广义拟线性 Schrödinger 方程基态解的存在性

献给齐民友教授 90 华诞

邓引斌*, 黄文涛

华中师范大学数学与统计学学院, 武汉 430079

E-mail: ybdeng@mail.ccnu.edu.cn, wthuang1014@aliyun.com

收稿日期: 2018-01-04; 接受日期: 2018-03-06; 网络出版日期: 2018-12-17; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11771170) 资助项目**摘要** 本文旨在研究如下的广义拟线性 Schrödinger 方程

$$-\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = h(u), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

其中 $N \geq 3$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是一个可微的偶函数且存在 $\alpha \geq 1$ 使得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{t^{\alpha-1}} = \beta > 0$; $h: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ 是一个非线性函数且包含情形: $h(t) = |t|^{p-2}t$ ($2 < p < \alpha 2^*$); 位势函数 $V(x): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ 为正. 结合变量替换和变分技巧, 本文证明了上述问题存在一个正的基态解.

关键词 拟线性 Schrödinger 方程 变分技巧 基态解**MSC (2010) 主题分类** 35J60, 35J20, 35B09

1 引言及主要结果

本文考虑如下的广义拟线性 Schrödinger 方程:

$$-\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = h(u), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (1.1)$$

基态解的存在性, 其中 $N \geq 3$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是一个可微的偶函数且对所有 $t \geq 0$ 都有 $g'(t) \geq 0$; $h: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ 是一个连续的非线性函数; 位势函数 $V(x): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ 为正.

方程 (1.1) 的解与如下的广义拟线性 Schrödinger 方程:

$$i\partial_t z = -\Delta z + W(x)z - h(z) - \Delta l(|z|^2)l'(|z|^2)z \quad (1.2)$$

的孤立波解密切相关, 其中未知函数 $z: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ 是复值函数, $W: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ 是给定的位势函数, $l, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为给定的非线性函数. 拟线性方程 (1.2) 与数学物理理论紧密结合, 当 l 取不同的函数时,

英文引用格式: Deng Y B, Huang W T. The existence of ground state solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 109–124, doi: 10.1360/N012018-00007

该方程可用来模拟不同的物理现象. 当 $l(s) = s$ 时, (1.2) 模拟了凝聚波函数在超流体膜中的时间演化过程 (参见文献 [1,2]). 在流体力学中, Kurihara^[1] 将这类方程称为超流体薄膜方程. 当 $l(s) = (1+s)^{\frac{1}{2}}$ 时, 方程 (1.2) 模拟了高功率超短脉冲激光在物质中的自沟道效应, 强激光在等离子体中的传播产生了一个非线性地依赖于光强度的光学指数, 而且导出了新的有意思的非线性波方程 (参见文献 [3-6]).

令 $z(t, x) = \exp(-iEt)u(x)$, 其中 $E \in \mathbb{R}$ 且 u 是一个实函数. 方程 (1.2) 可以简化成拟线性椭圆型方程

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta l(u^2)l'(u^2)u = h(u), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.3)$$

再令

$$g^2(u) = 1 + \frac{(l(u^2)')^2}{2},$$

则方程 (1.3) 可以转化为拟线性椭圆方程 (1.1).

当 $g(u)$ 是一个正常数时, 方程 (1.1) 还出现在生物模型和激光束的传播. 若令 $g^2(u) = 1 + 2u^2$, 即 $l(s) = s$, 则得到等离子体物理中的超流体薄膜方程

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = h(u), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.4)$$

若令 $g^2(u) = 1 + \frac{u^2}{2(1+u^2)}$, 即 $l(s) = (1+s)^{\frac{1}{2}}$, 则得到方程

$$-\Delta u + V(x)u - [\Delta(1+u^2)^{\frac{1}{2}}] \frac{u}{2(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} = h(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.5)$$

该方程可用于模拟高功率超短脉冲激光在物质中的自沟道效应.

近些年的研究主要集中在问题 (1.4), 文献 [7,8] 在非线性项前加上一个未知的 Lagrange 乘子 λ , 利用约束极小的技巧证明了问题 (1.4) 存在一个正的基态解. 利用 Nehari 方法, Liu 等^[9] 考虑了更一般的拟线性问题并且得到了对应问题正解和变号解的存在性. 文献 [10] 通过变量替换将拟线性问题转化为半线性问题, 然后在 Orlicz 空间下利用山路引理 (参见文献 [11]) 证明了问题 (1.4) 存在一个正解. 随后, Colin 和 Jeanjean^[12] 将这一变换技巧用在了通常的 Sobolev 空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中. 借鉴文献 [10,12] 中处理次临界增长问题的想法, 文献 [13,14] 将这一变换应用到含有临界增长的问题 (1.4), 从而得到了正解的存在性. 对于含有临界增长的问题 (1.4) 解的存在性的相关结果, 读者可参见文献 [15-18] 等.

值得一提的是拟线性问题 (1.4) 对应的临界指数正好是临界 Sobolev 指数 $2^* = \frac{2N}{N-2}$ 的 2 倍. 可以证明, 当拟线性问题 (1.4) 右边的非线性项 $h(u) = |u|^{p-2}u$, 且 $4 \leq p < 22^*$, $N \geq 3$ 时, 问题 (1.4) 存在正解; 但当拟线性问题 (1.4) 右边的非线性项 $h(u) = |u|^{p-2}u$, 且 $p = 22^*$, $N \geq 3$ 时, 问题 (1.4) 不存在满足某种条件的正解. 基于文献 [9] 的陈述, 称拟线性问题 (1.4) 是次临界增长的, 如果方程右边的非线性项在无穷远处满足 $h(u) \sim |u|^{p-2}u$, 且 $4 \leq p < 22^*$; 称拟线性问题 (1.4) 是临界增长的, 如果方程右边的非线性项在无穷远处满足 $h(u) \sim |u|^{22^*-2}u$.

另一方面, 人们在考虑拟线性问题 (1.4) 时, 通常都需要方程中的非线性项 $h(u)$ 满足另外一种变形的 Ambrosetti-Rabinowitz 型条件 (简称 (AR) 条件), 即要求存在 $\theta > 4$ 使得

$$0 \leq H(u) := \int_0^u h(t)dt \leq \frac{1}{\theta} h(u)u, \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

通过文献 [10,12] 中引进的变量替换, 可以验证在条件 (1.6) 下, 方程所对应的变分泛函在 $0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 附近具有山路几何结构, 然后由山路引理可知泛函存在有界的 Palais-Smale 序列 (简称 (PS) 序列).

关于拟线性问题 (1.4), 人们还可以考虑更一般的非线性项 $h(x, u)$ 并用条件

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{H(x, u)}{|u|^4} = +\infty$$

来代替 (AR) 条件, 从而得到一些有趣的存在性结果, 有兴趣的读者可参见文献 [10, 12, 19–22] 及其相关参考文献.

