论 文

多输入的二阶广义分布参数系统的控制综合问题

刘锋^{①*}, 葛照强^②, 史国栋^③^① 江苏技术师范学院数理学院, 常州 213001^② 西安交通大学应用数学系, 西安 710049^③ 常州大学信息科学与工程学院, 常州 213164

* 通信作者. E-mail: liufeng200099@vip.sina.com

收稿日期: 2011-04-05; 接受日期: 2011-05-11

国家自然科学基金 (批准号: 60674018) 和江苏省高校自然科学基金 (批准号: 08KJD510003) 资助项目

摘要 广义分布参数系统具有广泛的实际背景. 如复合材料中的温度分布, 电缆中的信号传播, 电磁耦合超导线路中的电压分布, 飞行器姿态控制等问题研究中都会出现这样的系统. 极点配置与反馈稳定性是这类系统研究的重要方面. 本文应用泛函分析及算子理论讨论了 Hilbert 空间中多输入的二阶广义分布参数系统的极点配置与反馈稳定性问题, 获得了这类系统极点可配置与可镇定的一些充分条件, 并利用复分析、复级数、有界线性算子的广义逆等方法建立了反馈控制律的构造性表达式. 本文结论不仅具有重要的实际意义, 而且对广义分布参数系统的控制综合问题研究具有重要的理论价值.

关键词 极点配置 反馈稳定性 广义分布参数系统 多输入 Hilbert 空间

1 引言

广义分布参数系统比分布参数系统更广泛的一类控制系统, 它出现在复合材料的温度分布、电磁耦合超导线路的电压分布、电报系统的信号传播、飞行器姿态控制等领域的研究中^[1~3], 它与一般的分布参数系统有着本质的差别^[1~7], 当系统受到干扰时, 不仅会使系统失稳, 而且会使系统自身结构发生很大的变化, 例如出现脉冲行为等.

极点配置与反馈稳定性是广义分布参数系统研究的两个重要方面. 1993 年, Ge^[4] 讨论了 Hilbert 空间中一类一阶广义分布参数系统的稳定性, 给出了系统稳定的一个充分条件; 1994 年, Ge^[5,6] 讨论了该系统的极点配置, 利用有界线性算子的广义逆给出了反馈律的构造性表达式; 1995 年, Ge^[7~9] 分别讨论了二阶广义分布参数系统、一阶耦合广义分布参数系统及二阶耦合广义分布参数系统的极点配置, 给出了反馈律的构造性表达式. 1996 年, Yue 等^[10] 讨论了由奇异抛物型方程描述的广义分布参数系统的变结构控制, 给出了直接控制形式和分布控制形式的变结构控制设计方法; 同年, Gao^[11] 也讨论了该系统, 利用固有函数法提出了一种控制方法, 但该控制过程需要设置无限多个切换装置, 因而控制过程无法实现, 为了克服这些困难, Yang 等^[12] 采用简约分解法将广义分布参数系统受限分解为简约型, 给出了一种变结构控制的直接设计方法, 这种方法仅仅涉及到系统的自身结构. 1999 年, Liu 等^[13~15] 分别讨论了广义不确定分布参数系统的滑动模态控制及广义分布参数系统稳定性的变结构

引用格式: 刘锋, 葛照强, 史国栋. 多输入的二阶广义分布参数系统的控制综合问题. 中国科学: 信息科学, 2012, 42: 1445–1458, doi: 10.1360/112011-289

控制; Ge 等^[16] 讨论了由二阶发展方程描述的二阶广义分布参数系统的极点配置问题, 采用了一种化二阶系统为一阶系统的方法, 并在此基础上给出问题的解及解的构造性表达式. 2000 年, Yang 等^[17] 讨论了由奇异抛物型方程描述的广义分布参数扰动系统的变结构控制及其一致收敛问题, 通过引入滑动模态补偿器, 得到了简约型变结构控制的一种设计方法; Ge^[18~20] 讨论了广义分布参数系统的渐近稳定性, 给出了该系统渐近稳定的一个充分条件; 讨论了一类改进的一阶、二阶耦合广义分布参数系统的极点配置问题, 给出了解的表达式. 从 2001 ~ 2008 年, Ge 等^[21~31] 应用泛函分析、算子理论、半群理论等讨论了含有限及无限极点的一阶、二阶广义分布参数系统 (包括耦合广义分布参数系统) 的极点配置、反馈稳定性、谱分布、指数稳定性, 利用有界线性算子的广义逆给出了问题的解及解的构造性表达式. 2009 年, Ge 等^[32,33] 应用泛函分析及广义算子半群理论讨论了 Hilbert 空间中广义分布参数系统的精确能控性, 给出了该系统精确能控的一个充分必要条件, 应用 GE 半群讨论了该系统的指数稳定性; Liu 等^[34,35] 应用泛函分析及算子理论讨论了含无限非负实部极点的一阶广义分布参数系统的反馈稳定性问题, 给出了问题的解及解的构造性表达式; 讨论了含多输入的一阶广义分布参数系统的极点配置问题, 给出了解的构造性表达式. 2010 年, Liu 等^[36] 应用 GE_0 半群理论及 GE 温和演化算子讨论了时变广义分布参数系统的一致指数稳定性, 给出了该系统一致指数稳定的充要条件; Ge 等^[37] 应用 Hilbert 空间中的广义算子半群及广义积分半群讨论了广义分布参数系统的适定性问题, 并给出了问题解的表达式. 然而, 以上文献 (除文献 [35]) 仅仅考虑单输入的情形, 对于多输入的二阶广义分布参数系统, 相应的研究结果尚未看到.

本文将应用泛函分析及算子理论讨论 Hilbert 空间中多输入的二阶广义分布参数系统的极点配置与反馈稳定性问题, 利用有界线性算子的广义逆给出问题的解及解的构造性表达式.

设 H 是复的可析的 Hilbert 空间, $x(t) \in H$, E 是 H 中的有界线性算子但不可逆, A 是 H 中闭的稠定线性算子, $b_i \in H (i = 1, 2, \dots, m)$, $b_i \neq 0$.

考虑如下多输入的二阶广义分布参数系统:

$$\begin{cases} E \frac{d^2 x}{dt^2} = Ax + \sum_{i=1}^m u_i(t) b_i, \\ x(0) = x_0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = x_{10}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $u_i(t) (i = 1, 2, \dots, m)$ 是数值函数. 设反馈控制为

$$u_i(t) = \left\langle E \frac{dx}{dt}, g_i \right\rangle, (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2)$$

其中 $g_i \in H, g_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, m)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 H 中的内积, 将式 (2) 代入式 (1) 可得如下闭环系统:

$$\begin{cases} E \frac{d^2 x}{dt^2} = (G_1 + G_2 + \dots + G_m) \frac{dx}{dt} + Ax, \\ x(0) = x_0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = x_{10}, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $G_i x = \langle Ex, g_i \rangle b_i, (i = 1, 2, \dots, m)$, 闭环系统 (3) 相应的广义特征方程为

$$\lambda^2 Ex = \lambda(G_1 + G_2 + \dots + G_m)x + Ax. \quad (4)$$

设 $\sigma_p = \{\lambda: \text{存在 } x \in H, x \neq 0 \text{ 使得 } \lambda^2 Ex = \lambda(G_1 + G_2 + \dots + G_m)x + Ax\}$ 表示闭环系统 (3) 的所有极点.

