数值振荡积分: 基于奇性和波数的积分区间剖分法

献给林群教授 80 华诞

马云云, 许跃生*

中山大学数学与计算科学学院和广东省计算科学重点实验室, 广州 510275

E-mail: mayy007@foxmail.com, yxu06@syr.edu

收稿日期: 2014-10-30; 接受日期: 2015-04-09; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 91130009 和 11471013) 和广东省引进计算科学创新科研团队计划 (批准号: 11071286) 资助项目

摘要 本文针对高频振荡函数的积分提出了复合的 moment-free 的数值积分公式. 当被积函数没有奇点、振子没有驻点时, 复合的数值积分公式是基于对积分区间按振子导数值和波数剖分的原则设计, 利用 moment-free Filon 型数值积分公式计算子区间上的振荡积分. 当被积函数有奇点、振子存在驻点时, 根据函数的奇性和波数对积分区间剖分, 使其于每个子区间上为非剧烈振荡函数的奇异积分, 或光滑函数没有驻点的振荡积分. 然后, 采用经典的数值奇异积分公式计算非剧烈振荡函数的奇异积分, 采用修改的 moment-free Filon 型数值积分公式计算振荡积分. 与计算振荡积分的已知方法相比, 本文发展的复合 moment-free 的数值积分方法, 既不需要计算振子的反函数, 也不必借助特殊函数的积分.

关键词 振荡积分 代数奇性 驻点 moment-free Filon 型方法 区间分划

MSC (2010) 主题分类 65D30, 65D32

1 引言

高频振荡函数的积分在雷达、声呐和计算机断层扫描等领域有着广泛的应用. 随着振荡频率的增加, 被积函数振荡加剧, 除在积分区间端点和振子驻点附近, 函数值在积分区间的大部分区域相互抵消, 利用传统的数值积分公式计算振荡函数的积分时, 为保证计算精度, 计算量随振荡频率的增加呈线性增长. 因此, 振荡积分的研究, 特别是设计高效的、稳定的数值计算方法是当今计算数学研究的一个重要的且具有挑战性的课题.

本文研究形式为 $f e^{i\kappa g}$ 的振荡函数在有界区间上的数值积分公式, 其中波数 $\kappa \gg 1$, 振幅 f 具有奇性, 振子 g 存在驻点. 针对此类振荡函数的积分, 文献 [1] 提出了复合的 moment-free 的数值积分公式. 首先根据被积函数振荡的频率和奇性对积分区间设计一套剖分方案, 再选取恰当的数值积分公式计算被积函数在每个子区上的积分, 剖分方案的设计准则是保证每个子区间上的数值积分公式具有一致的收敛阶. 借鉴文献 [1] 中对积分区间剖分的思想, 本文设计了一系列新的剖分方法, 并基于相应的剖分方法提出了两类复合的 moment-free 的数值积分公式. 对于计算复杂振子的振荡积分, 新的数值积分公式不仅拥有文献 [1] 中方法无需计算振子反函数或借助特殊函数积分的优点, 而且在不降低计算精度的前提下, 减少了计算量, 提高了计算效率.

当被积函数充分光滑、振子在积分区间内存在使得所有小于正整数 r 阶的导数都为零的点时, 随着波数 $\kappa \rightarrow \infty$, 振荡积分的衰减速度是 $\mathcal{O}(\kappa^{-1/r})$ (参见文献 [2]). 当用 0 来近似积分值时, 精度是 $\mathcal{O}(\kappa^{-1/r})$. 所以, 当一个数值积分公式的精度低于 $\mathcal{O}(\kappa^{-1/r})$ 时, 视为无效的方法. 近年来, 振荡积分数值计算的研究取得了若干可喜的成果, 各种高效数值积分公式的共同特点是, 它们的计算精度随着被积函数振荡频率的增大而提高. 目前, 文献中计算振荡积分的数值方法主要有四种, 它们分别是: 渐进展开法、Filon 型方法、Levin 型方法和数值最速下降法. 渐进展开法是指利用波数的负指数形成的级数逼近积分值, 为研究振荡积分的特点和分析数值积分公式的收敛阶提供理论基础. 推导振荡积分渐进展开的数学工具有分部积分公式和 stationary phase 逼近等 (参见文献 [2–4]). 渐进展开方法采用振荡积分渐进展开前有限项部分和近似积分值. 对于固定的波数, 渐进展开法的收敛阶较低. Filon 型方法的主要思想是基于对振幅 f 的多项式插值逼近^[5–7], 将问题转化为计算振幅 f 为多项式族的振荡积分, 这类积分称为矩 (moment). Filon 型方法的提出可追溯到 20 世纪 20 年代. 近些年来, 通过利用对振幅 f 的 Hermite 插值逼近等想法繁衍出多种 Filon 型方法^[8–16]. 选取 Chebyshev 点作为插值节点^[11–14], 可以加快 Filon 型方法的收敛速度. Filon 型方法对于复杂振子数值积分的局限性是, 矩的精确计算比较困难, moment-free Filon 型方法^[13–16] 的提出弥补了这个缺陷, 但是, 文献 [13, 14] 中的方法需要计算振子的反函数, 文献 [15] 中的方法借助于特殊函数的积分. Levin^[17] 提出了另一种 moment-free 的数值积分公式 — Levin 型方法. Levin 型数值积分公式^[18–20] 是基于匹配算法寻找被积函数的一个原函数 $F e^{i\kappa g}$, 其中 F 满足微分方程 $F' + i\kappa g' F = f$. 数值最速下降法也是一种 moment-free 的数值积分公式, 它的设计思想是, 利用解析函数的积分与路径无关的性质, 在复平面上选取恰当的积分路径, 将实区间的振荡积分转化为复平面上的非振荡积分, 之后借助 Gauss-Laguerre 等传统的数值积分公式计算解析函数的积分^[21–24]. 提高上述方法计算具有复杂振子的振荡积分收敛阶的途径是补充被积函数高阶导数的信息. 文献 [1] 根据波数将积分区间剖分的想法仅利用 f , g 和 g' 在插值节点的信息构造出高阶收敛的复合的 moment-free 的数值积分公式, 这类方法无需计算振子的反函数或借助特殊函数的积分.

本文基于对积分区间按振子性质和波数剖分的想法, 将具有复杂振子的振荡积分分解为定义在子区间上的积分 — 非剧烈振荡函数的奇异积分与被积函数剧烈振荡但是没有奇点、振子没有驻点的振荡积分之和. 奇异积分采用文献 [25–27] 中的方法计算, 振荡积分利用文献 [1, 16] 中 moment-free Filon 型方法或修改的 moment-free Filon 型方法计算. 第 2 节对 moment-free Filon 型方法和修改的 moment-free Filon 型方法作了详细的介绍; 第 3 和 4 节分别针对被积函数没有奇点、振子没有驻点的振荡积分和被积函数有奇点、振子存在驻点的振荡积分, 提出了两类复合的 moment-free 的数值积分公式, 其中第一类数值积分公式具有多项式阶收敛性, 第二类数值积分公式具有指数阶收敛性; 第 5 节给出的数值结果验证了本文提出的方法的高效性.

2 Moment-free Filon 型数值积分公式

本文考虑以下形式的振荡积分:

$$\mathcal{I}_\kappa[f, g] := \int_I f(x) e^{i\kappa g(x)} dx, \quad (2.1)$$

其中积分区间是 $I := [0, 1]$, 波数 $\kappa \gg 1$, 振幅 $f \in L^1(I)$ 在积分区间 I 上存在奇点, 振子 $g \in C^\infty(I)$ 在积分区间 I 上存在驻点, 但是没有拐点. 数值积分公式的构造思想源于文献 [1]. 首先根据被积函数

的性质和波数将区间 I 剖分成 $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ 个子区间, 之后选取恰当的数值积分公式计算 $f e^{i\kappa g}$ 在每个子区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上的积分, 其中对于 $j \in \mathbb{Z}_{n-1} := \{0, 1, \dots, n-1\}$, x_j 表示剖分节点, 它们满足不等式 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$. 本节针对文献 [16] 中提出的 moment-free Filon 型方法和文献 [1] 中提出的修改的 moment-free Filon 型方法作详细介绍.

文献 [16] 研究的振荡积分形式是

$$\mathcal{I}_{\kappa}^{[a,b]}[f, g] := \int_a^b f(x) e^{i\kappa g(x)} dx,$$

其中积分区间长度 $b - a \leq 1$, 振幅 $f \in C[a, b]$, 振子 $g \in C^1[a, b]$. Moment-free Filon 型积分公式的设计思想是对区间 $[a, b]$ 作同胚变换 $g(x) \mapsto x$, 将复杂振子的振荡积分转化为线性振子的振荡积分, 利用 Filon 型方法计算相关的线性振子的振荡积分. 由于振子 g 在积分区间 $[a, b]$ 上不存在驻点, g 是定义在 $[a, b]$ 上严格单调的函数. 因此不失一般性, 假设振子 g 在 $[a, b]$ 上严格单调递增. 若假设不成立, 我们考虑计算振荡积分 $\mathcal{I}_{\kappa}^{[a,b]}[f, -g]$. 对积分区间作同胚变换, 积分 $\mathcal{I}_{\kappa}^{[a,b]}[f, g]$ 转化为线性振子的振荡积分

$$\mathcal{I}_{\kappa}^{[a,b]}[f, g] = \int_{g(a)}^{g(b)} \Psi(x) e^{i\kappa x} dx,$$

其中对于 $x \in [g(a), g(b)]$ 振幅的定义是 $\Psi(x) := ((f/g') \circ g^{-1})(x)$. 给定正整数 m , 在区间 $[a, b]$ 上选取 $m+1$ 个插值节点 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$. 将同胚变换作用于这 $m+1$ 个插值节点得到 $[g(a), g(b)]$ 上的插值节点 $g(t_j)$, 其中 $j \in \mathbb{Z}_m := \{0, 1, \dots, m\}$. 记 p_m 为函数 Ψ 以 $g(t_j)$ 为插值节点的 Newton 型插值多项式. 文献 [16] 中提出的 moment-free Filon 型数值积分公式是

$$\mathcal{Q}_{\kappa, m}^{[a,b]}[f, g] := \mathcal{I}_{\kappa}^{[g(a), g(b)]}[p_m, \tilde{g}], \quad (2.2)$$

其中 $\tilde{g}(x) := x$, $x \in [g(a), g(b)]$. (2.2) 的误差 $\mathcal{E}_{\kappa, m}^{[a,b]}[f, g] := |\mathcal{I}_{\kappa}^{[a,b]}[f, g] - \mathcal{Q}_{\kappa, m}^{[a,b]}[f, g]|$ 满足估计式

$$\mathcal{E}_{\kappa, m}^{[a,b]}[f, g] \leq \frac{3(m+1)}{m! \kappa^2} \|\Psi^{(m+1)}\|_{\infty} \sigma^m (b-a)^m, \quad (2.3)$$

其中

$$\sigma := \|g'\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} \{|g'(x)|\}, \quad \|\Psi^{(m+1)}\|_{\infty} := \max_{x \in [g(a), g(b)]} \{|\Phi(x)|\}.$$