然而据我们所知, 当拟线性问题 (1.4) 右边的非线性项 $h(u) = |u|^{p-2}u$ 且 $p \in (2, 4)$ 时, 相应的存在性和非存在性结果甚少. 当 $h(u) = |u|^{p-2}u$ 且 $2 < p < 22^*$ 时, Ruiz 和 Siciliano^[23] 通过利用约束极小的技巧证明了问题 (1.4) 正的基态解的存在性. 最近, Liu 和 Zhao^[24] 就更一般的非线性函数 h 和位势函数 V , 对问题 (1.4) 进行了探讨, 得到了一些有趣的结果. 这些结果可以看成是文献 [23] 中主要结果的补充.

应该指出的是, 上述所提到的研究结果都是针对特殊的拟线性问题 (1.4), 即方程 (1.3) 中 $l(s) = s$ 的情形. 一个很自然的问题是, 对一般的函数 $l(s)$, 如何探讨一般的拟线性问题 (1.3) 的正解、多重解的存在性及其形态?

通过引进下列变换:

$$v = G(u) = \int_0^u g(t)dt, \quad (1.7)$$

Shen 和 Wang^[25] 率先研究了问题 (1.3) 的孤立波解的存在性. 在 g 和 V 及次临界的非线性项 h 满足某些假设条件下, 他们证明了问题 (1.1) 正解的存在性. 利用变换 (1.7) 和变分技巧, Deng 等^[26] 证明了含有临界增长的广义拟线性问题 (1.1) 正解的存在性.

特别地, Deng 等^[27] 发现, 如果存在 $\alpha \geq 1$ 使得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{t^{\alpha-1}} = \beta > 0$, 则问题 (1.1) 对应的临界指标是 $\alpha 2^* = \frac{2\alpha N}{N-2}$. 根据这一事实, 他们提出了如下含有临界增长的问题:

$$-\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = h^*(x, u) + |u|^{\alpha 2^*-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.8)$$

其中 $h^*: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个次临界扰动项. 在 g 满足下列条件时:

(g_1) $g \in C^1(\mathbb{R})$ 是一个正的偶函数且对所有 $t \geq 0$, 都有 $g'(t) \geq 0$, $g(0) = 1$. 此外, 存在某些常数 $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$ 和 $\gamma \in (-\infty, \alpha)$ 使得

$$g(t) = \beta t^{\alpha-1} + O(t^{\gamma-1}) \quad (t \rightarrow +\infty) \quad \text{且} \quad (\alpha-1)g(t) \geq g'(t)t, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.9)$$

他们建立了问题 (1.8) 正解的存在性.

人们发现, 文献 [27] 中仍需要次临界扰动项 $h^*(x, u)$ 满足某种变形的 (AR) 条件, 即存在 $\mu \in (2, 2^*)$ 使得对任意 $u > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^N$, 有

$$\alpha\mu \int_0^u h^*(x, t)dt \leq h^*(x, u)u. \quad (1.10)$$

该条件在验证对应的变分泛函具有山路引理的几何结构和对应 (PS) 序列的有界性时也是至关重要的. 当次临界扰动项 $h^*(x, u) = |u|^{p-2}u$ 时, 为了保证变形的 (AR) 条件 (1.10) 成立, 他们必须要求 $p > 2\alpha$.

本文的主要目的是在 $g(t)$ 满足较弱的条件且 h 不满足变形的 (AR) 条件 (1.10) 时, 建立问题 (1.1) 基态解的存在性. 为此, 我们需要假设 g 和非线性项 h 满足下列条件:

(g_1) $g \in C^1(\mathbb{R})$ 是一个正的偶函数, $g(0) = 1$ 且对所有 $t \geq 0$ 都有 $g'(t) \geq 0$; 同时, 存在常数 $\alpha \geq 1$ 和 $\beta > 0$ 使得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{t^{\alpha-1}} = \beta$;

(h₁) $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ 是连续的且对所有 $t \in (-\infty, 0]$ 都有 $h(t) \equiv 0$;

(h₂) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h(t)}{t} = 0$;

(h₃) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{h(t)}{t^{\alpha_{2^*}-1}} = 0$;

(h₄) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{h(t)}{t} = +\infty$.

此外, 假设位势函数 $V \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ 满足下列条件:

(V₁) 对所有 $x \in \mathbb{R}^N$, 都有 $0 < V_0 \leq V(x) \leq V_\infty := \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x)$;

(V₂) 存在某常数 $a \in (0, 2S)$ 使得

$$\|(\nabla V(x) \cdot x)\|_{\frac{N}{2}} \leq a,$$

其中 S 是嵌入 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ 的最佳常数, 即

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}.$$

在给出我们的主要结果之前, 我们注意到方程 (1.1) 对应的变分泛函

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g^2(u) |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx$$

在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中可能没有定义. 而且, 集合 $\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} g^2(u) |\nabla u|^2 dx < +\infty\}$ 不是一个线性空间. 为了克服这个困难, 利用变换 (1.7), 得到新的变分泛函

$$I(u) = J(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |G^{-1}(v)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(G^{-1}(v)) dx, \quad (1.11)$$

其中 $G^{-1}(v)$ 是 $G(u)$ 的反函数. 由于 g 是一个非减的正的函数, 故 $|G^{-1}(v)| \leq |v|$. 容易验证, 如果 h 和 V 满足我们的假设条件, 则 J 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有定义且 $J \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N))$.

如果 u 是方程 (1.1) 的非平凡解, 那么对所有的试探函数 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, 都有

$$\int_{\mathbb{R}^N} [g^2(u) \nabla u \nabla \varphi + g(u) g'(u) |\nabla u|^2 \varphi + V(x) u \varphi - h(u) \varphi] dx = 0. \quad (1.12)$$

对所有 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, 令 $\varphi = \frac{1}{g(u)} \psi$, 则可验证 (1.12) 等价于

$$\langle J'(v), \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla v \nabla \psi + V(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \psi - \frac{h(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \psi \right] dx = 0. \quad (1.13)$$

因此, 为了寻找一般的拟线性椭圆方程 (1.1) 的非平凡解, 只需研究下列半线性椭圆方程:

$$-\Delta v + V(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} - \frac{h(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (1.14)$$

的非平凡解.

本文的主要结果可归结为如下定理:

定理 1.1 假设 (g₁)、(V₁)、(V₂) 和 (h₁)–(h₄) 成立, 则方程 (1.1) (等价于方程 (1.14)) 存在一个正的基态解.