系统 (1) 的极点配置问题就是: 对于任一复数集 $\{\alpha_k\}_1^N$ (N 是一个有限数或 ∞), 是否存在 $g_i \in H (i = 1, 2, \dots, m)$, 使得闭环系统 (3) 拥有极点 $\{\alpha_k\}_1^N$, 即 $\sigma_p = \{\alpha_k\}_1^N$.

定义 1 若存在 $g_i \in H (i = 1, 2, \dots, m)$ 使得系统 (3) 的解 $x(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$, 其中 $\|x(t)\| = \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle}$, 则称系统 (1) 是反馈稳定的.

系统 (1) 的反馈稳定性问题就是: 是否存在 $g_i \in H, (i = 1, 2, \dots, m)$ 使得系统 (3) 是稳定的.

以下 E^* 表示 E 的共轭算子, $\sigma_p(E, A) = \{\lambda: \text{存在 } x \in H \text{ 且 } x \neq 0 \text{ 使得 } \lambda Ex = Ax\}$ 表示 E 和 A 的所有广义特征值的集合; $\rho(E, A) = \{\alpha: (\alpha E - A) \text{ 为正则算子}\}$; 对于 $\alpha \in \rho(E, A)$, $R(\alpha E; A) = (\alpha E - A)^{-1}$; I 表示 H 中的恒等算子; $J = \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$.

2 预备知识

假设 1 设 A 是可逆的闭的稠定线性算子, 且存在 $A^{\frac{1}{2}}$; E 是有界线性算子, E 和 A 有广义特征值 $\{\lambda_k\}_1^N$, 且每一个 λ_k 是单重的, φ_k 是相应的广义特征向量, 即 $\lambda_k E \varphi_k = A \varphi_k (k = 1, 2, \dots)$; $\{\psi_k\}_1^\infty$ 表示满足 $\overline{\lambda_k} E^* \psi_k = A^* \psi_k (k = 1, 2, \dots)$ 的 E^* 和 A^* 的广义特征向量全体所构成的集合且构成 H 中的一个无条件基的子集, 并且

$$\langle E \varphi_k, \psi_l \rangle = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases} \quad k, l = 1, 2, \dots$$

设

$$E_1 = \begin{bmatrix} I & O \\ O & E \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} O & A^{\frac{1}{2}} \\ A^{\frac{1}{2}} & O \end{bmatrix}, \quad F_i = \begin{bmatrix} O & O \\ O & G_i \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad y_1 = A^{\frac{1}{2}} x, \quad y_2 = \frac{dx}{dt},$$

$$b'_i = \begin{bmatrix} 0 \\ b_i \end{bmatrix}, \quad g'_i = \begin{bmatrix} 0 \\ g_i \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

由式 (3) 可得

$$\begin{cases} E_1 \frac{dy}{dt} = (A_1 + F_1 + F_2 + \dots + F_m) y, \\ y_0 = \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} x_0 \\ x_{10} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (5)$$

闭环系统 (5) 相应的广义特征方程为

$$\lambda E_1 y = (A_1 + F_1 + F_2 + \dots + F_m) y. \quad (6)$$

假设 2 设存在正则算子 P 和 Q , 使得

$$QE_1 P = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad Q(A_1 + F_1 + F_2 + \dots + F_m)P = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中算子 A_{22} 是可逆的.

由系统 (5) 可得

$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = A_{11}y_1, y_{10} = A^{\frac{1}{2}}x_0, \\ O = A_{21}y_1 + A_{22}y_2, y_{20} = x_{10}. \end{cases} \quad (7)$$

式 (7) 中的第一个系统相应的特征方程为

$$\lambda y_1 = A_{11}y_1. \quad (8)$$

定义 2 设 A 是 H 中的有界线性算子, 若对于 $\forall 0 \neq y \in H$, 总有 $y^T Ay < 0$, 则称 A 为亚负定算子 (A 不一定是对称的).

容易证明: A 为亚负定算子的充分必要条件是 $\operatorname{Re}(\lambda(A)) < 0$.

定义 3 设 $B(H)$ 表示 H 上有界线性算子全体所形成的 Banach 代数, 对于 $B \in B(H)$, 若存在 $B^+ \in B(H)$, 使得 $BB^+B = B, B^+BB^+ = B^+, (B^+B)^* = B^+B, (BB^+)^* = BB^+$, 则称 B^+ 为有界线性算子 B 的一个广义逆.

直接可证得引理 1 ~ 3.

引理 1 设 $x, a \in H, B \in B(H)$, 且存在 B^+ , 若 $Bx = a$ 可解, 则通解为 $x = B^+a + [I - B^+B]c$, 其中 c 是 H 中的任一元.

引理 2 在假设 1 和假设 2 的条件下, (λ, x) 是式 (4) 的解等价于 (λ, y) 是式 (6) 的解, 也等价于 (λ, y_1) 是式 (8) 的解. 即 $\sigma_p = \sigma_p(E_1, A_1 + F_1 + F_2 + \cdots + F_m) = \sigma_p(I_r, A_{11})$.

引理 3 若 E 和 A 满足假设 1, 且 $R = R(\lambda^2 E; A)$, 则 $\lambda \in \rho(E_1, A_1)$ 的充分必要条件是 $\lambda^2 \in \rho(E, A)$, 且

$$R(\lambda E_1; A_1) = (\lambda E_1 - A_1)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda ER & A^{\frac{1}{2}}R \\ A^{\frac{1}{2}}R & \lambda R \end{bmatrix}.$$

引理 4 若 E 和 A 满足假设 1, 且 $\alpha^2 \notin \sigma_p(E, A)$, 则 $\alpha \in \sigma_p(E_1, A_1 + F_i) (i = 1, 2, \dots, m)$ 的充分必要条件是 $\langle E_1 R(\alpha E_1; A_1) b'_i, g'_i \rangle = 1 (i = 1, 2, \dots, m)$, 其中

$$b'_i = \begin{bmatrix} 0 \\ b_i \end{bmatrix}, \quad g'_i = \begin{bmatrix} 0 \\ g_i \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

证明 若 $\alpha \in \sigma_p(E_1, A_1 + F_i)$, 即对于 α 的广义特征向量 $\psi \neq 0$, 有 $\alpha E_1 \psi = (A_1 + F_i) \psi$, 从而 $\alpha E_1 \psi = A_1 \psi + F_i \psi = A_1 \psi + \langle E_1 \psi, g'_i \rangle b'_i$, 由此可得 $(\alpha E_1 - A_1) \psi = \langle E_1 \psi, g'_i \rangle b'_i$.