引入记号, $\mathcal{N}(F)$ 表示数值积分公式 F 的求积节点数目. (2.2) 的求积节点数目满足不等式

$$\mathcal{N}(\mathcal{Q}_{\kappa, m}^{[a,b]}[f, g]) \leq m+1.$$

误差估计式 (2.3) 呈现出 (2.2) 的收敛速度受 σ 的影响. 特别地, 当 $\sigma > 1$ 时, σ^m 随着求积节点数目的增加指数增长. 为消除 σ 的影响, 文献 [1] 对 (2.2) 作了修改. 修改方法是将积分区间 $[a, b]$ 分成 $N \in \mathbb{N}$ 等份, 剖分节点记为 $y_j := a + (b-a)j/N$, $j \in \mathbb{Z}_N$, 利用 $m \in \mathbb{N}$ 次分片多项式逼近函数 Ψ . 计算振荡积分 $\mathcal{I}_{\kappa}^{[a,b]}[f, g]$ 的修改的 moment-free Filon 型数值积分公式是

$$\mathcal{Q}_{N, \kappa, m}^{[a,b]}[f, g] := \sum_{j \in \mathbb{Z}_N^+} \mathcal{Q}_{\kappa, m}^{[y_{j-1}, y_j]}[f, g], \quad (2.4)$$

其中 $\mathbb{Z}_N^+ := \{1, 2, \dots, N\}$. 积分公式 (2.4) 的求积节点数目满足 $\mathcal{N}(\mathcal{Q}_{N, \kappa, m}^{[a,b]}[f, g]) \leq Nm + 1$, 误差 $\mathcal{E}_{N, \kappa, m}^{[a,b]}[f, g] := |\mathcal{I}_{\kappa}^{[a,b]}[f, g] - \mathcal{Q}_{N, \kappa, m}^{[a,b]}[f, g]|$ 满足

$$\mathcal{E}_{N, \kappa, m}^{[a,b]}[f, g] \leq \frac{3(m+1)}{m! \kappa^2 N^{m-1}} \|\Psi^{(m+1)}\|_{\infty} \sigma^m (b-a)^m. \quad (2.5)$$

文献 [1] 分别针对被积函数没有奇点、振子没有驻点和拐点的振荡积分、被积函数在原点存在奇性、原点是振子唯一驻点但是没有拐点的振荡积分, 提出了复合的 moment-free 的数值积分公式. 当被积函数在积分区间上存在多个奇点、振子存在多个驻点或拐点时, 先对积分区间剖分, 使得在每一个子区间上, 被积函数奇点和振子驻点的数目之和不超过 1, 而且振子没有拐点, 之后采用文中提出的公式计算被积函数在各个子区间上的积分. 公式的计算步骤是, 先对积分区间 I 按着被积函数的奇性和波数作剖分, 再利用 (2.4) 计算定义在子区间上的振荡积分. 在文献 [1] 中数值积分公式的基础上, 本文设计了新的积分区间剖分策略, 提出改进的数值积分公式:

(i) 计算被积函数没有奇点、振子没有驻点和拐点的振荡积分的主要思想是, 先根据振子导数的性质对区间 I 作初次分划, 再根据波数将每个子区间二次剖分, 之后利用 (2.2) 计算被积函数在各个子区间上的积分.

(ii) 计算被积函数存在奇点、振子存在驻点但是没有拐点的振荡积分的主要思想是, 根据被积函数的奇性将积分区间分成两个子区间. 被积函数在第一个子区间存在奇点但是振荡不剧烈, 采用文献 [1, 25–27] 中处理奇异积分的方法计算这个区间的积分. 被积函数在第二个子区间振荡剧烈, 但没有奇性, 振子不存在驻点和拐点, 第 4 节将对这个区间的振荡积分提出新的数值积分公式.

3 没有奇点和驻点的振荡积分的数值积分公式

本节针对被积函数没有奇点、振子没有驻点和拐点的振荡积分 (2.1) 提出复合的 moment-free Filon 型数值积分公式, 其中函数 $f, g \in C^2(I)$, 振子 g 单调递增, 于区间 I 上没有驻点或拐点, 记 $\sigma = \|g'\|_\infty$.

首先, 对文献 [1] 中提出的积分公式作简单回顾. 对于 $n \in \mathbb{N}$ 按波数 κ 将 I 分成 $n > 1$ 个子区间, 剖分节点的定义是

$$t_0 = 0, \quad t_l = \kappa^{(l-1)/(n-1)-1}, \quad l \in \mathbb{Z}_n^+. \quad (3.1)$$

振荡积分 (2.1) 表示为被积函数在每个子区间上的积分和, 通过选取不同次数的样条函数逼近振幅 Ψ 分别构造了多项式阶和指数阶收敛的数值积分公式. 对于 $l \in \mathbb{Z}_n^+$, 记 $M_l := \max\{|g'(t_{l-1})|, |g'(t_l)|\}$, $N_l := \lceil M_l \rceil$. 多项式阶收敛的数值积分公式定义为

$$\mathcal{Q}_{\kappa, n, m}^{[1]}[f, g] := \sum_{l \in \mathbb{Z}_n^+} \mathcal{Q}_{N_l, \kappa, m}^{[t_{l-1}, t_l]}[f, g]. \quad (3.2)$$

此公式的求积节点数目 $\mathcal{N}(\mathcal{Q}_{\kappa, n, m}^{[1]}[f, g]) \leq \lceil \sigma \rceil nm + 1$, 它的误差 $\mathcal{E}_{\kappa, n, m}^{[1]}[f, g] := |\mathcal{I}_\kappa[f, g] - \mathcal{Q}_{\kappa, n, m}^{[1]}[f, g]|$ 满足估计式

$$\mathcal{E}_{\kappa, n, m}^{[1]}[f, g] \leq \frac{3(m+1)}{m! \kappa^2} \|\Psi^{(m+1)}\|_\infty \sigma \eta^{m-1},$$

其中 $\eta := \max\{1/\kappa, 1 - \kappa^{-1/(n-1)}\}$. 指数阶收敛的数值积分公式定义为

$$\mathcal{Q}_{\kappa, n}^{[1]}[f, g] := \sum_{l \in \mathbb{Z}_n^+} \mathcal{Q}_{N_l, \kappa, m_l}^{[t_{l-1}, t_l]}[f, g], \quad (3.3)$$

其中

$$m_l := \left\lceil \frac{n(n-1)}{n+1-l} \right\rceil, \quad l \in \mathbb{Z}_n^+. \quad (3.4)$$

对于 $n > 2$,

$$\mathcal{N}(\mathcal{Q}_{\kappa, n}^{[1]}[f, g]) \leq \lceil \sigma \rceil (n(n-1) \ln n + n^2) + 1.$$

记 $\mathcal{E}_{\kappa,n}^{[1]}[f,g] := |\mathcal{I}_{\kappa}[f,g] - \mathcal{Q}_{\kappa,n}^{[1]}[f,g]|$. 如果 $\Psi \in C^{\infty}[g(0), g(1)]$, 则存在常数 $c > 0$, 对于所有波数 $\kappa > 1$ 和满足条件 $(n-1)(\ln(n-2+e)-1) \geq \ln \kappa$ 的整数 n , 有

$$\mathcal{E}_{\kappa,n}^{[1]}[f,g] \leq c\sigma(n-2)^{-1/2}\kappa^{-n-1}\|\Psi\|_{(n-1)n+1},$$

其中对于 $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\Phi\|_n := \max\{\|\Phi^{(j)}\|_{\infty} : j \in \mathbb{Z}_n\}.$$

现在提出计算振荡积分 (2.1) 的改进的数值积分公式. 首先根据 g' 的性质对积分区间作剖分, 剖分方法将在后文中详细描述, 剖分节点记为 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$. 振荡积分 (2.1) 表示为

$$\mathcal{I}_{\kappa}[f,g] = \sum_{j \in \mathbb{Z}_N^+} \mathcal{I}_{\kappa}^{[x_{j-1}, x_j]}[f,g].$$

接下来将每个子区间上的积分转化为区间 I 上的振荡积分. 对子区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 作仿射变换 $L_j(t) := h_j t + x_{j-1}$ 得出 $\mathcal{I}_{\kappa}^{[x_{j-1}, x_j]}[f,g] = h_j \mathcal{I}_{\kappa}[f_j, g_j]$, 其中 $t \in I$, $h_j := x_j - x_{j-1}$, $j \in \mathbb{Z}_N^+$, 振幅和振子的定义分别是

$$f_j := f \circ L_j, \quad g_j := g \circ L_j. \quad (3.5)$$

在计算积分 $\mathcal{I}_{\kappa}[f_j, g_j]$, $j \in \mathbb{Z}_N^+$ 时采用文献 [1] 中的剖分方案对积分区间 I 分划, 积分 (2.1) 改写为

$$\mathcal{I}_{\kappa}[f,g] = \sum_{j \in \mathbb{Z}_N^+} \sum_{l \in \mathbb{Z}_n^+} h_j \mathcal{I}_{\kappa}^{[t_{l-1}, t_l]}[f_j, g_j],$$

其中对于固定的波数 κ 和整数 $n > 1$ 剖分节点, t_l , $l \in \mathbb{Z}_n$ 由 (3.1) 定义. 最后利用 (2.2) 计算振荡积分 $\mathcal{I}_{\kappa}^{[t_{l-1}, t_l]}[f_j, g_j]$, 其中 $l \in \mathbb{Z}_n^+$, $j \in \mathbb{Z}_N^+$.

误差估计式 (2.3) 呈现出积分公式 $\mathcal{Q}_{\kappa,m}^{[t_{l-1}, t_l]}[f_j, g_j]$ 受到 g'_j 的影响. 对于 $l \in \mathbb{Z}_n^+$, $j \in \mathbb{Z}_N^+$, 定义

$$M_{j,l} := \max_{t \in [t_{l-1}, t_l]} \{|g'_j(t)|\}. \quad (3.6)$$

如果 $M_{j,l} > 1$, (2.2) 的误差随 m 呈指数增长; 如果 $M_{j,l} = 1$, (2.2) 的误差不会受到 $M_{j,l}$ 的影响; 如果 $M_{j,l} < 1$, (2.2) 的误差随 m 呈指数衰减. 因此, 对积分区间的初次分划必须保证 $M_{j,l} \leq 1$, $l \in \mathbb{Z}_n^+$, $j \in \mathbb{Z}_N^+$. 根据 g' 单调性质的不同, 积分区间的初次分划分为两种情形. 如果 g' 单调递减, 第一个剖分节点选为 $x_0 = 0$, 若 $x_{j-1} \neq 1$, 第 $j \in \mathbb{N}$ 个节点的定义是

$$x_j := \begin{cases} \frac{1}{g'(x_{j-1})} + x_{j-1}, & \frac{1}{g'(x_{j-1})} + x_{j-1} \leq 1, \\ 1, & \frac{1}{g'(x_{j-1})} + x_{j-1} > 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

如果 g' 单调递增, 第一个剖分节点选为 $x_0 = 1$, 若 $x_{j-1} \neq 0$, 第 $j \in \mathbb{N}$ 个节点的定义是

$$x_j := \begin{cases} x_{j-1} - \frac{1}{g'(x_{j-1})}, & x_{j-1} - \frac{1}{g'(x_{j-1})} \geq 0, \\ 0, & x_{j-1} - \frac{1}{g'(x_{j-1})} < 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

对上述节点按递增顺序重新排列记为 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$, 便得到区间 I 的初次分划, 将初次剖分的节点构成的集合记为 $\mathbb{X}_N$, 其中 $N := \#(\mathbb{X}_N) - 1$.

引理 3.1 如果振子 $g \in C^2(I)$ 在区间 I 上不存在驻点和拐点, 则 $N \leq v := \max\{1, \sigma\}$.