注 1.2 本文关于权函数 $g(t)$ 的假设 (g_1) 中不需要 $g(t)$ 满足 (1.9) 中的结构性条件

$$(\alpha - 1)g(t) \geq g'(t)t, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.15)$$

该不等式本质上是附加在权函数 $g(t)$ 上的 (AR) 条件. 因此, 我们的结论不仅去掉了拟线性方程 (1.1) 关于非线性项 $h(t)$ 的 (AR) 条件, 而且去掉了关于权函数 $g(t)$ 的 (AR) 条件. 容易验证具有较强物理背景的拟线性问题 (1.5) 中的 $g(t) = \sqrt{1 + \frac{t^2}{2(1+t^2)}}$ 满足我们的假设 (g_1) (取 $\alpha = 1, \beta = \sqrt{\frac{3}{2}}$), 但不满足结构性条件 (1.15). 所以, 定理 1.1 的结果可以直接应用到方程 (1.5).

定理 1.1 的证明是基于变分技巧的. 由于非线性项 h 不满足变形的 (AR) 条件 (1.10), 且 $g(t)$ 也不满足结构性条件 (1.15), 故用标准的变分方法很难得到泛函 J 的一个有界的 (PS) 序列. 为了克服这一困难, 我们需要利用 Jeanjean^[28] 提出的单调方法, 其基本思想源于研究渐近线性的半线性椭圆问题

$$-\Delta u + Ku = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

其中 $K > 0$ 是一个常数, $f(x, t)$ 关于 t 在无穷远处渐近线性且关于 x_i ($1 \leq i \leq N$) 是周期的. 为此, 可以引进一族 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 上的 C^1 泛函, 定义为

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)|G^{-1}(v)|^2) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} H(G^{-1}(v)) dx,$$

其中 $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$. 由 (V_1) 和下文的命题 2.4 可知, 对几乎处处的 $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$, J_λ 存在一个有界的 $(PS)_{c_\lambda}$ 序列 $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, 其中 c_λ 由下文的引理 3.1 给出. 为了证明对几乎处处的 $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$, 这个有界的 $(PS)_{c_\lambda}$ 序列收敛到 J_λ 的一个非平凡的临界点 v_λ 且 $J_\lambda(v_\lambda) = c_\lambda$, 我们需要建立泛函 J_λ 与其极限泛函

$$J_\lambda^\infty(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V_\infty|G^{-1}(v)|^2) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} H(G^{-1}(v)) dx$$

之间的全局紧性引理. 最后, 选取一列 $\{(\lambda_m, v_{\lambda_m})\} \subset [\frac{1}{2}, 1] \times H^1(\mathbb{R}^N)$ 使得当 $\lambda_m \rightarrow 1$ 且 $v_{\lambda_m} \neq 0$ 时, 满足

$$J'_{\lambda_m}(v_{\lambda_m}) = 0 \quad \text{且} \quad J_{\lambda_m}(v_{\lambda_m}) = c_{\lambda_m}.$$

利用 (V_2) 及 Pohozaev 恒等式, 我们可以证明 $\{v_{\lambda_m}\}$ 是泛函 $J = J_1$ 的一个有界的 (PS) 序列且满足 $\lim_{m \rightarrow \infty} J(v_{\lambda_m}) = c_1$, 从而证明了主要结果定理 1.1.

由条件 (V_1) , 可以定义 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 空间的一个等价范数为

$$\|v\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

此外, 通常的 Lebesgue 空间 $L^q(\mathbb{R}^N)$ 的范数定义为 $\|v\|_q = (\int_{\mathbb{R}^N} |v|^q dx)^{\frac{1}{q}}, 1 \leq q < \infty$.

本文的结构安排如下: 第 2 节给出一些重要的预备性引理. 第 3 节利用 Jeanjean^[28] 提出的单调方法来证明定理 1.1.

2 预备知识

本节首先给出函数 G 和 G^{-1} 的一些性质, 相关证明可以参见文献 [26, 27].

引理 2.1 在 (g_1) 假设下, 函数 $G(t)$ 与其反函数 $G^{-1}(s)$ 具有以下性质:

(1) $G(t)$ 和 $G^{-1}(s)$ 都是奇函数;

(2) 对所有 $t \geq 0, s \geq 0$, 有

$$G(t) \leq g(t)t, \quad G^{-1}(s) \leq s;$$

(3) 对所有 $s \geq 0, \frac{G^{-1}(s)}{s}$ 非增且有

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{G^{-1}(s)}{s} = 1, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{G^{-1}(s)}{s} = \begin{cases} \frac{1}{g(\infty)}, & \text{若 } g \text{ 有界,} \\ 0, & \text{若 } g \text{ 无界.} \end{cases}$$

令

$$f(x, s) = V(x) \left(s - \frac{G^{-1}(s)}{g(G^{-1}(s))} \right) + \frac{h(G^{-1}(s))}{g(G^{-1}(s))} \quad (2.1)$$

以及

$$F(x, s) = \int_0^s f(x, \tau) d\tau = \frac{1}{2} V(x) (s^2 - |G^{-1}(s)|^2) + H(G^{-1}(s)), \quad (2.2)$$

我们不难导出如下引理:

引理 2.2 在 (g_1) 、 (V_1) 和 (h_1) – (h_3) 的假设下, 函数 $f(x, s)$ 和 $F(x, s)$ 具有以下性质:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(x, s)}{s} = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{F(x, s)}{s^2} = 0, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(x, s)}{s^{2^*-1}} = 0 \quad \text{且} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{F(x, s)}{s^{2^*}} = 0$$

关于 $x \in \mathbb{R}^N$ 一致成立.

利用标准的分析技巧^[29], 我们可以导出下面的 Pohozaev 恒等式.

引理 2.3 假设 (g_1) 、 (V_1) 、 (V_2) 和 (h_1) – (h_3) 成立. 若 v 是问题 (1.14) 的解, 则下列 Pohozaev 恒等式成立:

$$\begin{aligned} & \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |G^{-1}(v)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla V(x) \cdot x) |G^{-1}(v)|^2 dx \\ & = N \int_{\mathbb{R}^N} H(G^{-1}(v)) dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

通常来说, 若非线性项不满足 (AR) 条件, 则在建立 (PS) 序列的有界性时会存在一定的困难. 为此, 我们引进由 Jeanjean^[28] 提出的一个抽象的结果.

命题 2.4 假设 X 是一个以 $\|\cdot\|_X$ 为范数的 Banach 空间, $L \subset \mathbb{R}^+$ 为一个区间. 在 X 上定义一族 C^1 泛函 $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ 如下:

$$I_\lambda(u) = A(u) - \lambda B(u), \quad \forall \lambda \in L.$$

如果 $I_\lambda(u)$ 满足下面两个条件:

(1) 对所有 $u \in X, B(u) \geq 0$, 且当 $\|u\|_X \rightarrow \infty$ 时, $A(u) \rightarrow +\infty$ 或者 $B(u) \rightarrow +\infty$;

(2) 在 X 中存在两个点 (v_1, v_2) , 使得 $\forall \lambda \in L$ 都有

$$c_\lambda := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) > \max\{I_\lambda(v_1), I_\lambda(v_2)\},$$

其中

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X), \gamma(0) = v_1, \gamma(1) = v_2\},$$

则对几乎处处的 $\lambda \in L$, 存在一个序列 $\{v_n\} \subset X$ 使得

- (i) $\{v_n\}$ 是有界的;
- (ii) $I_\lambda(v_n) \rightarrow c_\lambda$;
- (iii) 在 X 的对偶空间 X^{-1} 中有 $I'_\lambda(v_n) \rightarrow 0$;
- (iv) 映射 $\lambda \rightarrow c_\lambda$ 是左连续的.