由于 $\alpha^2 \notin \sigma_p(E, A)$, 即 $\alpha^2 \in \rho(E, A)$, 由引理 3 可得 $\alpha \in \rho(E_1, A_1)$, 所以

$$\psi = (\alpha E_1 - A_1)^{-1} \langle E_1 \psi, g'_i \rangle b'_i, \quad E_1 \psi = E_1 (\alpha E_1 - A_1)^{-1} \langle E_1 \psi, g'_i \rangle b'_i. \quad (9)$$

由式 (9) 可得

$$\langle E_1 \psi, g'_i \rangle = \langle E_1 \psi, g'_i \rangle \langle E_1 (\alpha E_1 - A_1)^{-1} b'_i, g'_i \rangle. \quad (10)$$

将式 (10) 代入式 (9) 可得

$$\psi = R(\alpha E_1; A_1) \langle E_1 \psi, g'_i \rangle \langle E_1 R(\alpha E_1; A_1) b'_i, g'_i \rangle b'_i = \langle E_1 R(\alpha E_1; A_1) b'_i, g'_i \rangle \psi.$$

由于 $\psi \neq 0$, 所以 $\langle E_1 R(\alpha E_1; A_1) b'_i, g'_i \rangle = 1$.

反过来, 若 $\langle E_1 R(\alpha E_1; A_1) b'_i, g'_i \rangle = 1$, 由引理 3 可知 $\alpha \in \rho(E_1, A_1)$. 令 $\psi_0 = R(\alpha E_1; A_1) b'_i$, 其中 $\psi_0 \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} [\alpha E_1 - (A_1 + F_i)] \psi_0 &= (\alpha E_1 - A_1) \psi_0 - \langle E_1 \psi_0, g'_i \rangle b'_i \\ &= (\alpha E_1 - A_1) R(\alpha E_1; A_1) b'_i - \langle E_1 R(\alpha E_1; A_1) b'_i, g'_i \rangle b'_i = 0, \end{aligned}$$

从而有 $\alpha \in \sigma_p(E_1, A_1 + F_i) (i = 1, 2, \dots, m)$.

引理 5^[38] 设 $x_j \in H, x_j \neq 0, (j = 1, 2, \dots, N), y_{N+k} \in H, y_{N+k} \neq 0, (k = 1, 2, \dots)$, H_j^{N-1} 表示由 $\{x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_N, y_{N+1}, y_{N+2}, \dots\}$ 生成的闭的线性子空间. 若 $x_j \in H_j^{N-1}$, 则存在 $g'_i \in H (i = 1, 2, \dots, m)$ 使得 $\langle x_j, g'_i \rangle = 1 (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, N)$, 且 $\langle y_k, g'_i \rangle = 0 (k = N+1, N+2, \dots)$, 其中 $g'_i = [g_i^0] (i = 1, 2, \dots, m)$.

3 系统 (1) 的极点配置

设 $\{\alpha_k\}_1^N$ (N 是有限自然数) 是满足 $\alpha_k \neq \alpha_j (k \neq j; k, j = 1, 2, \dots, N)$ 和 $\alpha_k \notin \sigma_p(E, A) (k = 1, 2, \dots, N)$ 的任意 N 个复数的集合; 设 $\{\psi_{1,1}, \psi_{1,2}, \psi_{1,3}, \dots\}$ 表示 E_1^* 和 $A_1^* + F_1^*$ 的所有广义特征向量的集合, 且这个集合与集合 $\{R(\alpha_1 E_1; A_1) b_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$ 满足双直交关系; $\{\psi_{2,1}, \psi_{2,2}, \psi_{2,3}, \dots\}$ 表示 E_1^* 和 $A_1^* + F_1^* + F_2^*$ 的所有广义特征向量的集合, 且这个集合与集合 $\{R(\alpha_1 E_1; A_1) b_1, R(\alpha_2 E_1; A_1 + F_1) b_2, \varphi_3, \varphi_4, \dots\}$ 满足双直交关系; $\{\psi_{N,1}, \psi_{N,2}, \dots, \psi_{N,N}, \psi_{N,N+1}, \dots\}$ 表示 E_1^* 和 $A_1^* + F_1^* + F_2^* + \dots + F_N^*$ 的所有广义特征向量的集合, 且这个集合与集合

$$\{R(\alpha_1 E_1; A_1) b_1, R(\alpha_2 E_1; A_1 + F_1) b_2, \dots, R(\alpha_{N-2} E_1; A_1 + F_1 + \dots + F_{N-3}) b_{N-2},$$

$$R(\alpha_{N-1} E_1; A_1 + F_1 + \dots + F_{N-2}) b_{N-1}, R(\alpha_N E_1; A_1 + F_1 + \dots + F_{N-1}) b_N, \varphi_{N+1}, \varphi_{N+2}, \dots\}$$

满足双直交关系.

定理 1 若系统 (1) 满足假设 1, 存在 E^+ , 且 $b_{ii} = \langle b_i, \psi_{i-1,i} \rangle \neq 0 (i = 1, 2, \dots, N)$, $\{\alpha_i\}_1^N$ (N 是有限自然数) 是任意 N 个复数的集合, 且满足

$$\alpha_i \neq \alpha_j (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, N), \quad \alpha_k = \lambda_k (k = N+1, N+2, \dots),$$

$$\alpha_i \notin \sigma_p(E, A), \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

令

$$\begin{cases} g_i = x_i (E^*)^+ E^* \psi_{i-1,i} + [I - (E^*)^+ E^*] a_i, \\ x_i = \frac{\bar{\alpha}_i - \bar{\mu}_i}{\bar{b}_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (11)$$

其中 $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是 H 中的任意元.

1) 若 $N \leq m$, $g_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 由式 (11) 给出, 则

$$\{\alpha_i\}_1^N \cup \{\lambda_j\}_{N+1}^\infty = \sigma_p(E_1, A_1 + F_1 + F_2 + \dots + F_m);$$

2) 若 $N > m$, 令

$$\begin{cases} g_i = x_i(E^*)^+ E^* \psi_{i-1,i} + [I - (E^*)^+ E^*] a_i, \\ x_i = \frac{\bar{\alpha}_i - \bar{\mu}_i}{\bar{b}_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ g_m = \sum_{j=m}^N \frac{\bar{\alpha}_j - \bar{\mu}_j}{\bar{b}_{jj}} \prod_{i=m, i \neq j}^N \left(\frac{\bar{\alpha}_i - \bar{\mu}_j}{\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_j} \right) (E^*)^+ E^* \psi_{j-1,j} + [I - (E^*)^+ E^*] a_m, \end{cases} \quad (12)$$

其中 $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是 H 中的任意元, 则

$$\{\alpha_i\}_1^N \cup \{\lambda_j\}_{N+1}^\infty = \sigma_p(E_1, A_1 + F_1 + F_2 + \dots + F_m).$$

证明 1) 若 $N \leq m$, 我们分如下两种情形分别讨论.

(i) 若 $N = m$, 则由引理 1 和引理 5, 并按照复分析理论, 我们可以构造如式 (11) 的 g_i . 下面我们仅仅验证由这样的 g_i 可推出 $\{\alpha_i\}_1^N \subset \sigma_p(E_1, A_1 + F_1 + F_2 + \dots + F_m)$.