证明 证明的想法是估计每个区间长度 $h_j := x_j - x_{j-1}$, $j \in \mathbb{Z}_N^+$ 的下界. 如果 $\sigma \leq 1$, 则 $N = 1$. 当 $\sigma > 1$ 时, 由剖分节点的选取方法 (3.7) 和 (3.8) 得出 $h_j \geq 1/\sigma$, $j \in \mathbb{Z}_N^+$. 因此, $N \leq \sigma$. 结论得证. $\square$

下面的引理将验证以 $\mathbb{X}_N$ 为节点的剖分满足 $M_{j,l} \leq 1$, $l \in \mathbb{Z}_n^+$, $j \in \mathbb{Z}_N^+$. 为此引入定义

$$D_j := \max_{x \in [x_{j-1}, x_j]} \{|g'(x)|\}, \quad j \in \mathbb{Z}_N^+.$$

引理 3.2 如果振子 $g \in C^2(I)$ 在区间 I 上不存在驻点和拐点, 则对于所有整数 $n > 1$, $l \in \mathbb{Z}_n^+$, $j \in \mathbb{Z}_N^+$, 有 $M_{j,l} \leq 1$.

证明 对函数 g_j 应用链式法则, 得出 $(g_j(t))' = h_j(g' \circ L_j)(t)$, 其中 $j \in \mathbb{Z}_N^+$, $t \in I$. 由 $M_{j,l}$ 和 D_j 的定义知, $M_{j,l} \leq h_j D_j \leq 1$. 结论得证. $\square$

与文献 [1] 中的剖分方案相比较, 初次剖分 $\mathbb{X}_N$ 与波数 κ 无关, 不会对子区间的细划产生影响, 当 $\sigma \leq 1$ 时, 两种剖分方案是一致的.

基于新的剖分方案, 我们提出了两个计算振荡积分 (2.1) 的复合的 moment-free Filon 型数值积分公式. 第一个复合积分公式在每个子区间上选取的求积节点数目相同, 方法具有多项式阶收敛性. 第二个复合积分公式在每个子区间上选取的求积节点数目不同, 方法具有指数阶收敛性.

首先考虑多项式阶收敛的数值积分公式. 设 $m \in \mathbb{N}$, 对于 $l \in \mathbb{Z}_n^+$, $j \in \mathbb{Z}_N^+$, 第一种积分公式是利用公式 $\mathcal{Q}_{\kappa,n,m}^{[t_{l-1}, t_l]}[f_j, g_j]$ 计算振荡积分 $\mathcal{I}_{\kappa}^{[t_{l-1}, t_l]}[f_j, g_j]$, 即

$$\mathcal{Q}_{\kappa,n,m}^{[2]}[f, g] := \sum_{j \in \mathbb{Z}_N^+} \sum_{l \in \mathbb{Z}_n^+} h_j \mathcal{Q}_{\kappa,n,m}^{[t_{l-1}, t_l]}[f_j, g_j], \quad (3.9)$$

其中 f_j 和 g_j 由 (3.5) 定义. 记

$$\Psi_j := \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix} \circ g_j^{-1}, \quad j \in \mathbb{Z}_N^+. \quad (3.10)$$

下面分析 $\mathcal{E}_{\kappa,n,m}^{[2]}[f, g] := |\mathcal{I}_{\kappa}[f, g] - \mathcal{Q}_{\kappa,n,m}^{[2]}[f, g]|$ 和 $\mathcal{N}(\mathcal{Q}_{\kappa,n,m}^{[2]}[f, g])$ 的上界.

定理 3.3 记 $\eta := \max\{1/\kappa, 1 - \kappa^{-1/(n-1)}\}$, 其中整数 $n > 1$. 如果 $\Psi \in C^{m+1}[g(0), g(1)]$, 则

$$\mathcal{E}_{\kappa,n,m}^{[2]}[f, g] \leq \frac{3(m+1)}{m! \kappa^2} \|\Psi^{(m+1)}\|_{\infty} v \eta^{m-1}, \quad \mathcal{N}(\mathcal{Q}_{\kappa,n,m}^{[2]}[f, g]) \leq v n m + 1.$$

证明 证明方法是估计 $\mathcal{E}_{j,l}[f, g] := h_j |\mathcal{I}_{\kappa}^{[t_{l-1}, t_l]}[f_j, g_j] - \mathcal{Q}_{\kappa,n,m}^{[t_{l-1}, t_l]}[f_j, g_j]|$ 的上界并对得到的不等式关于 $l \in \mathbb{Z}_n^+$, $j \in \mathbb{Z}_N^+$ 求和. 对 $l \in \mathbb{Z}_n^+$, $j \in \mathbb{Z}_N^+$, 将定义 (3.6) 和 (3.10) 代入到误差估计式 (2.3) 得

$$\mathcal{E}_{j,l}[f, g] \leq \frac{3(m+1)}{m! \kappa^2} \|\Psi_j^{(m+1)}\|_{\infty} h_j M_{j,l}^m d_l^m,$$

其中 $h_j := x_j - x_{j-1}$, 剖分节点 x_j , $j \in \mathbb{Z}_N$ 由 (3.7) 或 (3.8) 定义, $d_l := t_l - t_{l-1}$, 剖分节点 t_l , $l \in \mathbb{Z}_n$ 由 (3.1) 定义. 对 Ψ_j 应用链式法则有 $\Psi_j^{(m+1)} = \Psi^{(m+1)}/h_j$, $j \in \mathbb{Z}_N^+$. 再利用引理 3.2 推出

$$\mathcal{E}_{j,l}[f, g] \leq \frac{3(m+1)}{m! \kappa^2} \|\Psi^{(m+1)}\|_{\infty} d_l^m. \quad (3.11)$$

注意到当 $l = 1$ 时 $d_1 = t_1 - t_0 = 1/\kappa \leq \eta$; 当 $l > 1$ 时 $d_l = t_l - t_{l-1} = t_l(1 - \kappa^{-1/(n-1)}) \leq t_l \eta \leq \eta$. 应用引理 3.1 和 $d_l \leq \eta$, $l \in \mathbb{Z}_n^+$, 得到

$$\mathcal{E}_{\kappa,n,m}^{[2]}[f, g] \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}_N^+} \sum_{l \in \mathbb{Z}_n^+} \mathcal{E}_{j,l}[f, g] \leq \frac{3(m+1)}{m! \kappa^2} \|\Psi^{(m+1)}\|_{\infty} v \eta^{m-1}.$$

将每个子区间上的求积节点数目相加并减去被重复利用的节点即可得到定理中的第二个结论. $\square$

特别地, 对于利用 (3.9) 计算具有线性振子 $g(x) = x$, $x \in I$ 的振荡积分有如下结论.

推论 3.4 记 $\eta := \max\{1/\kappa, 1 - \kappa^{-1/(n-1)}\}$, 其中整数 $n > 1$. 如果 $f \in C^{m+1}(I)$, 则

$$\mathcal{E}_{\kappa,n,m}^{[2]}[f, g] \leq \frac{3(m+1)}{m!\kappa^2} \|f^{(m+1)}\|_{\infty} \eta^{m-1}, \quad \mathcal{N}(\mathcal{Q}_{\kappa,n,m}^{[2]}[f, g]) \leq nm + 1.$$

现在考虑指数阶收敛的数值积分公式. 设 m_l 由 (3.4) 定义, 对于 $l \in \mathbb{Z}_n^+$, $j \in \mathbb{Z}_N^+$, 指数阶收敛的方法是利用公式 $\mathcal{Q}_{\kappa,m_l}^{[t_{l-1}, t_l]}[f_j, g_j]$ 计算振荡积分 $\mathcal{I}_{\kappa}^{[t_{l-1}, t_l]}[f_j, g_j]$, 它的定义是

$$\mathcal{Q}_{\kappa,n}^{[2]}[f, g] := \sum_{j \in \mathbb{Z}_N^+} \sum_{l \in \mathbb{Z}_n^+} h_j \mathcal{Q}_{\kappa,m_l}^{[t_{l-1}, t_l]}[f_j, g_j]. \quad (3.12)$$

为了分析 (3.12) 的误差 $\mathcal{E}_{\kappa,n}^{[2]}[f, g] := |\mathcal{I}_{\kappa}[f, g] - \mathcal{Q}_{\kappa,n}^{[2]}[f, g]|$, 先回顾文献 [1] 中的两个辅助引理.

引理 3.5 存在常数 $c > 0$, 对于所有整数 $n > 2$ 满足不等式

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}_n^+} \frac{1}{m_l - 1} \leq c.$$

引理 3.6 存在常数 $c > 0$, 对于所有 $\kappa > 1$ 和满足

$$(n-1)(\ln(n-2+e) - 1) \geq \ln \kappa \quad (3.13)$$

的整数 n 和 $l \in \mathbb{Z}_n^+$ 且 $l > 1$, 有 $(\kappa^{1/(n-1)} - 1)^{m_l-2}/(m_l-2)! \leq c(n-2)^{-1/2}$.

引理 3.5 和 3.6 的证明可以在文献 [1] 中找到. 下面对 $\mathcal{E}_{\kappa,n}^{[2]}[f, g]$ 作估计.

定理 3.7 如果 $\Psi \in C^\infty[g(0), g(1)]$, 则存在常数 $c > 0$, 对于所有波数 $\kappa > 1$ 和满足条件 (3.13) 的整数 n , 有

$$\mathcal{E}_{\kappa,n}^{[2]}[f, g] \leq cv(n-2)^{-1/2} \kappa^{-n-1} \|\Psi\|_{(n-1)n+1}.$$

如果 $n > 2$, 则

$$\mathcal{N}(\mathcal{Q}_{\kappa,n}^{[2]}[f, g]) \leq v(n(n-1) \ln n + n^2) + 1.$$

证明 首先估计每个区间上数值积分公式的误差

$$\mathcal{E}_{j,l}[f, g] := h_j |\mathcal{I}_{\kappa}^{[t_{l-1}, t_l]}[f_j, g_j] - \mathcal{Q}_{\kappa,m_l}^{[t_{l-1}, t_l]}[f_j, g_j]|, \quad j \in \mathbb{Z}_N^+, \quad l \in \mathbb{Z}_n^+.$$

由估计式 (3.11) 推出

$$\mathcal{E}_{j,l}[f, g] \leq \frac{3(m_l+1)}{m_l!\kappa^2} \|\Psi^{(m_l+1)}\|_{\infty} d_l^{m_l}, \quad (3.14)$$

其中 $d_l := t_l - t_{l-1}$, 剖分节点 t_l , $l \in \mathbb{Z}_n$ 由 (3.1) 定义. 当 $l = 1$ 时,

$$\mathcal{E}_{j,1}[f, g] \leq \frac{6}{(n-2)!} \kappa^{-(n+1)} \|\Psi^{(n)}\|_{\infty}.$$

当 $l > 1$ 时, 把 $d_l = \kappa^{(l-n-1)/(n-1)}(\kappa^{1/(n-1)} - 1)$ 代入到 (3.14) 中得

$$\mathcal{E}_{j,l}[f, g] \leq \frac{6}{m_l-1} \frac{(\kappa^{1/(n-1)} - 1)^{m_l-2}}{(m_l-2)!} (\kappa^{1/(n-1)} - 1)^2 \kappa^{\frac{l-n-1}{n-1}m_l-2} \|\Psi^{(m_l+1)}\|_{\infty}.$$

由条件 (3.13) 推出 $n > 2$, 于是有 $(\kappa^{1/(n-1)} - 1)^2 < \kappa$. 再由引理 3.6 推出, 存在常数 $c > 0$, 对于所有波数 $\kappa > 1$, $j \in \mathbb{Z}_N^+$ 和满足条件 (3.13) 的整数 n 和 $l \in \mathbb{Z}_n^+$ 且 $l > 1$, 有

$$\mathcal{E}_{j,l}[f, g] \leq c \frac{(n-2)^{-1/2}}{m_l-1} \kappa^{\frac{l-n-1}{n-1}m_l-1} \|\Psi^{(m_l+1)}\|_{\infty}.$$