在本节的最后, 我们介绍 $\mathbb{R}^N$ 中半线性自治椭圆方程的一个存在性结果. 考虑半线性椭圆方程

$$-\Delta u = k(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad (2.4)$$

其中 $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数. 令 $K(s) = \int_0^s k(t)dt$, 则方程 (2.4) 对应的变分泛函为

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(u) dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

称 $\omega(x)$ 是方程 (2.4) 的极小能量解 (或基态解), 假如 $\mathcal{I}(\omega) = m$, 其中

$$m = \inf\{\mathcal{I}(u) : u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \text{ 是 (2.4) 的解}\}.$$

下面的存在性结果由文献 [29–31] 给出.

引理 2.5 假设函数 k 满足

(k₀) $k \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 是连续的奇函数.

(k₁) 当 $N \geq 3$ 时,

$$-\infty < \liminf_{s \rightarrow 0} \frac{k(s)}{s} \leq \limsup_{s \rightarrow 0} \frac{k(s)}{s} = -\nu < 0;$$

当 $N = 1, 2$ 时,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{k(s)}{s} = -\nu \in (-\infty, 0).$$

(k₂) 当 $N \geq 3$ 时,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|k(s)|}{s^{\frac{N+2}{N-2}}} = 0;$$

当 $N = 2$ 时, 对任意的 $\alpha > 0$, 存在 $C_\alpha > 0$ 使得对所有 $s \geq 0$, 有

$$|k(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2}.$$

(k₃) 当 $N \geq 2$ 时, 存在 $\xi_0 > 0$ 使得 $K(\xi_0) > 0$; 当 $N = 1$ 时, 存在 $\xi_0 > 0$ 使得 $K(\xi_0) = 0, k(\xi_0) > 0$ 并且

$$K(\xi) < 0, \quad \forall \xi \in (0, \xi_0),$$

则方程 (2.4) 存在一个正的径向极小能量解 ω , 且有 $c = m > 0$, 其中 c 是 $\mathcal{I}$ 的山路水平值. 进一步地, 存在一条路径 $\gamma \in C([0, 1], H^1(\mathbb{R}^N))$ 使得 $\omega(x) \in \gamma([0, 1])$ 且 $\max_{t \in [0, 1]} \mathcal{I}(\gamma(t)) = \mathcal{I}(\omega)$.

3 主要结果的证明

本节主要利用 Jeanjean^[28] 提出的单调方法来证明定理 1.1. 由于非线性项 h 不满足变形的 (AR) 条件 (1.10), 故通常的做法不容易证明泛函 J 具有山路几何结构. 而且, 即使找到了一个 (PS) 序列, 我们也很难证明它的有界性. 为了克服这一困难, 考虑一族定义在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 上的 C^1 泛函

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)|G^{-1}(v)|^2) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} H(G^{-1}(v)) dx, \quad (3.1)$$

其中 $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$ 是参变量. 令

$$A(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)|G^{-1}(v)|^2) dx, \quad B(v) = \int_{\mathbb{R}^N} H(G^{-1}(v)) dx.$$

显然, $J_\lambda(v) = A(v) - \lambda B(v)$ 以及 $B(v) \geq 0$ 对所有 $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 都成立. 此外, 若

$$\|v\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow +\infty,$$

则有

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx \rightarrow +\infty \quad \text{或者} \quad \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v^2 dx \rightarrow +\infty.$$

前者成立直接表明 $A(v) \rightarrow +\infty$. 另一方面, 由引理 2.1(2) 和 Sobolev 不等式, 有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v^2 dx &= \int_{\{x: |v(x)| \leq 1\}} V(x)v^2 dx + \int_{\{x: |v(x)| > 1\}} V(x)v^2 dx \\ &\leq g^2(1) \int_{\{x: |v(x)| \leq 1\}} V(x)|G^{-1}(v)|^2 dx + \int_{\{x: |v(x)| > 1\}} V(x)|v|^{2^*} dx \\ &\leq g^2(1) \int_{\{x: |v(x)| \leq 1\}} V(x)|G^{-1}(v)|^2 dx + C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{2^*}{2}}. \end{aligned}$$

因此, 后者成立同样可以导出 $A(v) \rightarrow +\infty$.

对 $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$, 定义

$$f_\lambda(x, s) = V(x) \left(s - \frac{G^{-1}(s)}{g(G^{-1}(s))} \right) + \lambda \frac{h(G^{-1}(s))}{g(G^{-1}(s))} \quad (3.2)$$

以及

$$F_\lambda(x, s) = \int_0^s f_\lambda(x, \tau) d\tau = \frac{1}{2} V(x) (s^2 - |G^{-1}(s)|^2) + \lambda H(G^{-1}(s)), \quad (3.3)$$

则泛函 J_λ 可改写成

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F_\lambda(x, v) dx. \quad (3.4)$$

而且, 根据引理 2.2, 很容易验证函数 $f_\lambda(x, s)$ 和 $F_\lambda(x, s)$ 满足

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f_\lambda(x, s)}{s} = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{F_\lambda(x, s)}{s^2} = 0, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f_\lambda(x, s)}{s^{2^*-1}} = 0 \quad \text{且} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{F_\lambda(x, s)}{s^{2^*}} = 0 \quad (3.5)$$

关于 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$ 一致成立.

下面可以证明泛函 J_λ 具有山路几何结构.