对于

$$\begin{cases} g_1 = x_1(E^*)^+ E^* \psi_{0,1} + [I - (E^*)^+ E^*] a_1, \\ x_1 = \frac{\bar{\alpha}_1 - \bar{\mu}_1}{\bar{b}_{11}}, \end{cases}$$

可以验证 $\langle E_1 R(\alpha_1 E_1; A_1) b'_1, g'_1 \rangle = 1$, 其中 $b'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix}$, $g'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 \end{bmatrix}$. 由引理 4 可得 $\alpha_1 \in \sigma_p(E_1, A_1 + F_1)$, 进一步, 我们有 $\{\alpha_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\} = \sigma_p(E_1, A_1 + F_1)$, 且算子 E_1 和 $A_1 + F_1$ 的所有广义特征向量的集合为 $\{R(\alpha_1 E_1; A_1) b_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$, 与这个集合满足双直交关系的算子 E_1^* 和 $A_1^* + F_1^*$ 的所有广义特征向量的集合记为 $\{\psi_{1,1}, \psi_{1,2}, \psi_{1,3}, \dots\}$.

用上面类似的方法, 我们可以证明: 当

$$\begin{cases} g_2 = x_2(E^*)^+ E^* \psi_{1,2} + [I - (E^*)^+ E^*] a_2, \\ x_2 = \frac{\bar{\alpha}_2 - \bar{\mu}_2}{\bar{b}_{22}} \end{cases}$$

时, 有 $\{\alpha_1, \alpha_2, \lambda_3, \dots\} = \sigma_p(E_1, A_1 + F_1 + F_2)$, 且算子 E_1 和 $A_1 + F_1 + F_2$ 的所有广义特征向量的集合为 $\{R(\alpha_1 E_1; A_1) b_1, R(\alpha_2 E_1; A_1 + F_1) b_2, \varphi_3, \varphi_4, \dots\}$, 与这个集合满足双直交关系的算子 E_1^* 和 $A_1^* + F_1^* + F_2^*$ 的所有广义特征向量的集合记为 $\{\psi_{2,1}, \psi_{2,2}, \psi_{2,3}, \dots\}$.

反复使用上面类似的方法 m 步, 可知, 当

$$\begin{cases} g_m = x_m(E^*)^+ E^* \psi_{m-1,m} + [I - (E^*)^+ E^*] a_m, \\ x_m = \frac{\bar{\alpha}_m - \bar{\mu}_m}{\bar{b}_{m,m}} \end{cases}$$

时, 有 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots\} = \sigma_p(E_1, A_1 + F_1 + F_2 + \dots + F_m)$, 且算子 E_1 和 $A_1 + F_1 + F_2 + \dots + F_m$ 的所有广义特征向量的集合为

$$\{R(\alpha_1 E_1; A_1) b_1, R(\alpha_2 E_1; A_1 + F_1) b_2, \dots, R(\alpha_m E_1; A_1 + F_1 + F_2 + \dots + F_{m-1}) b_m, \varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \dots\},$$

与这个集合满足双直交关系的算子 E_1^* 和 $A_1^* + F_1^* + F_2^* + \cdots + F_m^*$ 的所有广义特征向量的集合记为 $\{\psi_{m,1}, \psi_{m,2}, \psi_{m,3}, \dots\}$.

(ii) 若 $N < m$, 当我们任意选择 $(m - N)$ 个元: $g_{N+1}, g_{N+2}, \dots, g_m$, 算子 $F_{N+1}, F_{N+2}, \dots, F_m$ 就完全被确定了, 从而, 问题就转化为情形 (i).

2) 若 $N > m$, 用表达式 (12) 确定前 $(m - 1)$ 个元 $g_i (i = 1, 2, \dots, m - 1)$, 当它们被确定后, 算子 $F_1, F_2, \dots, F_{m-1}$ 也就被确定, 而且

$$\sigma_p(E_1, A_1 + F_1 + F_2 + \cdots + F_{m-1}) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots\},$$

算子 E_1 和 $A_1 + F_1 + F_2 + \cdots + F_{m-1}$ 的所有广义特征向量的集合为

$$\{R(\alpha_1 E_1; A_1) b_1, R(\alpha_2 E_1; A_1 + F_1) b_2, \dots, R(\alpha_{m-1} E_1; A_1 + F_1 + F_2 + \cdots + F_{m-2}) b_{m-1}, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots\},$$

与这个集合满足双直交关系的算子 E_1^* 和 $A_1^* + F_1^* + F_2^* + \cdots + F_{m-1}^*$ 的所有广义特征向量的集合记为 $\{\psi_{m-1,1}, \psi_{m-1,2}, \psi_{m-1,3}, \dots\}$.

用上面 (i) 中的方法, 只要 g_m 由式 (12) 给出, 则

$$\sigma_p(E_1, A_1 + F_1 + F_2 + \cdots + F_m) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \dots, \alpha_N, \lambda_{N+1}, \lambda_{N+2}, \dots\}.$$

综合 1) 和 2), 我们有 $\{\alpha_i\}_1^N \subset \sigma_p(E_1, A_1 + F_1 + F_2 + \cdots + F_m)$.

设 $\{\psi_{i,j}\}_{(i=1,2,\dots,m;j \in J)}$ 表示算子 E_1^* 和 $A_1^* + F_1^* + F_2^* + \cdots + F_i^* (i = 1, 2, \dots, m)$ 的广义特征向量的集合, 由假设 1 可知, $\{\psi_{i,j}\}_{(i=1,2,\dots,m;j \in J)}$ 构成 H 中的一个无条件基的子集.

定理 2 若系统 (1), E_1 和 $A_1 + F_1 + F_2 + \cdots + F_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 都满足假设 1, 存在 E^+ , 设

$$\mu_n = \begin{cases} \sqrt{\lambda_n}, & n = 1, 2, \dots, \\ -\sqrt{\lambda_n}, & n = -1, -2, \dots, \end{cases} \quad \lambda_n = \lambda_{-n} (n = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

且

- 1) $b_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle b_i, \psi_{i,j} \rangle \neq 0 (i = 1, 2, \dots, m; j = \pm 1, \pm 2, \dots), \psi_{i,j} = \psi_{i,(-j)} (j = \pm 1, \pm 2, \dots);$
- 2) $\inf_{i \neq j} |\mu_i - \mu_j| \geq \delta > 0;$
- 3) $\{\alpha_k\}_{k \in J}$ 是满足 $\alpha_k \neq \alpha_l (k \neq l), \alpha_k \notin \sigma_p(E_1, A_1) (k, l = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 的任意复数的集合, 级数 $\sum_{j \in J} \left| \frac{\alpha_j - \mu_j}{b_{ij}} \right|^2 (i = 1, 2, \dots, m)$ 收敛,

$$c_j = (\alpha_j - \mu_j) \prod_{l \in J, l \neq j} \left(\frac{\alpha_l - \mu_j}{\mu_l - \mu_j} \right) (j \in J)$$

满足 $c_j = c_{-j} (j \in J)$, 则存在

$$g_i = \sum_{j \in J} \left(\frac{\overline{\alpha_j} - \overline{\mu_j}}{\sqrt{2} b_{ij}} \right) \prod_{l \in J, l \neq j} \left(\frac{\alpha_l - \mu_j}{\mu_l - \mu_j} \right) \psi_{i,l} + [I - (E^*)^+ E^*] a_i (i = 1, 2, \dots, m),$$

使得

$$\sigma_p(E_1, A_1 + F_1 + F_2 + \cdots + F_m) = \sigma_p = \{\alpha_k\}_{k \in J},$$

其中 $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是 H 中的任意元.