注意到对于 $l \in \mathbb{Z}_n^+$ 且 $l > 1$ 有 $(l - n - 1)m_l/(n - 1) - 1 \leq -n - 1$. 所以, 存在常数 $c > 0$, 对于所有波数 $\kappa > 1$, $j \in \mathbb{Z}_N^+$ 和满足条件 (3.13) 的整数 n 和 $l \in \mathbb{Z}_n^+$ 且 $l > 1$, 有

$$\mathcal{E}_{j,l}[f_j, g_j] \leq c \frac{(n-2)^{-1/2}}{m_l-1} \kappa^{-n-1} \|\Psi^{(m_l+1)}\|_\infty.$$

最后, 将 $\mathcal{E}_{j,l}[f, g]$ 的估计式关于 $j \in \mathbb{Z}_N^+$ 和 $l \in \mathbb{Z}_n^+$ 求和并应用引理 3.1 和 3.5 得以下结论: 存在常数 $c > 0$, 对于所有波数 $\kappa > 1$ 和满足条件 (3.13) 的整数 n , 有

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\kappa,n}^{[2]}[f, g] &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}_N^+} \left\{ \frac{6\kappa^{-(n+1)}}{(n-2)!} \|\Psi^{(n)}\|_\infty + c\kappa^{-n-1} \left\{ \sum_{l=2}^n \frac{(n-2)^{-1/2}}{m_l-1} \right\} \|\Psi_{(n-1)n+1}\| \right\} \\ &\leq cv(n-2)^{-1/2} \kappa^{-n-1} \|\Psi\|_{(n-1)n+1}. \end{aligned}$$

最后估计 (3.12) 的求积节点数目. 根据公式的构造方法和 $m_l, l \in \mathbb{Z}_n^+$ 的定义 (3.4) 知,

$$\mathcal{N}(\mathcal{Q}_{\kappa,n}^{[2]}[f, g]) \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}_N^+} \left\{ \sum_{l \in \mathbb{Z}_n^+} \left\{ \left(\frac{n(n-1)}{n+1-l} + 1 \right) + 1 \right\} - (n-1) \right\} - (v-1).$$

应用引理 3.1 和不等式 $\sum_{j \in \mathbb{Z}_n^+} 1/j \leq \ln n + 1$ 推出

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathcal{Q}_{\kappa,n}^{[2]}[f, g]) &\leq v \left\{ n + n(n-1) \sum_{l \in \mathbb{Z}_n^+} (1/(n+1-l)) \right\} + 1 \\ &\leq v \{ n + n(n-1)(\ln(n) + 1) \} + 1 = v(n(n-1) \ln n + n^2) + 1. \end{aligned}$$

证明完毕. □

特别地, 对于利用 (3.9) 计算具有线性振子 $g(x) = x, x \in I$ 的振荡积分, 我们有如下结论.

推论 3.8 如果 $f \in C^\infty(I)$, 则存在常数 $c > 0$, 对于所有波数 $\kappa > 1$ 和满足条件 (3.13) 的整数 n , 有

$$\mathcal{E}_{\kappa,n}^{[2]}[f, g] \leq c(n-2)^{-1/2} \kappa^{-n-1} \|f\|_{(n-1)n+1}.$$

如果 $n > 2$, 则

$$\mathcal{N}(\mathcal{Q}_{\kappa,n}^{[2]}[f, g]) \leq n(n-1) \ln n + n^2 + 1.$$

通过观察积分公式 (3.2) 与 (3.9) 及 (3.3) 与 (3.12) 得到如下的结论: 当 $\sigma \leq 1$ 时, 两种多项式阶收敛的公式 (3.2) 与 (3.9) 是相同的, 两种指数阶收敛的公式 (3.3) 与 (3.12) 也是一致的. 当 $\sigma > 1$ 时, (3.9) 与 (3.12) 积分区间初次剖分的节点不因波数 κ 和 n 的变化而改变, 易于设计并行算法提高计算效率. (3.2) 与 (3.9) 的误差估计表明, 两种多项式阶收敛的方法在理论上计算精度相同, (3.3) 与 (3.12) 的误差估计表明, 两种指数阶收敛的方法在理论上具有相同的计算精度.

4 存在奇点和驻点的振荡积分的数值积分公式

本节针对被积函数有奇点、振子存在驻点但是没有拐点的振荡积分 (2.1) 提出复合的 moment-free 的数值积分公式. 积分区间的初次分划与文献 [1] 中的剖分一致, 首先依照被积函数的奇性对积分区间剖分, 使得在每一个子区间上, 被积函数为存在奇点的非剧烈振荡函数, 或被积函数剧烈振荡但是

没有奇点、振子没有驻点和拐点, 将复杂的振荡积分分解为计算非剧烈振荡函数的奇异积分和光滑函数、振子不存在驻点的振荡积分. 奇异积分将采用文献 [1] 中描述的数值奇异积分公式计算. 对于振荡积分的计算, 我们对积分区间设计了新的剖分方法, 并基于此剖分方案构造了两个数值积分公式.

首先刻画函数的奇性. 设 m 为非负整数, $f \in C^m(I/\{0\})$, 如果对 $\mu \in (-1, 1)$, 存在常数 $c > 0$, 对于所有 $x \in (0, 1]$ 有 $|f^{(m)}(x)| \leq cx^{\mu-m}$, 则称 $f \in \text{Type}(\alpha, m, \{0\})$. 参数 μ 称为奇性指数. 有关奇异函数的定义可以参见文献 [1, 25, 28]. 设 $f \in C^\infty(I/\{0\})$, 如果对 $\mu \in (-1, 1)$, 存在常数 $c > 0$, 对于所有 $m \in \mathbb{N}$ f 满足上面的不等式, 则记 $f \in \text{Type}(\mu, \infty, \{0\})$.

文献 [1] 假设振幅 f 仅在原点存在奇性, 振子 g 满足如下的假设.

假设 4.1 设 r 为非负整数. 振子 $g \in C^{r+1}(I)$ 单调递增, 在积分区间 I 上不存在拐点, 原点是唯一的驻点, 且具有如下的性质:

- (i) $g^{(j)}(0) = 0, j \in \mathbb{Z}_r$;
- (ii) $g^{(r+1)}(x) \neq 0, x \in I$;
- (iii) $\sigma(r) := \|g^{(r+1)}\|_\infty / (r+1)! \ll \kappa$.

假设振子 g 满足 $g(0) = 0$ 是合理的, 如果 $g(0) \neq 0$, 可以计算等值的振荡积分 $\mathcal{I}_\kappa[f, g - g(0)] + \exp\{i\kappa g(0)\}\mathcal{I}_\kappa[f, 0]$. 特别地, 当 $r = 0$ 时, 振子 g 不存在驻点.

当 $\sigma(r) \leq 1$ 时, 定义 $\kappa_{\sigma(r)} := \kappa$; 当 $\sigma(r) > 1$ 时, 定义 $\kappa_{\sigma(r)} := \kappa\sigma(r)$. 在文献 [1] 中积分区间 I 被分成两个子区间 $[0, \lambda_r]$ 和 $\Lambda := [\lambda_r, 1]$, 其中

$$\lambda_r := \kappa_{\sigma(r)}^{-1/(r+1)}. \quad (4.1)$$

对振子 g 进行 Taylor 展开, 可知被积函数 $f e^{i\kappa g}$ 在区间 $[0, \lambda_r]$ 上振荡不剧烈, 在区间 Λ 上没有奇点, 振子 g 在区间 Λ 上没有驻点. 引入记号 $\mathcal{I}[\phi] := \int_0^1 \phi(x) dx$, $\phi \in L^1(I)$ 和函数 $\varphi_\kappa(x) := f(\lambda_r x) e^{i\kappa g(\lambda_r x)}$, $x \in I$. 振荡积分 (2.1) 分解为 $\mathcal{I}_\kappa[f, g] = \mathcal{I}^\mu[f, g] + \mathcal{I}_\kappa^\Lambda[f, g]$, 其中

$$\mathcal{I}^\mu[f, g] := \lambda_r \mathcal{I}[\varphi_\kappa], \quad (4.2)$$

$$\mathcal{I}_\kappa^\Lambda[f, g] := \int_{\lambda_r}^1 f(x) e^{i\kappa g(x)} dx. \quad (4.3)$$

复杂被积函数的振荡积分转化为计算奇异积分 $\mathcal{I}^\mu[f, g]$ 和振荡积分 $\mathcal{I}_\kappa^\Lambda[f, g]$.

文献 [1] 中提出的第一种积分公式是多项式阶收敛的. 首先描述计算积分 $\mathcal{I}^\mu[f, g]$ 的公式. 设 $m \in \mathbb{N}$, 定义 $p := (2m+1)/(1+\mu)$. 将区间 I 剖分成 $s \in \mathbb{N}$ 个子区间, 其中 $s > 1$, 剖分节点为 $x_j := s^{-p} j^p, j \in \mathbb{Z}_s$. 计算 $\mathcal{I}^\mu[f, g]$ 的数值积分公式为

$$\mathcal{Q}_{\mu, m}^s[f, g] := \lambda_r \sum_{j \in \mathbb{Z}_{s-1}^+} \mathcal{Q}_m^{[x_j, x_{j+1}]}[\varphi_\kappa], \quad (4.4)$$

其中 $\mathcal{Q}_m^{[a, b]}[\psi]$ 表示计算积分 $\mathcal{I}^{[a, b]}[\psi] := \int_a^b \psi(x) dx$ 的 m 个求积节点的 Gauss-Legendre 积分公式. 现在描述计算积分 $\mathcal{I}_\kappa^\Lambda[f, g]$ 的方法. 积分区间 Λ 被剖分成 $n \in \mathbb{N}$ 个子区间, 其中剖分节点的定义是

$$x_j := \kappa_{\sigma(r)}^{(j/n-1)/(r+1)}, \quad j \in \mathbb{Z}_n. \quad (4.5)$$

对于 $j \in \mathbb{Z}_n^+$, 记

$$M_j := \max\{|g'(x_{j-1})|, |g'(x_j)|\}, \quad (4.6)$$

$q_j := M_j x_{j-1} / g(x_{j-1})$. 计算 $\mathcal{I}_\kappa^\Lambda[f, g]$ 的数值积分公式为

$$\mathcal{Q}_{\kappa, n, m}^{\Lambda, [1]}[f, g] := \sum_{j \in \mathbb{Z}_n^+} \mathcal{Q}_{N_j, \kappa, m}^{[x_{j-1}, x_j]}[f, g], \quad (4.7)$$

其中对于 $j \in \mathbb{Z}_n^+$, 当 $r = 0$ 时, $N_j := [q_j]$; 当 $r > 0$ 时, $N_j := [q_j^{m/(m-1)}]$. 公式 $\mathcal{Q}_{\kappa, n, m}^{\Lambda, [1]}[f, g]$ 求积节点的数目与 q_j 关系密切. 设 $n \in \mathbb{N}$, $\kappa > 1$, $\mathbb{Q}_n := \max_{j \in \mathbb{Z}_n^+} \{q_j\}$ 的一个上界是

$$\mathbb{Q}_n \leq (r+1) \kappa_{\sigma(r)}^{r/(n(r+1))} \frac{\sigma(r)}{\delta(r)},$$

其中 $\delta(r) := \min\{|g^{(r+1)}(x)|/(r+1)! : x \in I\}$. 选取两个正整数 $\tilde{m}$ 和 m , 计算振荡积分 (2.1) 的第一种数值积分公式为 $\mathcal{Q}_{\kappa, n, m}^{s, \tilde{m}, [1]}[f, g] := \mathcal{Q}_{\mu, \tilde{m}}^s[f, g] + \mathcal{Q}_{\kappa, n, m}^{\Lambda, [1]}[f, g]$.