引理 3.1 假设 (g_1) 、 (V_1) 和 (h_1) – (h_4) 成立, 则对所有 $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$, J_λ 满足

(i) 存在 $w \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ 使得 $J_\lambda(w) < 0$;

(ii) $c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} J_\lambda(\gamma(t)) > \max\{J_\lambda(0), J_\lambda(w)\}$, 其中

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H^1(\mathbb{R}^N)) \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = w\}.$$

证明 首先, 令

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g^2(u) |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx.$$

根据 (g_1) , 可知存在两个常数 $C_1, C_2 > 0$, 使得对所有 $t \geq 0$, 都有

$$g^2(t) \leq C_1 + C_2 t^{2\alpha-2}.$$

对任意 $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$ 和给定的非负函数 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, 令 $u_t(x) = tu(t^{1-\alpha}x)$ ($t > 0$). 根据 (V_1) 和 (h_4) , 可得

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_t) &\leq I_{\frac{1}{2}}(u_t) \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (C_1 + C_2 u_t^{2\alpha-2}) |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2} V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} u_t^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} H(u_t) dx \\ &= \frac{C_1}{2} t^{4-2\alpha+(\alpha-1)N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{C_2}{2} t^{2+(\alpha-1)N} \int_{\mathbb{R}^N} u^{2\alpha-2} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad + \frac{t^{2+(\alpha-1)N}}{2} V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx - \frac{t^{(\alpha-1)N}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} H(tu) dx \\ &= \frac{t^{2+(\alpha-1)N}}{2} \left\{ \frac{C_1}{t^{2\alpha-2}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^N} u^{2\alpha-2} |\nabla u|^2 dx + V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{H(tu)}{t^2} dx \right\} \\ &\rightarrow -\infty, \quad \text{当 } t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

因此, 当取 $w = G(u_t)$ 且 t 充分大时, 结论 (i) 成立.

另一方面, 由 (3.5) 可知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $C_\varepsilon > 0$ 使得 $F_\lambda(x, v) \leq \varepsilon v^2 + C_\varepsilon |v|^{2^*}$. 选取充分小的 ε , 根据 Sobolev 不等式, 有

$$\begin{aligned} J_\lambda(v) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F_\lambda(x, v) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2) dx - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} v^2 dx - C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} dx \\ &\geq C \|v\|^2 - C \|v\|^{2^*}. \end{aligned}$$

故 $J_\lambda(v)$ 在 0 点处是严格局部极小的, 从而 $c_\lambda > 0$. □

下面需要建立泛函 J_λ 与其极限泛函之间的全局紧性引理, 极限泛函 J_λ^∞ 定义为

$$J_\lambda^\infty(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V_\infty |G^{-1}(v)|^2) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} H(G^{-1}(v)) dx, \quad (3.6)$$

其对应的 Euler-Lagrange 方程为

$$-\Delta v + V_\infty \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} - \lambda \frac{h(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (3.7)$$

我们借鉴文献 [32] 或 [33, 34] 中的证明思想, 可以给出如下引理:

引理 3.2 假设 (g_1) 、 (V_1) 和 (h_1) – (h_3) 成立. 若 $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$ 给定并且 $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ 是泛函 J_λ 的一个有界的 $(PS)_{c_\lambda}$ 序列, 则存在 $\{v_n\}$ 的一个子列, 仍记为 $\{v_n\}$, 整数 $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, 序列 $\{y_n^k\} \subset \mathbb{R}^N$ 及 $w^k \in H^1(\mathbb{R}^N)$ ($1 \leq k \leq l$) 使得

- (i) $v_n \rightharpoonup v$ 于 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 且 $J'_\lambda(v) = 0$;
- (ii) $|y_n^k| \rightarrow +\infty$, 而当 $k \neq k'$ 时 $|y_n^k - y_n^{k'}| \rightarrow +\infty$;
- (iii) $w^k \neq 0$ 且 $(J_\lambda^\infty)'(w^k) = 0$, $1 \leq k \leq l$;
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v - \sum_{k=1}^l w^k(\cdot - y_n^k)\| = 0$;
- (v) $\lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(v_n) = J_\lambda(v) + \sum_{k=1}^l J_\lambda^\infty(w^k)$,

这里约定在 $l = 0$ 的情形下, 上述结论不含 w^k 和 $\{y_n^k\}$.

证明 由于 $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ 有界, 因此存在 $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 使得 $v_n \rightharpoonup v$ 于 $H^1(\mathbb{R}^N)$. 那么由 $J'_\lambda(v_n) \rightarrow 0$ 表明, 对任意的 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\langle J'_\lambda(v_n), \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \psi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v_n \psi dx - \int_{\mathbb{R}^N} f_\lambda(x, v_n) \psi dx = o_n(1) \|\psi\|. \quad (3.8)$$

利用 (3.5) 和 Lebesgue 控制收敛定理, 我们可以获得 $J'_\lambda(v) = 0$. 因此, 结论 (i) 成立.

第 1 步 令 $v_n^1 = v_n - v$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 则有

- (a.1) $\|v_n^1\|^2 = \|v_n\|^2 - \|v\|^2 + o_n(1)$;
- (b.1) $\int_{\mathbb{R}^N} F_\lambda(x, v_n^1) dx = \int_{\mathbb{R}^N} F_\lambda(x, v_n) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F_\lambda(x, v) dx + o_n(1)$;
- (c.1) $J_\lambda(v_n) - J_\lambda(v) = J_\lambda^\infty(v_n^1) + o_n(1)$;
- (d.1) $(J_\lambda^\infty)'(v_n^1) \rightarrow 0$ 于 $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$.

根据 (3.5) 和 Brezis-Lieb 引理, 我们很容易得到 (a.1) 和 (b.1). 再结合 (a.1)、(b.1) 及 $v_n^1 \rightharpoonup 0$ 于 $H^1(\mathbb{R}^N)$, 有

$$J_\lambda(v_n) - J_\lambda(v) = J_\lambda(v_n^1) + o_n(1) = J_\lambda^\infty(v_n^1) + o_n(1),$$

从而导出 (c.1). 类似于文献 [34] 中引理 8.1 的证明方法, 我们也有

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (f_\lambda(x, v_n) - f_\lambda(x, v) - f_\lambda(x, v_n^1)) \psi dx \right| = o_n(1) \|\psi\|, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (3.9)$$

另一方面, 通过直接计算有

$$\begin{aligned} \langle J'_\lambda(v_n) - J'_\lambda(v), \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} ((\nabla v_n - \nabla v) \nabla \psi + V(x)(v_n - v) \psi) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (f_\lambda(x, v_n) - f_\lambda(x, v)) \psi dx = 0, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \quad (3.10)$$

根据 (3.9) 和 (3.10) 及 $v_n^1 \rightharpoonup 0$ 于 $H^1(\mathbb{R}^N)$, 有

$$\langle (J_\lambda^\infty)'(v_n^1), \psi \rangle = \langle J'_\lambda(v_n^1), \psi \rangle + o_n(1) = \langle J'_\lambda(v_n) - J'_\lambda(v), \psi \rangle + o_n(1) = o_n(1).$$

因此, $\{v_n^1\}$ 是 J_λ^∞ 的一个 (PS) 序列.