证明 由于级数 $\sum_{j \in J} |\frac{\alpha_j - \mu_j}{b_{ij}}|^2 (i = 1, 2, \dots, m)$ 收敛, 我们能证明级数 $\sum_{j \in J} |\frac{c_j}{b_{ij}}|^2$ 也收敛. 事实上, 记 $\Delta_i = \prod_{j \in J, j \neq i} (\frac{\alpha_j - \mu_j}{\mu_j - \mu_i})$, 则有

$$\begin{aligned} |\Delta_i| &\leq \prod_{j \in J, j \neq i} \left(1 + \left| \frac{\alpha_j - \mu_j}{\mu_j - \mu_i} \right| \right) \leq \exp \left(\sum_{j \in J, j \neq i} \left| \frac{\alpha_j - \mu_j}{\mu_j - \mu_i} \right| \right) \\ &\leq \exp \left[\frac{1}{\delta} \sum_{j \in J, j \neq i} \left| \frac{\alpha_j - \mu_j}{b_{ij}} \right| |b_{ij}| \right] \leq \exp \left[\frac{1}{\delta} \left(\sum_{j \in J, j \neq i} \left| \frac{\alpha_j - \mu_j}{b_{ij}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j \in J, j \neq i} |b_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right], \end{aligned}$$

由定理 2 的条件 1, 以及 $\{\psi_{i,j}\}_{(i=1,2,\dots,m;j \in J)}$ 构成 H 中的一个无条件基的子集, 可知级数 $\sum_{j \in J, j \neq i} |b_{ij}|^2$ 是收敛的, 由定理 2 的条件 3, 级数 $\sum_{j \in J} |\frac{\alpha_j - \mu_j}{b_{ij}}|^2$ 收敛, 因此

$$\exp \left[\frac{1}{\delta} \left(\sum_{j \in J, j \neq i} \left| \frac{\alpha_j - \mu_j}{b_{ij}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j \in J, j \neq i} |b_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

是一个有限常数, 记为 M , 即有 $|\Delta_i| \leq M < +\infty$, 从而

$$\sum_{j \in J} \left| \frac{c_j}{b_{ij}} \right|^2 = \sum_{j \in J} \left| \frac{\mu_j - \alpha_j}{b_{ij}} \Delta_i \right|^2 \leq M^2 \sum_{j \in J} \left| \frac{\mu_j - \alpha_j}{b_{ij}} \right|^2,$$

所以级数 $\sum_{j \in J} |\frac{c_j}{b_{ij}}|^2$ 收敛.

由引理 1 及收敛级数 $\sum_{j \in J} |\frac{c_j}{b_{ij}}|^2$, 并按照复分理论, 我们可以构造如下的 $g_i (i = 1, 2, \dots, m)$:

$$g_i = \sum_{j \in J} \left(\frac{\bar{\alpha}_j - \bar{\mu}_j}{\sqrt{2}b_{ij}} \right) \prod_{l \in J, l \neq j} \left(\frac{\alpha_l - \mu_j}{\mu_l - \mu_j} \right) \psi_{i,l} + [I - (E^*)^+ E^*] a_i (i = 1, 2, \dots, m),$$

其中 $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是 H 中的任意元, 容易验证 $g_i \in H (i = 1, 2, \dots, m)$.

下面, 我们证明这些 $g_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 使得 $\sigma_p(E_1, A_1 + F_1 + F_2 + \dots + F_m) = \sigma_p = \{\alpha_k\}_{k \in J}$.
当

$$g_1 = \sum_{j \in J} \left(\frac{\bar{\alpha}_j - \bar{\mu}_j}{\sqrt{2}b_{1j}} \right) \prod_{l \in J, l \neq j} \left(\frac{\alpha_l - \mu_j}{\mu_l - \mu_j} \right) \psi_{1,l} + [I - (E^*)^+ E^*] a_1, \quad (13)$$

由于

$$\begin{aligned} \langle E_1 R(\alpha E_1; A_1) b'_1, g'_1 \rangle &= \sum_{j \in J} \frac{-c_j}{b_{1j}} \left\langle R(\alpha E_1; A_1) b'_1, E_1^* \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \text{sgn}(j) E^* \psi_{1,j} \\ \psi_{1,j} \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \sum_{j \in J} \frac{-c_j}{b_{1j}(\alpha - \mu_j)} \left\langle R(\alpha E_1; A_1) b'_1, (\bar{\alpha} E_1^* - A_1^*) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \text{sgn}(j) E^* \psi_{1,j} \\ \psi_{1,j} \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \sum_{j \in J} \frac{-c_j}{b_{1j}(\alpha - \mu_j)} \left\langle b'_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \text{sgn}(j) E^* \psi_{1,j} \\ \psi_{1,j} \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \sum_{j \in J} \frac{-c_j}{b_{1j}(\alpha - \mu_j)} \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \text{sgn}(j) E^* \psi_{1,j} \\ \psi_{1,j} \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in J} \frac{-c_j}{b_{1j}(\alpha - \mu_j)} \langle b_1, \psi_{1,j} \rangle \end{aligned}$$

$$= \sum_{j \in J} \frac{-c_j}{\alpha - \mu_j} = 1,$$

其中 $b'_1 = [\begin{smallmatrix} 0 \\ b_1 \end{smallmatrix}]$, $g'_1 = [\begin{smallmatrix} 0 \\ g_1 \end{smallmatrix}]$, 由引理 4 可知 $\alpha \in \sigma_p(E_1, A_1 + F_1)$, 从而 $\{\alpha_k\}_{k \in J} \subset \sigma_p(E_1, A_1 + F_1)$.

为了证明 $\{\alpha_k\}_{k \in J} \supset \sigma_p(E_1, A_1 + F_1)$, 我们只需证明: 若 $\alpha \notin \{\alpha_k\}_{k \in J}$, 则 $\alpha \notin \sigma_p(E_1, A_1 + F_1)$.

反证, 假设 $\alpha \in \sigma_p(E_1, A_1 + F_1)$, 分下面两种情形分别讨论.

