quad (3.4)$$

当 $b > a$ 时, $J_M J_N > 0$. 因为

$$\begin{aligned} \sqrt{(a - 2)^2 + 8b} + a + 2 &> \sqrt{(a - 2)^2 + 8a} + a + 2 = |a + 2| + (a + 2) \geq 0, \\ \sqrt{(a - 2)^2 + 8b} - (a + 2) &> \sqrt{(a - 2)^2 + 8a} - (a + 2) = |a + 2| - (a + 2) \geq 0, \end{aligned}$$

由 (3.4) 得 $J_M < 0$, $J_N < 0$. 因此, 当 $b > a$ 时, M 和 N 为鞍点.

当 $b < a$ 时, 可知 $J_M J_N < 0$. 进一步, 当 $b < a < -2$ 时, 有

$$\sqrt{(a - 2)^2 + 8b} + a + 2 < \sqrt{(a - 2)^2 + 8b} + a + 2 = |a + 2| + a + 2 = 0.$$

由 (3.4) 得 $J_M < 0$, 因此 $J_N > 0$, 所以 M 是鞍点. 又由于

$$\text{tr}((J|_N)^2 - 4J_N)|_N = \left[5c + \frac{(a + 2)(a + 2 - \sqrt{(a - 2)^2 + 8b})}{2(b - a)}c\right]^2 \geq 0,$$

所以 N 是结点.

同理可得, 当 $-2 < b < a$ 时, M 是结点, N 是鞍点.

情形 1.2 当 $(a - 2)^2 + 8b = 0$ 且 $(a, b) \neq (-2, -2)$ 时, 系统 (1.4) 有奇点

$$O(0, 0), \quad P\left(\frac{4c^2(a - 2)}{(a + 2)^2}, -\frac{4c}{a + 2}\right).$$

奇点 $O(0, 0)$ 为不稳定结点, 据文献 [9, 定理 7.1] 的标准方法分析可知, 奇点 P 为鞍结点. 事实上, 作平移变换

$$x = x_1 - \frac{4c^2(a - 2)}{(a + 2)^2}, \quad y = x_2 + \frac{4c}{a + 2},$$

将奇点 P 平移到原点. 再作仿射变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(a-6)c}{a+2} & -\frac{2c(a-2)}{a+2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix},$$

可得系统 (1.4) 在奇点 P 的标准型

$$\begin{aligned} \dot{s} &= P(s, t), \\ \dot{t} &= -ct + Q(s, t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中

$$\begin{aligned} P(s, t) &= \frac{a}{2}(t^2 - s^2) - (t + s)^2 - \frac{(a-2)^2}{8c}(t + s)^3, \\ Q(s, t) &= \frac{a}{2}(t^2 - s^2) + \frac{(a-2)^2}{8c}(t + s)^3, \end{aligned}$$

在 $O(0, 0)$ 充分小的邻域 $S_\delta(0, 0)$ 内存在解析解 $t = \phi(s)$, 并且 $\phi(0) = \phi'(0) = 0$. 因此可用待定系数法解得

$$\phi(s) = a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + \cdots, \quad s \in S_\delta(0, 0),$$

其中

$$a_2 = -\frac{a}{2c}, \quad a_3 = \frac{(a-2)^2}{8c^2}, \quad a_4 = -\frac{4a^2c + 3a(a-2)}{2c}, \quad \dots$$

令

$$\psi(s) = P(s, \phi(s)),$$

经计算可得

$$\psi(s) = \frac{a+2}{2}s^2 - \frac{(a+2)^2}{8c}s^3 - \frac{a(a^2 - 12a + 12)}{2c} + \cdots$$

因为 $a \neq -2$, 所以, 由文献 [9, 定理 7.1] 可得奇点 $O(0, 0)$ 为系统 (3.5) 的鞍结点. 因此, 奇点 P 为系统 (1.4) 的鞍结点, 并且可以计算得出, 鞍结点 P 在不变曲线 $b_1 x_2^2 + b_2 x_1 = 0$ 上.

情形 2 考虑 $a = b$. 若 $(a, b) \neq (-2, -2)$, 则系统 (1.4) 有奇点

$$O(0, 0), \quad Q\left(\frac{2ac^2}{(a+2)^2}, -\frac{2c}{a+2}\right).$$

奇点 $O(0, 0)$ 为不稳定结点. 由于 $\det(J)|_Q = -c^2 < 0$, 因此奇点 Q 为鞍点, 并且可以计算得出鞍点 Q 在不变曲线 $b_1 x_2^2 + b_2 x_1 = 0$ 上.