令

$$\sigma^1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |v_n^1|^2 dx.$$

消失: 若 $\sigma^1 = 0$, 则由 Lions 紧性引理 (参见文献 [35]) 可知,

$$v_n^1 \rightarrow 0 \quad \text{于 } L^q(\mathbb{R}^N), \quad 2 < q < 2^*. \quad (3.11)$$

又因为 $\{v_n^1\}$ 有界且 (d.1) 成立, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\langle (J_\lambda^\infty)'(v_n^1), v_n^1 \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n^1|^2 + V_\infty |v_n^1|^2 - \bar{f}_\lambda(v_n^1) v_n^1) dx \rightarrow 0, \quad (3.12)$$

其中

$$\bar{f}_\lambda(s) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f_\lambda(x, s) = V_\infty \left(s - \frac{G^{-1}(s)}{g(G^{-1}(s))} \right) + \lambda \frac{h(G^{-1}(s))}{g(G^{-1}(s))}. \quad (3.13)$$

由 (3.5)、(3.12) 和 (3.13) 可知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $C_\varepsilon > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n^1|^2 + V_\infty |v_n^1|^2) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \bar{f}_\lambda(v_n^1) v_n^1 dx + o_n(1) \\ &\leq \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n^1|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n^1|^{2^*} dx \right) + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v_n^1|^q dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

再根据 (3.11) 可得 $\|v_n^1\| \rightarrow 0$, 即 $v_n \rightarrow v$ 于 $H^1(\mathbb{R}^N)$. 因此, 引理 3.2 在 $l = 0$ 时成立.

非消失: 若 $\sigma^1 > 0$, 则存在一列 $\{y_n^1\} \subset \mathbb{R}^N$ 使得

$$\int_{B_1(y_n^1)} |v_n^1|^2 dx \geq \frac{\sigma^1}{2} > 0.$$

令 $w_n^1 = v_n^1(\cdot + y_n^1)$, 则 $\{w_n^1\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有界且不妨假定 $w_n^1 \rightharpoonup w^1$ 于 $H^1(\mathbb{R}^N)$. 因为

$$\int_{B_1(0)} |w_n^1|^2 dx \geq \frac{\sigma^1}{2},$$

所以 $w^1 \neq 0$. 而且, $v_n^1 \rightarrow 0$ 于 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 表明 $\{y_n^1\}$ 是无界序列, 即 $|y_n^1| \rightarrow +\infty$. 进一步地, 不难验证 $(J_\lambda^\infty)'(w^1) = 0$.

第 2 步 令 $v_n^2 = v_n - v - w^1(\cdot - y_n^1)$. 我们可以类似地证明

$$(a.2) \quad \|v_n^2\|^2 = \|v_n\|^2 - \|v\|^2 - \|w^1\|^2 + o_n(1);$$

$$(b.2) \quad \int_{\mathbb{R}^N} F_\lambda(x, v_n^2) dx = \int_{\mathbb{R}^N} F_\lambda(x, v_n) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F_\lambda(x, v) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F_\lambda(x, w^1) dx + o_n(1);$$

$$(c.2) \quad J_\lambda(v_n) - J_\lambda(v) - J_\lambda^\infty(w^1) = J_\lambda^\infty(v_n^2) + o_n(1);$$

$$(d.2) \quad (J_\lambda^\infty)'(v_n^2) \rightarrow 0 \quad \text{于 } H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

类似于第 1 步中的证明思想, 令

$$\sigma^2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |v_n^2|^2 dx.$$

若消失发生, 则有 $\|v_n^2\| \rightarrow 0$, 即 $v_n - v - w^1(\cdot - y_n^1) \rightarrow 0$ 于 $H^1(\mathbb{R}^N)$. 而且, 由 (c.2) 可知,

$$J_\lambda(v_n) = J_\lambda(v) + J_\lambda^\infty(w^1) + o_n(1).$$

因此, 引理 3.2 在 $l = 1$ 时成立.

若非消失发生, 则存在一列 $\{y_n^2\} \subset \mathbb{R}^N$ 和一个非平凡的 $w^2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 使得 $w_n^2 = v_n^2(\cdot + y_n^2) \rightharpoonup w^2$ 于 $H^1(\mathbb{R}^N)$. 再根据 (d.2), 有 $(J_\lambda^\infty)'(w^2) = 0$. 此外, $v_n^2 \rightharpoonup 0$ 于 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 表明

$$|y_n^2| \rightarrow +\infty \quad \text{且} \quad |y_n^2 - y_n^1| \rightarrow +\infty.$$

下面将上述过程迭代下去. 根据引理 2.5 可知, 若 w 是 J_λ^∞ 的一个非平凡临界点且 ω 是方程 (3.7) 的极小能量解, 则

$$J_\lambda^\infty(w) \geq J_\lambda^\infty(\omega) > 0. \quad (3.15)$$

因此, 存在某个有限的 $l \in \mathbb{N}$ 使得在第 l 步中只有消失情形发生, 从而引理得证. $\square$

通过利用上述的全局紧性引理, 可以得到 J_λ 的有界 (PS) 序列 $\{v_n\}$ 的收敛性结果.

引理 3.3 假设 (g_1) 、 (V_1) 、 (V_2) 和 (h_1) – (h_3) 成立. 若 $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$ 给定并且 $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ 是泛函 J_λ 的一个有界的 $(PS)_{c_\lambda}$ 序列, 则存在 $\{v_n\}$ 的一个子列, 仍记为 $\{v_n\}$, 以及 $0 \neq v_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 使得

$$v_n \rightarrow v_\lambda \quad \text{于} \quad H^1(\mathbb{R}^N).$$

证明 根据引理 3.2, 对 $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$, 存在 $v_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 使得 $v_n \rightharpoonup v_\lambda$ 于 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 且有 $J'_\lambda(v_\lambda) = 0$. 此外,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| v_n - v_\lambda - \sum_{k=1}^l w^k(\cdot - y_n^k) \right\| = 0 \quad \text{且} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(v_n) = J_\lambda(v_\lambda) + \sum_{k=1}^l J_\lambda^\infty(w^k), \quad l \geq 0, \quad (3.16)$$

其中 w^k ($1 \leq k \leq l$) 是 J_λ^∞ 的非平凡临界点.