文献 [1] 中提出的第二种积分公式是指数阶收敛的. 首先描述计算积分 $\mathcal{I}^\mu[f, g]$ 的公式. 设 $\gamma \in (0, 1)$ 和 $s \in \mathbb{N}$, 在区间 I 上定义 $s+1$ 个节点 $x_0 = 0$, $x_j = \gamma^{s-j}$, $j \in \mathbb{Z}_s^+$, 把区间 I 剖分成 $s > 1$ 个子区间. 计算 $\mathcal{I}^\mu[f, g]$ 的数值积分公式为

$$\mathcal{Q}_\gamma^s[f, g] := \lambda_r \sum_{j \in \mathbb{Z}_{s-1}^+} \mathcal{Q}_{m_j}^{[x_j, x_{j+1}]}[\varphi_\kappa], \quad (4.8)$$

其中取 $\varepsilon \geq 1$, $m_j := [j\varepsilon]$, $j \in \mathbb{Z}_{s-1}^+$. 对于积分 $\mathcal{I}_\kappa^\Lambda[f, g]$ 的计算, 积分区间 Λ 的剖分方法与第一种多项式阶收敛方法的剖分方案一致, 剖分节点由 (4.5) 定义. 计算振荡积分 (4.3) 的数值积分公式是

$$\mathcal{Q}_{\kappa, n}^{\Lambda, [1]}[f, g] := \sum_{j \in \mathbb{Z}_n^+} \mathcal{Q}_{N_j, \kappa, m_j}^{[x_{j-1}, x_j]}[f, g], \quad (4.9)$$

其中 $m_j := n + [(n+1-j)(1-\alpha)]$, $N_j := [q_j]$, $j \in \mathbb{Z}_n^+$. 设 $s, n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (0, 1)$, $\varepsilon \geq 1$, 计算振荡积分 (2.1) 的第二种数值积分公式为 $\mathcal{Q}_{\kappa, n}^{s, \gamma, [1]}[f, g] := \mathcal{Q}_\gamma^s[f, g] + \mathcal{Q}_{\kappa, n}^{\Lambda, [1]}[f, g]$.

现在, 构造计算振荡积分 (2.1) 的两种新的数值积分公式. 积分区间的初次分划与文献 [1] 中的剖分相同, 把积分区间 I 分成两个子区间 $[0, \lambda_r]$ 和 Λ , 其中 λ_r 由 (4.1) 定义. 之后分别计算由 (4.2) 定义的奇异积分 $\mathcal{I}^\mu[f, g]$ 和由 (4.3) 定义的振荡积分 $\mathcal{I}_\kappa^\Lambda[f, g]$. 奇异积分 $\mathcal{I}^\mu[f, g]$ 继续采用文献 [1] 中定义的公式计算. 我们将提出两种新方法计算振荡积分 $\mathcal{I}_\kappa^\Lambda[f, g]$.

首先, 在下面的两个定理中列出积分公式 (4.4) 和 (4.8) 的收敛性分析, 相关的证明可以参见文献 [1]. 为此, 引入记号 $\mathcal{E}_{\mu, m}^s[f, g] := |\mathcal{Q}_{\mu, m}^s[f, g] - \mathcal{I}^\mu[f, g]|$ 和 $\mathcal{E}_\gamma^s[f, g] := |\mathcal{I}^\mu[f, g] - \mathcal{Q}_\gamma^s[f, g]|$.

定理 4.2 设 $m \in \mathbb{N}$. 如果对于 $\mu \in (-1, 1)$, 振幅 $f \in \text{Type}(\mu, 2m, \{0\})$, 振子 $g \in C^{2m}(I)$ 满足假设 4.1, 则存在常数 $c > 0$, 对于所有 $\kappa > 1$ 和整数 $s > 1$, 有

$$\mathcal{E}_{\mu, m}^s[f, g] \leq c \kappa_{\sigma(r)}^{-(1+\mu)/(r+1)} s^{-2m} \quad (4.10)$$

和 $\mathcal{N}(\mathcal{Q}_{\mu, m}^s[f, g]) \leq (s-1)m$. 如果 $g(x) = x$, $x \in I$, 不等式 (4.10) 的右端简化为 $c \kappa^{-1-\mu} s^{-2m}$.

在分析误差 $\mathcal{E}_\gamma^s[f, g]$ 上界时, 振子 g 需要满足下面的假设.

假设 4.3 存在常数 $\zeta > 1$, 对于所有 $n \in \mathbb{N}$, 有 $\|g\|_n \leq \zeta$.

定理 4.4 设 $\gamma \in (0, 1)$, $\varepsilon \geq 1$. 如果对于 $\mu \in (-1, 1)$, 振幅 $f \in \text{Type}(\mu, \infty, \{0\})$, 振子 $g \in C^\infty(I)$ 满足假设 4.3, 则存在常数 $c > 0$, 对于所有 $\kappa > 1$ 和整数 $s > 1$, 有

$$\mathcal{E}_\gamma^s[f, g] \leq c \kappa_{\sigma(r)}^{-(1+\mu)/(r+1)} \gamma^{(1+\mu)(s-1)-1} \quad (4.11)$$

和 $\mathcal{N}(\mathcal{Q}_\gamma^s[f, g]) \leq [\varepsilon](s^2 - s)$. 如果 $g(x) = x$, $x \in I$, 不等式 (4.11) 的右端简化为 $c \kappa^{-1-\mu} \gamma^{(1+\mu)(s-1)-1}$.

接下来将提出两种数值积分公式计算振荡积分 $\mathcal{I}_\kappa^\Lambda[f, g]$. 两种积分公式对区间 Λ 的剖分方案是相同的. 首先, 把区间 Λ 分成 n 个子区间, 剖分节点由 (4.5) 定义. 积分 (4.3) 等价的表示成

$$\mathcal{I}_\kappa^\Lambda[f, g] = \sum_{j \in \mathbb{Z}_n^+} \mathcal{I}_\kappa^{[x_{j-1}, x_j]}[f, g].$$

对于 $j \in \mathbb{Z}_n^+$, M_j 由 (4.6) 定义,

$$b_j := \frac{M_j x_{j-1}^{r+1}}{x_j^r g(x_{j-1})}, \quad (4.12)$$

将每一个子区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 分成 N_j 等份, 其中

$$N_j := \lceil b_j \rceil. \quad (4.13)$$

利用公式 $\mathcal{Q}_{N_j, \kappa, m_j}^{[x_{j-1}, x_j]}[f, g]$ 计算子区间上的振荡积分 $\mathcal{I}_\kappa^{[x_{j-1}, x_j]}[f, g]$, 其中对于多项式阶收敛的方法每个子区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上选取的逼近多项式的次数 m_j 是相同的, 指数阶收敛的方法选取的 m_j 是互异的.

记 $\Theta(y) := \Psi(g(1)y)$, $y \in I$, $\beta_n(r) := \lambda_r^{-1/n} - 1$, 其中 λ_r 由 (4.1) 定义. 首先估计 $\mathbb{B}_n := \max_{j \in \mathbb{Z}_n^+} \{b_j\}$ 与被积函数在每个子区间上积分的误差

$$\mathcal{E}_j[f, g] := |\mathcal{I}_\kappa^{[x_{j-1}, x_j]}[f, g] - \mathcal{Q}_{N_j, \kappa, m_j}^{[x_{j-1}, x_j]}[f, g]|, \quad j \in \mathbb{Z}_n^+.$$

引理 4.5 如果 g 满足假设 4.1, 则对于所有 $\kappa > 1$ 和 $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{B}_n \leq (r+1)\sigma(r)/\delta(r)$.

证明 由 $\delta(r)$ 和 $\sigma(r)$ 的定义推出, 对于 $x \in I$, $g(x) \geq \delta(r)x^{r+1}$ 和 $|g'(x)| \leq (r+1)\sigma(r)x^r$. 因此, $|g(x_{j-1})| \geq \delta(r)x_{j-1}^{r+1}$, $M_j \leq (r+1)\sigma(r)x_j^r$. 再由定义 (4.12) 得知, 对于所有 $\kappa > 1$, $n \in \mathbb{N}$ 和 $j \in \mathbb{Z}_n^+$, 有 $b_j \leq (r+1)\sigma(r)/\delta(r)$. 结论得证. $\square$

引理 4.6 设 $\alpha \in (-1, 1)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. 如果 $\Theta \in \text{Type}(\alpha, m+1, \{0\})$, g 满足假设 4.1, 则存在常数 $c > 0$, 对于所有 $\kappa > 1$, $n \in \mathbb{N}$ 和 $j \in \mathbb{Z}_n^+$, 有

$$\mathcal{E}_j[f, g] \leq c \frac{(r+1)|g(1)|^{-\alpha}(\delta(r))^{\alpha-2}\sigma(r)}{(m_j-1)!\kappa^2} \left(\frac{x_j}{x_{j-1}}\right)^{rm_j} x_{j-1}^{(\alpha-1)(r+1)} (\beta_n(r))^{m_j}.$$

证明 对于 $j \in \mathbb{Z}_n^+$, 由估计式 (2.5) 推出

$$\mathcal{E}_j[f, g] \leq \frac{3(m_j+1)}{m_j!\kappa^2 N_j^{m_j-1}} \|\Psi^{(m_j+1)}\|_\infty M_j^{m_j} h_j^{m_j},$$

其中 $h_j := x_j - x_{j-1}$. 对 Ψ 利用链式法则得 $\Psi^{(m_j+1)}(g(1)y) = (g(1))^{-m_j-1} \Theta^{(m_j+1)}(y)$, $y \in (0, 1]$. 利用 $\Theta \in \text{Type}(\alpha, m+1, \{0\})$ 推出, 存在常数 $c > 0$, 对于所有 $\kappa > 1$, $n \in \mathbb{N}$ 和 $j \in \mathbb{Z}_n^+$, 有

$$\mathcal{E}_j[f, g] \leq c \frac{|g(1)|^{-\alpha}}{(m_j-1)!\kappa^2 N_j^{m_j-1}} \left(\frac{x_j}{x_{j-1}}\right)^{rm_j} b_j^{m_j} (g(x_{j-1}))^{\alpha-1} x_{j-1}^{-m_j} h_j^{m_j}.$$

注意到 $(g(x_{j-1}))^{\alpha-1} \leq (\delta(r))^{\alpha-1} x_{j-1}^{(r+1)(\alpha-1)}$, $x_{j-1}^{-m_j} h_j^{m_j} = (\beta_n(r))^{m_j}$, 有

$$\mathcal{E}_j[f, g] \leq c \frac{|g(1)|^{-\alpha}(\delta(r))^{\alpha-1} b_j}{(m_j-1)!\kappa^2} \left(\frac{x_j}{x_{j-1}}\right)^{rm_j} x_{j-1}^{(\alpha-1)(r+1)} (\beta_n(r))^{m_j}.$$

最后利用引理 4.5 推出结论. $\square$

对比 $\mathbb{Q}_n$ 的上界与引理 4.5 中 $\mathbb{B}_n$ 的上界, 我们发现 b_j 与波数无关, 而且当 $r > 0$ 时, $q_j/b_j = \lambda_r^{-r} > 1$. 因此, 当 $r > 0$ 时, 新方法的计算量少于文献 [1] 中的方法. 下面依次介绍两种新方法.