(i) 如果 $\alpha \in \rho(E_1, A_1)$, 应用引理 4, 我们有

$$\langle E_1 R(\alpha E_1; A_1) b'_1, g'_1 \rangle = 1. \quad (14)$$

由于 $R(\alpha E_1; A_1) - R(\alpha_i E_1; A_1) = -(\alpha - \alpha_i) R(\alpha E_1; A_1) E_1 R(\alpha_i E_1; A_1)$, 由式 (14) 可得

$$(\alpha - \alpha_i) \langle R(\alpha E_1; A_1) E_1 R(\alpha_i E_1; A_1) b'_1, g'_1 \rangle = 0.$$

用式 (13) 及 $\alpha \neq \alpha_i$, 可推出

$$\sum_{j \in J} \frac{a_j b_{ij}}{(\alpha - \mu_j)(\alpha_i - \mu_j)} = \langle R(\alpha E_1; A_1) E_1 R(\alpha_i E_1; A_1) b'_1, g'_1 \rangle = 0.$$

记矩阵 $D_{2N} = [d_{jk}]_{2N \times 2N}$, 其中 $d_{jk} = \frac{1}{\alpha_k - \mu_j}$, 由于

$$\det D_{2N} = (-1)^{\frac{2N(2N-1)}{2}} \cdot \frac{\prod_{-N \leq k < j \leq N} (\alpha_k - \alpha_j) \prod_{-N \leq k < j \leq N} (\mu_k - \mu_j)}{\prod_{k=-N}^N \prod_{j=-N}^N (\alpha_k - \mu_j)} \neq 0,$$

从而 $\frac{a_j b_{ij}}{\alpha - \mu_j} = 0$, 于是 $a_j = 0$, 这与 $a_j \neq 0 (j \in J)$ 矛盾.

(ii) 如果 $\alpha \in \sigma_p(E_1, A_1)$, 则存在 $\mu_j (j \in J)$ 使得 $\alpha = \mu_j$. 由于 $\alpha \in \sigma_p(E_1, A_1)$, 所以存在 $\varphi \neq 0$ 使得

$$(A_1 + F_1)\varphi = A_1\varphi + \langle E_1\varphi, g'_1 \rangle b'_1 = \mu_j E_1\varphi. \quad (15)$$

从而

$$\langle (A_1 - \mu_j E_1)\varphi, \psi_{1,l} \rangle + \langle \langle E_1\varphi, g'_1 \rangle b'_1, \psi_{1,l} \rangle = 0. \quad (16)$$

由 $\langle (A_1 - \mu_j E_1)\varphi, \psi_{1,l} \rangle = \langle \varphi, (A_1 - \mu_j E_1)^* \psi_{1,l} \rangle = 0$ 及式 (16), 我们有 $\langle E_1\varphi, g'_1 \rangle = 0$. 由式 (15) 可得 $A_1\varphi = \mu_j E_1\varphi$, 从而 $\varphi = \mu_j$, 且 $a_j = \langle E_1\mu_j, g'_1 \rangle = 0$, 这与 $a_j \neq 0 (j \in J)$ 矛盾.

根据以上证明, 我们有 $\{\alpha_k\}_{k \in J} \supset \sigma_p(E_1, A_1 + F_1)$, 从而 $\{\alpha_k\}_{k \in J} = \sigma_p(E_1, A_1 + F_1)$.

当

$$g_2 = \sum_{j \in J} \left(\frac{\bar{\alpha}_j - \bar{\mu}_j}{\sqrt{2b_{2j}}} \right) \prod_{l \in J, l \neq j} \left(\frac{\alpha_l - \mu_j}{\mu_l - \mu_j} \right) \psi_{2,l} + [I - (E^*)^+ E^*] a_2,$$

可以验证 $\langle E_1 R(\alpha E_1; A_1 + F_1) b'_2, g'_2 \rangle = 1$, 其中 $b'_2 = [\begin{smallmatrix} 0 \\ b_2 \end{smallmatrix}]$, $g'_2 = [\begin{smallmatrix} 0 \\ g_2 \end{smallmatrix}]$, 由引理 4 可知 $\alpha \in \sigma_p(E_1, A_1 + F_1 + F_2)$, 从而 $\{\alpha_k\}_{k \in J} \subset \sigma_p(E_1, A_1 + F_1 + F_2)$.

用上面相类似的方法可证得 $\{\alpha_k\}_{k \in J} \supset \sigma_p(E_1, A_1 + F_1 + F_2)$, 从而 $\{\alpha_k\}_{k \in J} = \sigma_p(E_1, A_1 + F_1 + F_2)$.

连续使用上面的方法 m 步可得 $\sigma_p(E_1, A_1 + F_1 + F_2 + \cdots + F_m) = \sigma_p = \{\alpha_k\}_{k \in J}$.

4 系统 (1) 的反馈稳定性

定理 3 在假设 1 和 2 的条件下, 系统 (1) 反馈稳定当且仅当 A_{11} 是亚负定算子.

证明 从上面第 2 节可知, 在假设 1 和假设 2 的条件下, 系统 (1) 能写成系统 (7), 而系统 (7) 的解为 $y_1 = y_{10}e^{A_{11}t}$, $y_2 = -A_{22}^{-1}A_{21}y_{10}e^{A_{11}t}$. 因为 A_{11} 是亚负定算子, 所以 A_{11} 所有特征值的实部都是负的, 从而有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_1(t)\| = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_2(t)\| = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t)\| = 0$, 故 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x\| = 0$, 即系统 (1) 是反馈稳定的. 反之亦然.

定理 4 若系统 (1) 满足假设 1 和 2, 存在 E^+ , 且 $b_{ii} = \langle b_i, \psi_{i-1,i} \rangle \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$), $\{\alpha_k\}_1^N$ (N 是有限自然数) 是满足 $\alpha_k \neq \alpha_j$ ($k \neq j; k, j = 1, 2, \dots, N$) 和 $\alpha_k \notin \sigma_p(E, A)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) 的任意 N 个复数的集合,

1) 当 $N \leq m$, g_i ($i = 1, 2, \dots, N$) 由式 (11) 给出;

2) 当 $N > m$, g_i ($i = 1, 2, \dots, m-1$) 和 g_m 由式 (12) 给出.

如果 $\operatorname{Re}(\alpha_k) < 0$ ($k = 1, 2, \dots, N$), 则上面的 $g_i \in H$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 使得系统 (1) 是反馈稳定的.

证明 由定理 1 可知, 存在反馈控制律 $g_i \in H$ ($i = 1, 2, \dots, m$) (它们由式 (11) 和 (12) 给出) 使得 $\{\alpha_k\}_1^N$ 是系统 (3) 的极点, 由引理 2 知, $\{\alpha_k\}_1^N$ 也是系统 (7) 的极点. 因为 $\operatorname{Re}(\alpha_k) < 0$ ($k = 1, 2, \dots, N$), A_{11} 是亚负定算子, 所以, 由定理 3 可知, 系统 (1) 是反馈稳定的.

利用定理 2、引理 2 及定理 3, 我们能直接证明下面的定理 5.