因为 $J'_\lambda(v_\lambda) = 0$, 类似于引理 2.3, 有下列 Pohozaev 恒等式:

$$\begin{aligned} & \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |G^{-1}(v)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla V(x) \cdot x) |G^{-1}(v)|^2 dx \\ & = N\lambda \int_{\mathbb{R}^N} H(G^{-1}(v)) dx. \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} J_\lambda(v_\lambda) &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\lambda|^2 dx - \frac{1}{2N} \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla V(x) \cdot x) |G^{-1}(v_\lambda)|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\lambda|^2 dx - \frac{1}{2N} \|(\nabla V(x) \cdot x)\|_{\frac{N}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_\lambda|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &\geq \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\lambda|^2 dx - \frac{a}{2SN} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\lambda|^2 dx \\ &\geq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\lambda|^2 dx \geq 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

由 (3.16) 知, 若想得到 $v_n \rightarrow v_\lambda$ 于 $H^1(\mathbb{R}^N)$, 只需证明 $l = 0$. 用反证法, 不妨假定 $l > 0$. 根据 (3.17), 可推导出

$$c_\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(v_n) = J_\lambda(v_\lambda) + \sum_{k=1}^l J_\lambda^\infty(w^k) \geq l m_\lambda^\infty \geq m_\lambda^\infty, \quad (3.18)$$

其中

$$m_\lambda^\infty = \inf\{J_\lambda^\infty(v) : v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \text{ 是 (3.7) 的解}\}.$$

另一方面, 将引理 2.5 应用到自治方程 (3.7) 并结合 (3.5), 我们可获得 (3.7) 的一个基态解 ω_λ 且存在一条路径 $\gamma \in C([0, 1], H^1(\mathbb{R}^N))$ 使得 $\gamma(0) = 0$, $J_\lambda^\infty(\gamma(1)) < 0$, $\omega_\lambda(x) \in \gamma([0, 1])$ 并满足

$$\max_{t \in [0, 1]} J_\lambda^\infty(\gamma(t)) = J_\lambda^\infty(\omega_\lambda).$$

因为 $V(x) \leq V_\infty$ 并且 $V(x) \not\equiv V_\infty$, 则根据 (V₁) 和 c_λ 的定义, 有

$$c_\lambda \leq \max_{t \in [0, 1]} J_\lambda(\gamma(t)) < \max_{t \in [0, 1]} J_\lambda^\infty(\gamma(t)) = J_\lambda^\infty(\omega_\lambda) = m_\lambda^\infty,$$

这与 (3.18) 矛盾. 因此, $l = 0$, 即 $v_n \rightarrow v_\lambda$ 于 $H^1(\mathbb{R}^N)$. 由此可知, v_λ 是 J_λ 的非平凡临界点并满足 $J_\lambda(v_\lambda) = c_\lambda$, 故引理得证. $\square$

结合命题 2.4 和引理 3.1, 导出对几乎处处的 $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$, 存在一个有界的 (PS) 序列 $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ 使得

$$J'_\lambda(v_n) \rightarrow 0 \quad \text{且} \quad J_\lambda(v_n) \rightarrow c_\lambda > 0. \quad (3.19)$$

引理 3.3 给出对几乎处处的 $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$, J_λ 有一个非平凡的临界点 v_λ 使得 $J_\lambda(v_\lambda) = c_\lambda$. 特别地, 我们获得一系列 $\{(\lambda_m, v_{\lambda_m})\} \subset [\frac{1}{2}, 1] \times H^1(\mathbb{R}^N)$ 使得当 $\lambda_m \rightarrow 1$ 且 $v_{\lambda_m} \neq 0$ 时, 有

$$J'_{\lambda_m}(v_{\lambda_m}) = 0 \quad \text{且} \quad J_{\lambda_m}(v_{\lambda_m}) = c_{\lambda_m}. \quad (3.20)$$

为了证明定理 1.1, 我们先要说明 (3.20) 中获得的临界点序列 $\{v_{\lambda_m}\}$ 是有界的. 从而推导出 $\{v_{\lambda_m}\}$ 是 $J = J_1$ 的一个有界的 (PS) 序列且满足

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(v_{\lambda_m}) = c_1,$$

其中 J 由 (1.11) 给出. 再利用一次引理 3.3, 我们便可获得 J 的一个非平凡临界点, 从而完成证明.

定理 1.1 的证明 首先证明 (3.20) 中获得的序列 $\{v_{\lambda_m}\}$ 是有界的. 根据 $J_{\lambda_m}(v_{\lambda_m}) = c_{\lambda_m} \leq c_{\frac{1}{2}}$ 和引理 2.3, 有

$$c_{\frac{1}{2}} \geq J_{\lambda_m}(v_{\lambda_m}) = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{\lambda_m}|^2 dx - \frac{1}{2N} \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla V(x) \cdot x) |G^{-1}(v_{\lambda_m})|^2 dx.$$

类似于 (3.17) 的证明, 可得到 $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{\lambda_m}|^2 dx \leq C$. 然后, 我们只需证明 $\int_{\mathbb{R}^N} v_{\lambda_m}^2 dx$ 的有界性. 事实上, 由 $J'_{\lambda_m}(v_{\lambda_m}) = 0$ 和 (3.5) 可知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $C_\varepsilon > 0$, 使得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{\lambda_m}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v_{\lambda_m}^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} f_{\lambda_m}(x, v_{\lambda_m}) v_{\lambda_m} dx \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} v_{\lambda_m}^2 dx + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v_{\lambda_m}|^{2^*} dx \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} v_{\lambda_m}^2 dx + C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{\lambda_m}|^2 dx \right)^{\frac{2^*}{2}}, \end{aligned}$$

选取 $\varepsilon > 0$ 足够小, 我们得到 $\{v_{\lambda_m}\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有界. 因此, 对任意 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, 当 $m \rightarrow \infty$ 时,

$$|\langle J'_{\lambda_m}(v_{\lambda_m}), \psi \rangle - \langle J'(v_{\lambda_m}), \psi \rangle| = \left| (\lambda_m - 1) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(G^{-1}(v_{\lambda_m}))}{g(G^{-1}(v_{\lambda_m}))} \psi dx \right| \rightarrow 0.$$

此外, 根据映射 $\lambda \mapsto c_\lambda$ 是左连续的, 有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(v_{\lambda_m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[J_{\lambda_m}(v_{\lambda_m}) + (\lambda_m - 1) \int_{\mathbb{R}^N} H(G^{-1}(v_{\lambda_m})) dx \right] = \lim_{m \rightarrow \infty} c_{\lambda_m} = c_1.$$

从而可知, $\{v_{\lambda_m}\}$ 是 J 的一个有界的 (PS) 序列且满足

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(v_{\lambda_m}) = c_1.$$

则由引理 3.3 可得 J 的一个非平凡临界点 $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 满足 $J(v_0) = c_1$.

最后通过获得问题 (1.14) 基态解的存在性来结束证明. 令

$$d = \inf \{ J(v) : v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \text{ 是 (1.14) 的解} \},$$

则有 $0 \leq d \leq J(v_0) = c_1 < +\infty$. 事实上, 对任意满足 $J'(v) = 0$ 的 v , 由标准的证明方法可知 $\|v\| \geq \rho$, 其中 ρ 是正的常数. 类似于 (3.17) 的证明, 我们推出

$$J(v) \geq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx. \quad (3.21)$$

因此, $d \geq 0$. 下面排除 $d = 0$ 的可能性. 用反证法, 不妨假定 $\{v_n\}$ 是 J 的临界点序列且满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = 0.$$

由 (3.21), 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx = 0$. 再结合 $\langle J'(v_n), v_n \rangle = 0$, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 dx = 0.$$

从而有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\| = 0$, 这与对所有 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\|v_n\| \geq \rho > 0$ 相矛盾.