首先介绍多项式阶收敛的方法. 设 $m \in \mathbb{N}$, 对于 $j \in \mathbb{Z}_n^+$, 取 $m_j := m$, 利用公式 $\mathcal{Q}_{N_j, \kappa, m}^{[x_{j-1}, x_j]}[f, g]$ 计算振荡积分 $\mathcal{I}_\kappa^{[x_{j-1}, x_j]}[f, g]$. 因此, 计算振荡积分 (4.3) 的第一个数值积分公式是

$$\mathcal{Q}_{\kappa, n, m}^{\Lambda, [2]}[f, g] := \sum_{j \in \mathbb{Z}_n^+} \mathcal{Q}_{N_j, \kappa, m}^{[x_{j-1}, x_j]}[f, g]. \quad (4.14)$$

下面分析公式的误差 $\mathcal{E}_{\kappa, n, m}^{\Lambda, [2]}[f, g] := |\mathcal{I}_\kappa^{\Lambda, [2]}[f, g] - \mathcal{Q}_{\kappa, n, m}^{\Lambda, [2]}[f, g]|$ 和求积节点数目 $\mathcal{N}(\mathcal{Q}_{\kappa, n, m}^{\Lambda, [2]}[f, g])$.

定理 4.7 设 $\alpha \in (-1, 1)$, $m \in \mathbb{N}$. 如果 $\Theta \in \text{Type}(\alpha, m+1, \{0\})$, g 满足假设 4.1, 则存在常数 $c > 0$, 对于所有 $\kappa > 1$ 和满足条件 $n \geq \ln \kappa_{\sigma(r)} / \ln 2$ 的整数 n , 有

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\kappa, n, m}^{\Lambda, [2]}[f, g] &\leq c(r+1)|g(1)|^{-\alpha}(\delta(r))^{\alpha-2}\sigma(r)\kappa^{-2}\kappa_{\sigma(r)}^{1-\alpha}\ln \kappa_{\sigma(r)}(\beta_n(r))^{m-1}, \\ \mathcal{N}(\mathcal{Q}_{\kappa, n, m}^{\Lambda, [2]}[f, g]) &\leq \left\lceil \frac{(r+1)\sigma(r)}{\delta(r)} \right\rceil nm + 1. \end{aligned}$$

证明 证明的方法是将 m_j 的定义代入到引理 4.6 中得到误差 $\mathcal{E}_j[f, g]$ 的上界, 之后将所得误差估计式关于 $j \in \mathbb{Z}_n^+$ 求和. 由引理 4.6 知, 存在常数 $c > 0$, 对于所有 $\kappa > 1$, $n \in \mathbb{N}$ 和 $j \in \mathbb{Z}_n^+$, 有

$$\mathcal{E}_j[f, g] \leq c \left(\frac{x_j}{x_{j-1}} \right)^{rm} (r+1)|g(1)|^{-\alpha}(\delta(r))^{\alpha-2}\sigma(r)\kappa^{-2}x_{j-1}^{(\alpha-1)(r+1)}(\beta_n(r))^m.$$

由于 $-1 < \alpha < 1$, 因此, $x_{j-1}^{(\alpha-1)(r+1)} \leq x_0^{(\alpha-1)(r+1)} = \kappa_{\sigma(r)}^{1-\alpha}$. 于是推出存在常数 $c > 0$, 对于所有 $\kappa > 1$, $n \in \mathbb{N}$ 和 $j \in \mathbb{Z}_n^+$, 有

$$\mathcal{E}_j[f, g] \leq c \left(\frac{x_j}{x_{j-1}} \right)^{rm} (r+1)|g(1)|^{-\alpha}(\delta(r))^{\alpha-2}\sigma(r)\kappa^{-2}\kappa_{\sigma(r)}^{1-\alpha}(\beta_n(r))^m.$$

由条件 $n \geq \ln \kappa_{\sigma(r)} / \ln 2$ 得出 $\kappa_{\sigma(r)}^{1/n} \leq 2$. 所以有 $(x_j/x_{j-1})^{rm} \leq \kappa_{\sigma(r)}^{m/n} \leq 2^m$. 因此, 存在常数 $c > 0$, 对于所有 $\kappa > 1$ 和满足条件 $n \geq \ln \kappa_{\sigma(r)} / \ln 2$ 的整数 n , 有

$$\mathcal{E}_{\kappa, n, m}^{\Lambda, [2]}[f, g] \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}_n^+} \mathcal{E}_j[f, g] \leq c|g(1)|^{-\alpha}(\delta(r))^{\alpha-2}\sigma(r)\kappa^{-2}\kappa_{\sigma(r)}^{1-\alpha}n(\beta_n(r))^m.$$

再由条件 $n \geq \ln \kappa_{\sigma(r)} / \ln 2$ 知, $n\beta_n(r) \leq 2 \ln \kappa_{\sigma(r)}$. 将此不等式代入到上式中即可得到第一个结论.

利用 N_j 的定义和引理 4.5 可以推出第二个结论. $\square$

当 $r = 0$ 时, (4.14) 与 (4.7) 相同. 当 $r > 0$ 时, (4.14) 的求积节点数目少于 (4.7) 的求积节点数目. 选取两个正整数 $\tilde{m}$ 和 m , 计算振荡积分 (2.1) 的具有多项式阶收敛的数值积分公式为

$$\mathcal{Q}_{\kappa, n, m}^{s, \tilde{m}, [2]}[f, g] := \mathcal{Q}_{\mu, \tilde{m}}^s[f, g] + \mathcal{Q}_{\kappa, n, m}^{\Lambda, [2]}[f, g].$$

计算振荡积分 (4.3) 的指数阶收敛的方法如下: 设 $\varsigma > 0$, 对于 $j \in \mathbb{Z}_n^+$ 定义

$$m_j := n + \lceil \varsigma(n+1-j)(1-\alpha) \rceil,$$

利用公式 $\mathcal{Q}_{N_j, \kappa, m_j}^{[x_{j-1}, x_j]}[f, g]$ 计算振荡积分 $\mathcal{I}_\kappa^{[x_{j-1}, x_j]}[f, g]$. 因此, 计算振荡积分 (4.3) 的第二个数值积分公式是

$$\mathcal{Q}_{\kappa, n}^{\Lambda, [2]}[f, g] := \sum_{j \in \mathbb{Z}_n^+} \mathcal{Q}_{N_j, \kappa, m_j}^{[x_{j-1}, x_j]}[f, g]. \quad (4.15)$$

下面估计 (4.15) 的误差 $\mathcal{E}_{\kappa,n}^{\Lambda,[2]}[f,g] := |\mathcal{I}_{\kappa}^{\Lambda}[f,g] - \mathcal{Q}_{\kappa,n}^{\Lambda,[2]}[f,g]|$. 记 $\rho_n(r) := 1 - \lambda_r^{1/n}$, $\tau_n^{\varsigma}(r) := \kappa_{\sigma(r)}^{1/(\varsigma n)} \times (\kappa_{\sigma(r)}^{1/n} - 1)$, $\iota_n^{\varsigma}(r) := \kappa_{\sigma(r)}^{(\varsigma+1)/(\varsigma n)} (\kappa_{\sigma(r)}^{1/n} - 1)$. 先来介绍两个辅助引理.

引理 4.8 对于所有整数 $n > 1$, m_j ($j \in \mathbb{Z}_n^+$) 满足不等式

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_n^+} \frac{1}{m_j - 1} \leq 1.$$

证明 引理的证明可以在文献 [1] 中找到. □

引理 4.9 存在常数 $c > 0$, 对于所有 $\kappa > 1$ 和满足

$$\iota_n^{\varsigma}(r) \leq \frac{n-1}{e} \quad (4.16)$$

的整数 n 和 $j \in \mathbb{Z}_n^+$, 有 $(\iota_n^{\varsigma}(r))^{m_j-n}/(m_j-2)! \leq c(n-1)^{-1/2}$.

证明 证明方法与文献 [1, 引理 5.8] 类似, 只需将 $\tau_n^1(r)$ 替换为 $\iota_n^{\varsigma}(r)$. 此处略去证明. □

定理 4.10 设 $\alpha \in (-1, 1)$. 如果 $\Theta \in \text{Type}(\alpha, \infty, \{0\})$, g 满足假设 4.1, 则存在常数 $c > 0$, 对于所有 $\kappa > 1$ 和满足条件 (4.16) 的整数 n , 有

$$\mathcal{E}_{\kappa,n}^{\Lambda,[2]}[f,g] \leq c(r+1)|g(1)|^{-\alpha}\sigma(r)(\delta(r))^{\alpha-2}(n-1)^{-1/2}\kappa^{-2}\kappa_{\sigma(r)}(\rho_n(r))^n. \quad (4.17)$$

对于 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\mathcal{N}(\mathcal{Q}_{\kappa,n}^{\Lambda,[2]}[f,g]) \leq \lceil (r+1)\sigma(r)/\delta(r) \rceil (2n^2 + \lceil \varsigma(1-\alpha) \rceil (n^2 + n))/2 + 1$.

证明 由引理 4.6 知, 存在常数 $c > 0$, 对于所有 $\kappa > 1$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}_n^+$, 有

$$\mathcal{E}_j[f,g] \leq c \frac{(r+1)|g(1)|^{-\alpha}\sigma(r)(\delta(r))^{\alpha-2}}{(m_j-1)!\kappa^2} \left(\frac{x_j}{x_{j-1}} \right)^{rm_j} x_{j-1}^{(\alpha-1)(r+1)} (\beta_n(r))^{m_j}.$$

注意到

$$\left(\frac{x_j}{x_{j-1}} \right)^{rm_j} \leq \kappa_{\sigma(r)}^{(m_j-n)/n} \kappa_{\sigma(r)}^{r/(r+1)}.$$

再由 $\beta_n(r) = \lambda_r^{-1/n} \rho_n(r)$ 和剖分节点 x_{j-1} 的定义 (4.5) 推出

$$x_{j-1}^{(\alpha-1)(r+1)} (\beta_n(r))^{m_j} \leq (\tau_n^{\varsigma}(r))^{m_j-n} \lambda_r^{-1} (\rho_n(r))^n.$$

于是存在常数 $c > 0$, 对于所有 $\kappa > 1$, $n \in \mathbb{N}$ 和 $j \in \mathbb{Z}_n^+$, 有

$$\mathcal{E}_j[f,g] \leq c \frac{(r+1)|g(1)|^{-\alpha}\sigma(r)(\delta(r))^{\alpha-2}}{(m_j-1)\kappa^2} \frac{(\iota_n^{\varsigma}(r))^{m_j-n}}{(m_j-2)!} \kappa_{\sigma(r)}(\rho_n(r))^n.$$

再利用引理 4.9 知, 存在常数 $c > 0$, 对于所有 $\kappa > 1$ 和满足条件 (4.16) 的整数 n 和 $j \in \mathbb{Z}_n^+$, 有

$$\mathcal{E}_j[f,g] \leq c(r+1)(m_j-1)^{-1}|g(1)|^{-\alpha}\sigma(r)(\delta(r))^{\alpha-2}(n-1)^{-1/2}\kappa^{-2}\kappa_{\sigma(r)}(\rho_n(r))^n.$$

将上式两端关于 $j \in \mathbb{Z}_n^+$ 求和推出, 存在常数 $c > 0$, 对于所有 $\kappa > 1$ 和满足条件 (4.16) 的整数 n , 有

$$\mathcal{E}_{\kappa,n}^{\Lambda,[2]}[f,g] \leq c(r+1)|g(1)|^{-\alpha}\sigma(r)(\delta(r))^{\alpha-2}(n-1)^{-1/2}\kappa^{-2}\kappa_{\sigma(r)}(\rho_n(r))^n \sum_{j \in \mathbb{Z}_n^+} (m_j-1)^{-1}.$$

最后利用引理 4.8 得到估计式 (4.17).