接下来讨论在无穷远处的情形, 考虑渐近方向 $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$, 类似于定理 1 的讨论, 有

$$\frac{\cos \theta_{1j}}{\sin^2 \theta_{1j}} = \frac{a-2+|a+2|}{4}, \quad \frac{\cos \theta_{2j}}{\sin^2 \theta_{2j}} = \frac{a-2-|a+2|}{4}, \quad \theta_{i1} \leq \theta_{i2}, \quad i = 1, 2.$$

当 $a > -2$ 时,

$$\frac{\cos \theta_{1j}}{\sin^2 \theta_{1j}} = \frac{a}{2}, \quad \frac{\cos \theta_{2j}}{\sin^2 \theta_{2j}} = -1, \quad \theta_{i1} \leq \theta_{i2}, \quad i = 1, 2.$$

所以,

$$\frac{\pi}{2} < \theta_{21} < \pi < \theta_{22} < \frac{3\pi}{2}, \quad \theta_{11} < \theta_{21}, \quad \theta_{22} < \theta_{12}, \quad \theta_{11} \in (0, \pi), \quad \theta_{12} \in (\pi, 2\pi).$$

在 $\theta = \theta_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) 处, 有

$$\begin{aligned} \left. \frac{dz}{d\tau} \right|_{\theta=\theta_{1j}} &= -z \sin \theta_{1j} (2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta_{1j}) \frac{a+2}{2} - cz^2 (1 + \cos^2 \theta_{ij}), \\ \left. \frac{dz}{d\tau} \right|_{\theta=\theta_{2j}} &= -cz^2 (1 + \cos^2 \theta_{2j}) < 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

考虑到 z 是充分小, 所以,

$$\operatorname{sgn}\left(\left. \frac{dz}{d\tau} \right|_{\theta=\theta_{11}}\right) = -\operatorname{sgn}(\sin \theta_{11}) \operatorname{sgn}\left(\frac{a+2}{2}\right) < 0,$$

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)\Big|_{\theta=\theta_{12}} = -\operatorname{sgn}(\sin \theta_{12})\operatorname{sgn}\left(\frac{a+2}{2}\right) > 0.$$

同理, 当 $a < -2$ 时, 可以判断得到

$$\frac{\pi}{2} < \theta_{21} < \theta_{11} < \pi < \theta_{12} < \theta_{22} < \frac{3\pi}{2},$$

并且

$$\frac{dz}{d\tau}\Big|_{\theta=\theta_{11}} > 0, \quad \frac{dz}{d\tau}\Big|_{\theta=\theta_{12}} < 0, \quad \frac{dz}{d\tau}\Big|_{\theta=\theta_{21}} < 0, \quad \frac{dz}{d\tau}\Big|_{\theta=\theta_{22}} < 0.$$

若 $a = b = -2$, 则系统 (1.4) 有唯一奇点 $O(0, 0)$, 并且为不稳定结点. 此时, 无穷远奇点满足

$$\frac{\cos \theta_{1j}}{\sin^2 \theta_{1j}} = \frac{\cos \theta_{2j}}{\sin^2 \theta_{2j}} = -1,$$

所以,

$$\theta_{11} = \theta_{21} := \theta_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \theta_{12} = \theta_{22} := \theta_2 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\frac{dz}{d\tau}\Big|_{\theta=\theta_{ij}} = -cz^2(1 + \cos^2 \theta_{ij}) < 0, \quad i, j = 1, 2.$$

综合考虑有限远和无穷远奇点, 以及没有极限环的事实, 我们可得系统 (1.4) 在 Poincaré-Lyapunov 紧化圆盘上的全局相图 (见图 2). $\square$

参考文献

- Huang J, Zhao Y. Extended quasi-homogeneous polynomial system in $\mathbb{R}^3$. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl, 2013, 20: 1771–1794
- Li W, Llibre J, Yang J. Limit cycles bifurcating from the period annulus of quasi-homogeneous centers. J Dynam Differential Equations, 2009, 21: 133–152
- García B, Llibre J, Ró J S P. Planar quasi-homogeneous polynomial differential systems and their integrability. J Differential Equations, 2013, 255: 3185–3204
- Aziz W, Llibre J, Pantazi C. Centers of quasi-homogeneous polynomial differential equations of degree three. Adv Math, 2014, 254: 233–250
- Liang H, Huang J, Zhao Y. Classification of global phase portraits of planar quartic quasi-homogeneous polynomial differential systems. Nonlinear Dynam, 2014, 78: 1659–1681
- Tang Y, Wang L, Zhang X. Center of planar quintic quasi-homogeneous polynomial differential systems. Discrete Contin Dyn Syst, 2014, 35: 2177–2191
- Huang J, Zhao Y. The projective vector field of a kind of three-dimensional quasi-homogeneous system on S^2 . Nonlinear Anal, 2011, 74: 4088–4104
- Coll B, Gasull A, Prohens R. Differential equations defined by the sum of two quasi-homogeneous vector fields. Canad J Math, 1997, 49: 212–231
- 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 2006

Bifurcation of a class of extended quasi-homogeneous polynomial differential systems

SHI RenXiang, GONG JinHui & YU Jiang

Abstract In this paper, we study the bifurcation of a class of extended quasi-homogeneous planar polynomial

differential systems of degree 3, prove that this system has no limit cycle in $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, and provide its global portraits by using quasi-homogeneous blow-up, Poincaré-Lyapunov compactification etc.

Keywords extended quasi-homogeneous systems, Poincaré-Lyapunov compactification, bifurcation, global phase portraits

MSC(2010) 34C05, 34C07, 34C23

doi: 10.1360/N012016-00128