现假设 $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ 是 J 的非平凡临界点序列且满足 $J(v_n) \rightarrow d$. 根据 (V₂) 和 (3.17), 可以类似地推导出 $\{v_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有界, 即 $\{v_n\}$ 是 J 的一个有界的 (PS)_d 序列. 再根据引理 3.3 可知, 存在一个非平凡的 $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 使得 $J(w) = d$ 且 $J'(w) = 0$. 此外, 利用强极值原理和标准的正则性技巧, 可以证明问题 (1.14) 的基态解 $w > 0$. $\square$

致谢 作者衷心感谢匿名审稿人对于本文提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Kurihara S. Large-amplitude quasi-solitons in superfluid films. J Phys Soc Japan, 1981, 50: 3262–3267
- 2 Laedke E, Spatschek K, Stenflo L. Evolution theorem for a class of perturbed envelope soliton solutions. J Math Phys, 1983, 24: 2764–2769
- 3 Brandi H, Manus C, Mainfray G, et al. Relativistic and ponderomotive self-focusing of a laser beam in a radially inhomogeneous plasma, I: Paraxial approximation. Phys Fluids B, 1993, 5: 3539–3550
- 4 Chen X L, Sudan R N. Necessary and sufficient conditions for self-focusing of short ultraintense laser pulse in underdense plasma. Phys Rev Lett, 1993, 70: 2082–2085

- 5 de Bouard A, Hayashi N, Saut J. Global existence of small solutions to a relativistic nonlinear Schrödinger equation. *Comm Math Phys*, 1997, 189: 73–105
- 6 Ritchie B. Relativistic self-focusing and channel formation in laser-plasma interactions. *Phys Rev E* (3), 1994, 50: 687–689
- 7 Liu J, Wang Z. Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations, I. *Proc Amer Math Soc*, 2003, 131: 441–448
- 8 Poppenberg M, Schmitt K, Wang Z. On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2002, 14: 329–344
- 9 Liu J, Wang Y, Wang Z. Solutions for quasilinear Schrödinger equations via the Nehari method. *Comm Partial Differential Equations*, 2004, 29: 879–901
- 10 Liu J, Wang Y, Wang Z Q. Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations, II. *J Differential Equations*, 2003, 187: 473–493
- 11 Ambrosetti A, Rabinowitz P H. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J Funct Anal*, 1973, 14: 349–381
- 12 Colin M, Jeanjean L. Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: A dual approach. *Nonlinear Anal*, 2004, 56: 213–226
- 13 do Ó J M B, Miyagaki O H, Soares S H M. Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations with critical growth. *J Differential Equations*, 2010, 248: 722–744
- 14 Silva E A B, Vieira G F. Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with critical growth. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2010, 39: 1–33
- 15 Lins H F, Silva E A B. Quasilinear asymptotically periodic elliptic equations with critical growth. *Nonlinear Anal*, 2009, 71: 2890–2905
- 16 Liu X, Liu J, Wang Z. Quasilinear elliptic equations with critical growth via perturbation method. *J Differential Equations*, 2013, 254: 102–124
- 17 Liu X, Liu J, Wang Z. Ground states for quasilinear Schrödinger equations with critical growth. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2013, 46: 641–669
- 18 Moameni A. Existence of soliton solutions for a quasilinear Schrödinger equation involving critical exponent in $\mathbb{R}^N$. *J Differential Equations*, 2006, 229: 570–587
- 19 Fang X, Szulkin A. Multiple solutions for a quasilinear Schrödinger equation. *J Differential Equations*, 2013, 254: 2015–2032
- 20 Silva E A B, Vieira G F. Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with subcritical growth. *Nonlinear Anal*, 2010, 72: 2935–2949
- 21 Wu X. Multiple solutions for quasilinear Schrödinger equations with a parameter. *J Differential Equations*, 2014, 256: 2619–2632
- 22 Zhang J, Tang X, Zhang W. Infinitely many solutions of quasilinear Schrödinger equation with sign-changing potential. *J Math Anal Appl*, 2014, 420: 1762–1775
- 23 Ruiz D, Siciliano G. Existence of ground states for a modified nonlinear Schrödinger equation. *Nonlinearity*, 2010, 23: 1221–1233
- 24 Liu H, Zhao L. On the existence of positive solutions for a quasilinear Schrödinger equation. *ArXiv:1603.07158*, 2016
- 25 Shen Y, Wang Y. Soliton solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations. *Nonlinear Anal*, 2013, 80: 194–201
- 26 Deng Y, Peng S, Yan S. Positive soliton solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations with critical growth. *J Differential Equations*, 2015, 258: 115–147
- 27 Deng Y, Peng S, Yan S. Critical exponents and solitary wave solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations. *J Differential Equations*, 2016, 260: 1228–1262
- 28 Jeanjean L. On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer-type problem set on $\mathbb{R}^N$. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 1999, 129: 787–809
- 29 Berestycki H, Lions P L. Nonlinear scalar field equations, I: Existence of a ground state. *Arch Ration Mech Anal*, 1983, 82: 313–345
- 30 Berestycki H, Gallouët T, Kavian O. Equations de champs scalaires euclidiens non linéaires dans le plan. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, 1983, 297: 307–310
- 31 Jeanjean L, Tanaka K. A remark on least energy solutions in $\mathbb{R}^N$. *Proc Amer Math Soc*, 2003, 131: 2399–2408
- 32 Jeanjean L, Tanaka K. A positive solution for a nonlinear Schrödinger equation on $\mathbb{R}^N$. *Indiana Univ Math J*, 2005, 54: 443–464
- 33 Furtado M F, Maia L A, Medeiros E S. Positive and nodal solutions for a nonlinear Schrödinger equation with indefinite potential. *Adv Nonlinear Stud*, 2008, 8: 353–373

- 34 Willem M. Minimax Theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. 24. Boston: Birkhäuser, 1996
- 35 Lions P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations: The locally compact case, part 1; part 2. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 1984, 1: 109–145; 223–283

The existence of ground state solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations

Yinbin Deng & Wentao Huang

Abstract In this paper, we study the following generalized quasilinear Schrödinger equations

$$-\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = h(u), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

where $N \geq 3$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ is an even differential function satisfying $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{t^{\alpha-1}} = \beta > 0$ for some $\alpha \geq 1$; $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ is a nonlinear function covering the case: $h(t) = |t|^{p-2}t$ ($2 < p < \alpha 2^*$); the potential $V(x) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ is positive. Combining the change of variables and the variational argument, we prove the existence of a positive ground state solution for the given problem.

Keywords quasilinear Schrödinger equations, variational argument, ground state solutions

MSC(2010) 35J60, 35J20, 35B09

doi: 10.1360/N012018-00007