现在来估计 (4.15) 求积节点的数目. 由引理 4.5 推出, 对于所有的正整数 n , 有

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\mathcal{Q}_{\kappa,n}^{\Lambda,[2]}[f,g]) &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}_n^+} \left\{ \left\lceil \frac{(r+1)\sigma(r)}{\delta(r)} \right\rceil m_j + 1 \right\} - (n-1) \\ &\leq \left\lceil \frac{(r+1)\sigma(r)}{\delta(r)} \right\rceil \frac{2n^2 + [\varsigma(1-\alpha)](n^2+n)}{2} + 1.\end{aligned}$$

证明完毕. $\square$

在 (4.15) 中引入常数 ς 的目的是增强方法的稳定性. 当 $r=0, \varsigma=1$ 时, 积分公式 (4.9) 与 (4.15) 是一样的. 对于 $r>0$, 通常选取 $\varsigma \leq 1$. (4.15) 的计算量少于 (4.9) 的计算量.

设 $s, n \in \mathbb{N}, \gamma \in (0,1), \varepsilon \geq 1, \varsigma > 0$, 计算振荡积分 (2.1) 的具有指数阶收敛的数值积分公式为 $\mathcal{Q}_{\kappa,n}^{s,\gamma,[2]}[f,g] := \mathcal{Q}_\gamma^s[f,g] + \mathcal{Q}_{\kappa,n}^{\Lambda,[2]}[f,g]$.

5 数值模拟

本节将通过四个数值算例来验证本文提出的 moment-free 的数值积分公式的逼近精度和计算效率, 其中多项式阶收敛的方法简记为 CMFP2, 指数阶收敛的方法简记为 CMFE2. 文献 [1] 中提出的方法分别简记为 CMFP1 (多项式阶收敛的积分公式) 和 CMFE1 (指数阶收敛的积分公式). 数值试验的结果是利用 Matlab 代码在内存为 4GB、酷睿 2 四核的台式机上运行得出.

前两个例子考虑被积函数光滑、振子没有驻点的振荡积分的计算. Filon 型公式^[5-8,16] 计算振荡积分的主要思想是利用多项式逼近振幅 f . 利用 Hermite 插值构造的积分公式的收敛速度明显快于仅利用 f 和 g' 在插值节点的函数值构造的积分公式. 如果不增加 f 和 g' 在插值节点的导数值, 提高 Filon 型公式精度的可行方法是增加积分区间内部插值节点数目, 提高逼近多项式阶数. 然而, 多项式高次插值会出现 Runge 现象. 缓解 Runge 现象的两个有效方法是选取 Chebyshev 节点作为插值节点和利用分片低次多项式逼近. 文献 [13] 中提出的计算振荡积分 $\mathcal{I}_\kappa^{[-1,1]}[f,g]$ 的 Filon-Clenshaw-Curtis (FCC) 公式是采用插值节点为 Clenshaw-Curtis 点的 Lagrange 插值多项式 $\mathcal{Q}_N(f)$ 逼近振幅 f . 计算振子为 $g(x) = x$ 的振荡积分 (2.1) 的 FCC 公式是 $\mathcal{I}_{\kappa,N}^{[0,1]}(f) := e^{i\kappa/2} \mathcal{I}_{\kappa/2}^{[-1,1]}[\mathcal{Q}_N(\tilde{f}), g]/2$, 其中 $\tilde{f}(x) := f((x+1)/2), x \in [-1,1], N$ 为插值多项式的次数. FCC 公式的 Matlab 代码下载地址参见文献 [29]. 由于插值节点固定, 对于复杂振子振荡积分的计算, FCC 公式的缺陷是耗费大量时间计算振子的反函数. 本文和文献 [1] 中构造的数值积分公式是基于被积函数的奇性和波数对积分区间剖分, 利用分片多项式逼近振幅 f , 插值节点选取灵活, 不需要计算非线性振子的反函数. 下面将对本文中提出的方法与文献 [1] 中的方法作比较.

例 5.1 设 $f(x) := e^x$ 和 $g(x) := 9x$, 其中 $x \in I$. 我们将利用第 3 节定义的积分公式计算振荡积分 $\mathcal{I}_\kappa[f,g]$, 并比较 (3.2) 与 (3.9) 及 (3.3) 与 (3.12) 的精度和计算量. 由于积分 $\mathcal{I}_\kappa[f,g]$ 可以精确计算, 数值积分公式的误差是利用积分的精确值计算.

表 1 分别列出公式 $\mathcal{Q}_{\kappa,n,2}^{[1]}[f,g]$ 与 $\mathcal{Q}_{\kappa,n,2}^{[2]}[f,g]$ 的相对误差 (RE) 和求积节点数目 $\mathcal{N}$. 表 2 分别列出公式 $\mathcal{Q}_{\kappa,n}^{[1]}[f,g]$ 和 $\mathcal{Q}_{\kappa,n}^{[2]}[f,g]$ 的相对误差 (RE) 和求积节点数目 $\mathcal{N}$. 图 1(a) 绘出 $\kappa = 10^4$ 时积分公式 $\mathcal{Q}_{\kappa,n,2}^{[2]}[f,g]$ 的相对误差随 n 变化的曲线. 图 1(b) 绘出 $n=3$ 时绝对误差 (AE) $\mathcal{E}_{\kappa,n}^{[2]}[f,g]$ 乘以 κ^{n+1} 的曲线. 表 1 和 2 说明, (3.2) 与 (3.9) 的计算量相同, 精度相同; (3.3) 与 (3.12) 的计算量相同, 精度相同. 从图 1(a) 看出, 多项式阶收敛的公式 (3.9) 是稳定的. 图 1(b) 说明, 当 $n=3$ 时, (3.12) 的收敛阶是 $\mathcal{O}(\kappa^{-(n+1)})$, 与理论分析相一致.

表 1 方法 CMFP1 与 CMFP2 的对比: $f(x) := e^x, g(x) := 9x$

κ	$n = 5$				$n = 15$			
	CMFP1		CMFP2		CMFP1		CMFP2	
	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$
10^2	2.34e-7	91	5.16e-7	91	5.80e-8	271	2.02e-7	271
10^3	7.17e-8	91	6.94e-8	91	7.81e-9	271	5.27e-9	271
10^4	1.93e-8	91	8.88e-9	91	2.78e-9	271	1.67e-9	271
10^5	1.04e-9	91	1.02e-9	91	3.83e-10	271	2.52e-10	271
10^6	5.95e-11	91	4.01e-11	91	1.58e-11	271	2.42e-10	271

表 2 方法 CMFE1 与 CMFE2 的对比: $f(x) := e^x, g(x) := 9x$

κ	$n = 2$				$n = 3$			
	CMFE1		CMFE2		CMFE1		CMFE2	
	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$
10^2	8.70e-7	28	2.76e-6	28	1.47e-12	100	3.90e-11	100
10^3	1.51e-8	28	2.78e-9	28	2.45e-14	100	8.20e-14	100
10^4	2.34e-8	28	1.09e-8	28	4.21e-16	100	2.53e-16	100
10^5	5.35e-10	28	9.92e-10	28	2.07e-16	100	4.17e-16	100
10^6	5.55e-11	28	3.85e-10	28	3.53e-16	100	4.76e-16	100

图 1 $f(x) := e^x, g(x) := 9x$, (a) 公式 $\mathcal{Q}_{\kappa,n,2}^{[2]}[f,g]$ 的 RE; (b) $\kappa^{n+1}\mathcal{E}_{\kappa,n}^{[2]}[f,g]$

例 5.2 设 $f(x) := 1/(1+x^2)$ 和 $g(x) := 4x$, 其中 $x \in I$. 此例子意在说明本文和文献 [1] 中提出的数值积分公式有效地缓解了 Runge 现象. 在计算数值积分公式的误差时, 积分 $\mathcal{I}_{\kappa}[f,g]$ 的精确值由 FCC 公式计算的近似值 $\mathcal{I}_{4\kappa,30}^{[0,1]}(f)$ 替代.

例 5.2 的数值结果记录在表 3 和 4 中. 通过分别对比多项式阶收敛方法和指数阶收敛方法的相对误差, 可以肯定本文和文献 [1] 中提出的数值积分公式有效地缓解了 Runge 现象.

表 3 方法 CMFP1 与 CMFP2 的对比: $f(x) := 1/(1+x^2)$, $g(x) := 4x$

κ	$n = 5$				$n = 10$			
	CMFP1		CMFP2		CMFP1		CMFP2	
	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$
10^2	1.60e-5	41	2.00e-5	41	3.27e-6	81	2.54e-5	81
10^3	3.67e-6	41	4.53e-6	41	8.09e-7	81	2.48e-6	81
10^4	3.32e-7	41	1.24e-7	41	2.27e-7	81	1.06e-7	81
10^5	4.11e-8	41	1.11e-8	41	5.31e-8	81	1.08e-8	81
10^6	1.32e-9	41	2.44e-9	41	2.14e-9	81	2.47e-9	81

表 4 方法 CMFE1 与 CMFE2 的对比: $f(x) := 1/(1+x^2)$, $g(x) := 4x$

κ	$n = 2$				$n = 3$			
	CMFE1		CMFE2		CMFE1		CMFE2	
	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$
10^2	3.85e-5	13	1.04e-4	13	7.53e-9	45	1.59e-8	45
10^3	9.19e-8	13	1.74e-6	13	4.75e-10	45	4.06e-10	45
10^4	1.82e-7	13	1.42e-7	13	1.19e-10	45	7.30e-11	45
10^5	6.06e-8	13	1.28e-8	13	1.68e-11	45	7.69e-12	45
10^6	6.07e-9	13	1.42e-8	13	1.07e-12	45	7.65e-13	45

例 5.1 和 5.2 的数值结果表明, (3.2) 与 (3.9) 的求积节点数目相同, (3.3) 与 (3.12) 的求积节点数目相同. 因此, 当 $\sigma > 1$ 时, 本文提出的积分公式更易于在并行机上实现, 计算效率更高.

第 3 个数值例子考虑被积函数有奇点、振子有驻点的振荡积分的计算, 并与文献 [14] 中提出的复合的 Filon-Clenshaw-Curtis (CFCC) 积分公式作比较. 首先回顾文献 [14] 中提出的 CFCC 公式, 此处用的记号与文献 [14] 中的记法完全一致. 设 $\beta \in (-1, 1)$ 表示振幅的奇性指数, $N \in \mathbb{N}$ 表示插值多项式的次数, $q > 0$ 表示剖分积分区间待定的参数, $M \in \mathbb{N}$ 表示子区间的数目. 特别地, 给定 M , 选取的参数 q 需满足条件 $q > (N + 1 - r)/(1 + \beta - r)$, 其中 $0 \leq r < 1 + \beta$, 相应的剖分节点是

$$x_j := M^{-q} j^q, \quad j \in \mathbb{Z}_M.$$

除被积函数在第一个子区间的积分外, 其他子区间上的积分由 $N + 1$ 个求积节点的 FCC 公式计算. 当 $\beta \in (-1, 0]$ 时, 被积函数在第一个子区间上的积分用 0 近似. 当 $\beta \in (0, 1)$ 且 $x_1 \kappa \geq 1$ 时, 利用经过点 $(x_0, f(x_0))$ 和 $(x_1, f(x_1))$ 的一次多项式逼近振幅 f . 当 $\beta \in (0, 1)$ 且 $x_1 \kappa < 1$ 时, 被积函数由经过点 $(x_0, f(x_0)e^{i\kappa g(x_0)})$ 和 $(x_1, f(x_1)e^{i\kappa g(x_1)})$ 的线性函数逼近. 对于原点是唯一驻点的非线性阵子 g 的积分, 只需作变换 $x = g(x)$, 把积分转化为区间 $[g(0), g(1)]$ 上线性振子的积分, 再利用 CFCC 公式计算相应的振荡积分. 记 CFCC 积分公式为 $\mathcal{I}_{\kappa, N, M, q}^{[0, 1]}(f)$.