定理 5 若系统 (1) 满足假设 1 和假设 2, E_1 和 $A_1 + F_1 + F_2 + \dots + F_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 都满足假设 1, 存在 E^+ , 设

$$\mu_n = \begin{cases} \sqrt{\lambda_n}, & n = 1, 2, \dots, \\ -\sqrt{\lambda_n}, & n = -1, -2, \dots, \end{cases} \quad \lambda_n = \lambda_{-n} (n = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

且

1) $b_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle b_i, \psi_{i,j} \rangle \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = \pm 1, \pm 2, \dots$), $\psi_{i,j} = \psi_{i,(-j)}$ ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$);

2) $\inf_{i \neq j} |\mu_i - \mu_j| \geq \delta > 0$;

3) $\{\alpha_k\}_{k \in J}$ 是满足 $\alpha_k \neq \alpha_l$ ($k \neq l$), $\alpha_k \notin \sigma_p(E_1, A_1)$ ($k, l = \pm 1, \pm 2, \dots$) 的任意复数的集合, 级数 $\sum_{j \in J} \left| \frac{\alpha_j - \mu_j}{b_{ij}} \right|^2$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 收敛, 且

$$c_j = (\alpha_j - \mu_j) \prod_{l \in J, l \neq j} \left(\frac{\alpha_l - \mu_j}{\mu_l - \mu_j} \right) \quad (j \in J)$$

满足 $c_j = c_{-j}$ ($j \in J$), 取

$$g_i = \sum_{j \in J} \left(\frac{\bar{\alpha}_j - \bar{\mu}_j}{\sqrt{2}b_{ij}} \right) \prod_{l \in J, l \neq j} \left(\frac{\alpha_l - \mu_j}{\mu_l - \mu_j} \right) \psi_{i,l} + [I - (E^*)^+ E^*] a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

其中 a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 是 H 中的任意元.

如果 $\operatorname{Re}(\alpha_k) < 0$ ($k \in J$), 则上面的 $g_i \in H$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 使得系统 (1) 反馈稳定.

5 结论

本文应用泛函分析及算子理论讨论了 Hilbert 空间中多输入的二阶广义分布参数系统的极点配置与反馈稳定性问题, 获得了这类系统极点可配置与可镇定的一些充分条件, 并利用复分析、复级数有

界线性算子的广义逆等方法建立了反馈控制律的构造性表达式. 本文结论不仅具有重要的实际意义, 而且对广义分布参数系统的控制综合问题研究具有重要的理论价值.

参考文献

- 1 Joder L, Fernandez M L. An implicit difference method for the numerical solution of coupled system of partial differential equations. *Appl Math Comput*, 1991, 46: 127–134
- 2 Lewis F L. A review of 2-D implicit systems. *Automatic*, 1992, 28: 345–354
- 3 Trzaska Z, Marszalek W. Singular distributed parameter systems. *IEEE Control Theory Appl*, 1993, 140: 305–308
- 4 Ge Z Q. The stabilizability for a class of generalized system. *Appl Funct Anal*, 1993, 1: 56–61
- 5 Ge Z Q. On the pole assignment for the generalized system. In: Uchida K, ed. *Proceedings of the First Asian Control Conference (ASCC)*. Tokyo: Waseda University Press, 1994. 33–36
- 6 Ge Z Q. Mathematical method concerning the generalized control system. In: Chen M Y, ed. *Systems Control Information Methodologies and Applications*. Wuhan: Huazhong Univ Sci Tech Press, 1994. 477–481
- 7 Ge Z Q. On spectrum distribution of the first order coupled generalized system. *Appl Funct Anal*, 1995, 2: 113–116
- 8 Ge Z Q. On the pole assignment for a class of second order coupled generalized system. In: American Automatic Control Council, ed. *Proceedings of the 1995 American Control Conference (ACC)*. Seattle: IEEE, 1995. 3391–3392
- 9 Ge Z Q. On the pole assignment of the first order generalized distributed parameter system coupled with the generalized lumped parameter system. In: Alberto I, Sergio B, Edoardo M, et al., eds. *Proceedings of the 3rd European Control Conference(ECC)*. Roma: Springer-Verlag, 1995. 110–114
- 10 Yue D, Liu Y Q. Variable structure control of singular distributed parameter system. *Control Dec*, 1996, 11: 127–134 [岳东, 刘永清. 广义分布参数系统的变结构控制. *控制与决策*, 1996, 11: 127–134]
- 11 Gao W B. *Theory and Design Method for Variable Structure Control*. Beijing: Science Press, 1996 [高为炳. 变结构控制的理论及设计方法. 北京: 科学出版社, 1996]
- 12 Yang J H, Feng Z S, Liu Y Q. Variable structure control of skeleton type for a singular distributed parameter system. *J South China Univ Technol (Nat Sci Ed)*, 1998, 26: 29–33 [杨建辉, 冯昭枢, 刘永清. 一类广义分布参数系统简约型变结构控制. *华南理工大学学报 (自然科学版)*, 1998, 26: 29–33]
- 13 Liu Y Q, Yang J H. The problem of variable structure control of structural stability for singular distributed parameter system. *J South China Univ Technol (Nat Sci Ed)*, 1999, 27: 77–80 [刘永清, 杨建辉. 广义分布参数系统结构稳定的变结构控制方法. *华南理工大学学报 (自然科学版)*, 1999, 27: 77–80]
- 14 Yang J H, Jiang L, Liu Y Q. Variable structure control of singular uncertain distributed parameter systems. *J Syst Eng Electron*, 1999, 21: 19–21
- 15 Yang J H, Cai X J, Liu Y Q. Sliding mode control of singular uncertain distributed parameter system. *J South China Univ Technol (Nat Sci Ed)*, 1999, 27: 32–36 [杨建辉, 蔡学军, 刘永清. 广义不确定分布参数系统的滑动模态控制. *华南理工大学学报 (自然科学版)*, 1999, 27: 32–36]
- 16 Ge Z Q, Ma Y H. On the pole assignment concerning the second order generalized system. In: Chen H F, ed. *Proceedings of the 14th International Federation of Automatic Control (IFAC)*. Oxford: Elsevier Science Ltd, 1999. 207–212
- 17 Yang J H, Liu Y Q. Sliding mode control of singular distributed parameter perturbation system. *Control Dec*, 2000, 15: 145–148 [杨建辉, 刘永清. 广义分布参数扰动系统滑动模态控制. *控制与决策*, 2000, 15: 145–148]
- 18 Ge Z Q. Asymptotically stability and stabilization of the generalized distributed parameter system. In: Coventry University, ed. *Proceedings of the International Conference on System Engineering (ICSE)*. Coventry: Coventry University Press, 2000. 637–639
- 19 Ge Z Q. Pole assignment for the first order coupled generalized control system. *J Control Theory Appl*, 2000, 17: 379–383
- 20 Ge Z Q. Pole assignment of the second order coupled generalized system. *Acta Anal Funct Appl*, 2000, 2: 298–305
- 21 Ge Z Q, Ma Y H. Pole assignment of the first order singular distributed parameter system. *Chin Ann Maths Ser A*, 2001, 22: 729–734 [葛照强, 马勇镐. 一阶广义分布参数系统的极点配置问题. *数学年刊 A 辑*, 2001, 22: 729–734]

- 22 Ge Z Q, Zhu G T, Ma Y H. Spectrum distribution of the second order generalized distributed parameter systems. *Appl Math Mech*, 2003, 24: 1083–1089
- 23 Ge Z Q. Pole assignment by state feedback of the second order coupled singular distributed parameter systems. *Control Cybern*, 2004, 33: 21–30
- 24 Ge Z Q. Pole assignment by feedback control of the second order coupled singular distributed parameter systems. *Control Cybern*, 2004, 33: 551–562
- 25 Ge Z Q, Liu F, Zhao G S. Pole assignment for a class of the first order coupled generalized systems. *Chin J Eng Math*, 2005, 22: 147–150 [葛照强, 刘锋, 赵广社. 一类一阶耦合广义系统的极点配置. *工程数学学报*, 2005, 22: 147–150]
- 26 Ge Z Q, Xu X Y, Zhu G T. Asymptotical stability by feedback control for a class of the first order singular control system. *Dynam Contin Discret Impuls Syst Ser B-Appl Algorithms*, 2006, 13: 574–577
- 27 Ge Z Q, Zhu G T, Feng D X. On the stabilization by feedback of the second order singular distributed parameter control systems. *Dynam Contin Discret Impuls Syst Ser B-Appl Algorithms*, 2006, 13: 116–120
- 28 Ge Z Q, Zhu G T, Feng D X. On the stabilization by feedback of the second order singular distributed parameter control systems (1). *Dynam Contin Discret Impuls Syst Ser B-Appl Algorithms*, 2007, 14: 858–862
- 29 Ge Z Q, Zhu G T, Feng D X. Degenerate semi-group methods for the exponential stability of the first order singular distributed parameter systems. *J Syst Sci Complex*, 2008, 21: 260–266
- 30 Liu F, Ge Z Q. Feedback control and pole assignment for a class of the second order singular control systems in Hilbert space. *J Syst Sci Math Sci*, 2008, 28: 257–264 [刘锋, 葛照强. Hilbert 空间中二阶广义分布参数系统的反馈控制与极点配置. *系统科学与数学*, 2008, 28: 257–264]
- 31 Liu F, Ge Z Q. Feedback control and pole assignment for the second order singular control systems. *Adv Math China*, 2008, 37: 683–689 [刘锋, 葛照强. 一类二阶广义控制系统的反馈控制与极点配置. *数学进展*, 2008, 37: 683–689]
- 32 Ge Z Q, Zhu G T, Feng D X. Exact controllability for singular distributed parameter system in Hilbert space. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2009, 52: 2045–2052 [葛照强, 朱广田, 冯德兴. Hilbert 空间中广义分布参数系统的精确能控性. *中国科学 F 辑: 信息科学*, 2009, 39: 1210–1216]
- 33 Ge Z Q. GE0-Semi-group and the exponential stability of the singular distributed parameter system. In: Ruan P N, Ge Z Y, eds. *Proceedings of the 3rd Conference of International Society for Scientific Inventions (ISSI)*. Liverpool: World Academic Press, 2009. 337–342
- 34 Shi G D, Liu F. Stability by feedback of the first order singular distributed parameter control systems containing infinite non-negative real part poles. In: Huang Y S, Su W Z, eds. *Proceedings of the 7th Asian Control Conference (ASCC)*. Piscataway: IEEE CS, 2009. 1416–1419
- 35 Liu F, Shi G D. Pole assignment of the first order generalized distributed parameter control systems with multiple inputs. In: Cao H W, Zhu X, eds. *Proceedings of the 21st Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*. Piscataway: IEEE CS, 2009. 4600–4604
- 36 Liu F, Shi G D. Uniform exponential stability of the time varying singular distributed parameter systems in Hilbert Space. In: Chen J, Cheng D Z, Duan G R, et al., eds. *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference(CCC)*. Piscataway: IEEE CS, 2010. 5784–5788
- 37 Ge Z Q, Zhu G T, Feng D X. Generalized operator semi-group and well-posedness of singular distributed parameter system. *Sci China Math*, 2010, 40: 477–495 [葛照强, 朱广田, 冯德兴. 广义算子半群与广义分布参数系统的适定性. *中国科学: 数学*, 2010, 40: 477–495]
- 38 Wang K N, Lv T, Zou Z Y. On the pole assignment for the distributed parameter system. *Sci China Ser A-Math*, 1982, 12: 172–184

The control synthesis problem for the second order singular distributed parameter system with multiple inputs

LIU Feng^{1*}, GE ZhaoQiang² & SHI GuoDong³

1 School of Mathematics and Physics, Jiangsu Teachers University of Technology, Changzhou 213001, China;

2 Department of Applied Applied Mathematics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

3 School of Information Science and Engineering, Changzhou University, Changzhou 213164, China

*E-mail: liufeng200099@vip.sina.com

Abstract Singular distributed parameter system is widely applicable, for example, to the studies of the temperature distribution of composites, signal propagation in electrical cables, voltage distribution of electromagnetically coupled superconductive circuits, and aircraft attitude control. Pole assignment and feedback stability are two important research aspects of the system. This paper, first of all, defines the pole assignment and feedback stability for the second order singular distributed parameter system with multiple inputs in Hilbert space, the subnegative definite operator, and the generalized inverse of the bounded linear operators, and presents some relevant properties; and then, it systemizes the second order singular distributed parameter system with multiple inputs into the first order singular distributed parameter system with multiple inputs by using the suitable transformation, which makes the two systems be of the same generalized eigenvalues, and discusses the pole assignment and feedback stability problems of the first order singular distributed parameter system with multiple inputs via functional analysis, operator theory and subnegative definite operator. Based on it, some sufficient conditions of the pole assignment and stability of the second order singular distributed parameter system with multiple inputs in Hilbert space are obtained. It establishes the constructive expressions of the feedback control laws by using complex analysis, complex series and the generalized inverse of the bounded linear operators. The research results are not only of practical significance, but of important theoretical values for studying the control synthesis problem of the singular distributed parameter system.

Keywords pole assignment, feedback stability, second order singular distributed parameter system, multiple inputs, Hilbert space

LIU Feng was born in 1965. He received the B.S. degree in mathematics from Northwest University, Xi'an in 1989. From September 2004 to July 2005, he was a Visiting Scholar at Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology. From February 2010 to August 2010, he was a Visiting Professor at Department of Mathematics, National University of Singapore. Currently, he is a Professor at School of Mathematics and Physics, Jiangsu Teachers University of Technology. His research interests include the singular system theory, modeling and control, and subnegative definite matrix theory.

GE ZhaoQiang was born in 1960. He received the B.S. degree in mathematics from Northwest University, Xi'an in 1983. Currently, he is a Professor at Department of Applied Mathematics, Xi'an Jiaotong University. His research interests include generalized control systems of finite dimensions, generalized control systems of infinite dimensions, robust control, optimal control, social and economical control systems.

SHI GuoDong was born in 1956. He received the B.S. degree in agricultural electrification and automation from Jiangsu University, Zhenjiang in 1982, and the Ph.D. degree in control science and engineering from Nanjing University of Science and Technology, Nanjing in 2005. Currently, he is a Professor at School of Information Science and Engineering, Changzhou University, and a Ph.D. supervisor at School of Electronic and Information Engineering, Jiangsu University. His research interests include the singular system theory, electrical technology and applications, and automation technology.