例 5.3 设 $f(x) := x^{1/2}$ 和 $g(x) := x^2$, 其中 $x \in I$. 我们将利用第 4 节定义的积分公式和 CFCC 方法计算振荡积分 $\mathcal{I}_{\kappa}[f, g]$, 通过对比验证公式 $\mathcal{Q}_{\kappa, n, m}^{s, \tilde{m}, [2]}[f, g]$ 和 $\mathcal{Q}_{\kappa, n}^{s, \gamma, [2]}[f, g]$ 的高效性. 由文献 [13, 30] 知, $\mathcal{I}_{\kappa}[f, g] = 1/2(\Gamma(3/4)e^{i3\pi/4}(i\kappa)^{-3/4} + e^{i\kappa}/(i\kappa))(1 + \mathcal{O}(1/\kappa))$. 在计算数值积分公式的误差时, 积分 $\mathcal{I}_{\kappa}[f, g]$ 的精确值由 $\mathcal{I}_{\kappa}^a := 1/2(\Gamma(3/4)e^{i3\pi/4}(i\kappa)^{-3/4} + e^{i\kappa}/(i\kappa))$ 近似计算.

例 5.3 的数值结果记录在表 5 和 6 及图 2 和 3 中. 表 5 存储了多项式阶收敛的公式 $\mathcal{Q}_{\kappa,n,4}^{n,4,[1]}[f,g]$ 与 $\mathcal{Q}_{\kappa,n,4}^{n,4,[2]}[f,g]$ 的相对误差. 表 6 记录了 $\mathcal{Q}_{\kappa,n}^{7,0.02,[2]}[f,g]$ 的相对误差, 其中对于方法 CMFE2 取 $\varsigma = 1/2$. 在图 2 和 3 中, 我们分别对本文中提出的方法 CMFP2 和 CMFE2 与 CFCC 方法作比较, 其中公式 CFCC 选取的求积节点数目多于本文中提出的方法. 记 $\tilde{f}(x) := x^{-1/4}/2$, $x \in I$. 图 2 绘出了公式 $\mathcal{Q}_{\kappa,n,4}^{n,4,[2]}[f,g]$ 与 $\mathcal{I}_{\kappa,4,M,10}^{[0,1]}(\tilde{f})$ 相对误差的曲线, 其中在 (a) 中 CMFP2 公式取 $n = 40$, CFCC 公式取 $M = 130$, 在 (b) 中 CMFP2 公式取 $n = 50$, CFCC 公式取 $M = 160$. 图 3 绘出了方法 $\mathcal{Q}_{\kappa,n}^{7,0.02,[2]}[f,g]$ 与 $\mathcal{I}_{\kappa,4,M,10}^{[0,1]}(\tilde{f})$ 相对误差的曲线, 其中在 (a) 中 CMFE2 方法取 $n = 8$, CFCC 方法取 $M = 90$, 在 (b) 中 CMFE2 方法取 $n = 9$, CFCC 方法取 $M = 110$.

表 5 方法 CMFP1 与 CMFP2 的对比: $f(x) := x^{1/2}$, $g(x) := x^2$

κ	$n = 30$				$n = 40$				$n = 50$			
	CMFP1		CMFP2		CMFP1		CMFP2		CMFP1		CMFP2	
	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$
10^2	8.65e-4	477	8.65e-4	365	8.65e-4	637	8.65e-4	477	8.65e-4	797	8.65e-4	605
10^3	3.70e-5	477	3.70e-5	357	3.70e-5	637	3.70e-5	489	3.70e-5	797	3.70e-5	605
10^4	1.92e-6	597	1.96e-6	361	1.92e-6	637	1.91e-6	485	1.92e-6	797	1.92e-6	613
10^5	1.11e-7	597	1.22e-7	365	1.11e-7	797	1.38e-7	489	1.10e-7	797	1.10e-7	605
10^6	2.18e-8	597	6.19e-7	361	1.19e-8	797	1.77e-7	477	6.14e-9	997	4.11e-8	609

表 6 CMFE2 的相对误差: $f(x) := x^{1/2}$, $g(x) := x^2$

κ	$n = 7$		$n = 8$		$n = 9$	
	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$	RE	$\mathcal{N}$
10^2	8.65e-4	267	8.65e-4	307	8.07e-4	367
10^3	3.70e-5	267	3.70e-5	307	3.71e-5	353
10^4	1.93e-6	267	1.94e-6	319	1.88e-6	381
10^5	1.71e-7	267	1.34e-7	307	1.11e-7	353
10^6	8.06e-7	267	4.33e-8	307	2.35e-8	382

图 2 CMFP2 与 CFCC 的对比: $f(x) := x^{1/2}$, $g(x) := x^2$, (a) $n = 40$, $M = 130$; (b) $n = 50$, $M = 160$

图 3 CMFE2 与 CFCC 的对比: $f(x) := x^{1/2}$, $g(x) := x^2$, (a) $n = 8$, $M = 90$; (b) $n = 9$, $M = 110$

通过观察例 5.3 的数值结果, 我们得到以下结论: 本文提出的公式 CMFE2 和 CMFE2 的求积节点数目与波数 κ 无关, 大大减少了计算时间. 对于固定的波数 κ , 公式 CMFE2 的计算精度随着 n 的增长逐渐提高. 当 κ 较大时, 本文提出的新方法的计算精度高于 CFCC 方法的精度, 但是计算复杂度低于 CFCC 方法.

最后一个例子将对比公式 CMFE2 与 CFCC 在计算相同振荡积分时消耗的 CPU 时间.

例 5.4 设

$$f_1(x) := x, \quad f_2(x) := \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) := \frac{x - \sin(x)}{1 - \sin(1)},$$

其中 $x \in I$. 消耗的 CPU 时间由 Matlab 中的函数 tic 和 toc 记录. 采用 CFCC 公式计算时, 振子的反函数由 Matlab 中的函数 fzero 计算. 本文提出的方法不需要计算振子的反函数.

表 7 和 8 分别记录了计算积分 $\mathcal{I}_\kappa[f_1, g]$ 和 $\mathcal{I}_\kappa[f_2, g]$ 时, 公式 CMFE2 和 CFCC 占用的 CPU 时间, 以及 CFCC 算法中计算反函数所消耗的 CPU 时间. 表 7 的数据是由公式 $\mathcal{Q}_{\kappa,5}^{6,0.02,[2]}[f_1, g]$ 和 CFCC 公式 $\mathcal{I}_{\kappa,8,20,28}^{[0,1]}((f_1/g') \circ g^{(-1)})$ 计算的, 其中对于 CMFE2 公式取 $\varsigma = 1$. 表 8 的数据是由公式 $\mathcal{Q}_{\kappa,5}^{6,0.02,[2]}[f_2, g]$ 和 CFCC 公式 $\mathcal{I}_{\kappa,8,20,28}^{[0,1]}((f_2/g') \circ g^{(-1)})$ 计算的, 其中对于 CMFE2 公式取 $\varsigma = 1$. 两个表都呈现出, 虽然公式 CMFE2 的求积节点数目多于公式 CFCC 的求积节点数目, 但是两种公式的近似值接近, 公式 CMFE2 的耗时少, 公式 CMFE2 的运算时间不足公式 CFCC 运算时间的十分之一. 可以肯定本文和文献 [1] 中提出的 moment-free 的数值积分公式都提高了振荡积分的计算效率和精度.

表 7 运算时间的对比: $f_1(x) := x$, $g(x) := (x - \sin(x))/(1 - \sin(1))$

κ	CMFE2				CFCC			
	时间 (秒)	近似值	$\mathcal{N}$		时间 (秒)	fzero 运算时间 (秒)	近似值	$\mathcal{N}$
10^2	6.86e-2	8.36e-3+(1.46e-2)i	187		7.89e-1	4.29e-1	8.36e-3+(1.46e-2)i	153
10^3	6.49e-2	2.47e-3+(3.59e-3)i	187		7.86e-1	4.29e-1	2.47e-3+(3.59e-3)i	153
10^4	6.82e-2	4.60e-4+(8.47e-4)i	187		7.85e-1	4.28e-1	4.60e-4+(8.48e-4)i	153
10^5	6.77e-2	1.01e-4+(1.79e-4)i	187		7.90e-1	4.30e-1	1.01e-4+(1.79e-4)i	153
10^6	6.62e-2	2.17e-5+(3.75e-5)i	187		7.91e-1	4.29e-1	2.17e-5+(3.75e-5)i	153

表 8 运算时间的对比: $f_2(x) := 1/(1+x^2)$, $g(x) := (x - \sin(x))/(1 - \sin(1))$

κ	CMFE2			CFCC			
	时间 (秒)	近似值	$\mathcal{N}$	时间 (秒)	fzero 运算时间 (秒)	近似值	$\mathcal{N}$
10^2	6.49e-2	1.63e-1+(9.02e-2)i	187	7.92e-1	4.30e-1	1.63e-1+(9.02e-2)i	153
10^3	6.56e-2	7.62e-2+(4.35e-2)i	187	7.91e-1	4.29e-1	7.62e-2+(4.35e-2)i	153
10^4	6.20e-2	3.53e-2+(2.04e-2)i	187	8.10e-1	4.33e-1	3.53e-2+(2.04e-2)i	153
10^5	6.61e-2	1.64e-2+(9.46e-3)i	187	8.07e-1	4.32e-1	1.64e-2+(9.45e-3)i	153
10^6	6.57e-2	7.61e-3+(4.39e-3)i	187	8.01e-1	4.30e-1	7.61e-3+(4.39e-3)i	153

参考文献

- Ma Y, Xu Y. Computing highly oscillatory integrals. Submitted
- Stein E. Harmonic Analysis: Real-Variable Method, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton: Princeton University Press, 1993
- Iserles A, Nørsett S P. Efficient quadrature of highly-oscillatory integrals using derivatives. Proc R Soc A, 2005, 461: 1383–1399
- Olver F W J. Asymptotics and Special Functions. New York: Macmillan, 1974
- Filon L N G. On a quadrature formula for trigonometric integrals. Proc Roy Soc Edinburgh, 1928, 49: 38–47
- Flinn E A. A modification of Filon's method of numerical integration. J ACM, 1960, 7: 181–184
- Luke Y L. On the computation of oscillatory integrals. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1954, 50: 269–277
- Iserles A, Nørsett S P. On quadrature methods for highly oscillatory integrals and their implementation. BIT, 2004, 44: 755–772
- Iserles A. On the numerical quadrature of highly oscillating integrals I: Fourier transforms. IMA J Numer Anal, 2004, 24: 365–391
- Iserles A. On the numerical quadrature of highly oscillating integrals II: Irregular oscillators. IMA J Numer Anal, 2005, 25: 25–44
- Piessens R, Poleunis F. A numerical method for the integration of oscillatory functions. BIT, 1971, 11: 317–327
- Melenk J M. On the convergence of Filon quadrature. J Comput Appl Math, 2010, 234: 1692–1701
- Domínguez V, Graham I G, Smyshlyaev V P. Stability and error estimates for Filon-Clenshaw-Curtis rules for highly-oscillatory integrals. IMA J Numer Anal, 2011, 31: 1253–1280
- Domínguez V, Graham I G, Kim T. Filon-Clenshaw-Curtis rules for highly-oscillatory integrals with algebraic singularities and stationary points. SIAM J Numer Anal, 2013, 51: 1542–1566
- Olver S. Moment-free numerical approximation of highly oscillatory integrals with stationary points. European J Appl Math, 2007, 18: 435–447
- Xiang S. Efficient Filon-type methods for $\int_a^b f(x) \exp\{i\omega g(x)\}dx$. Numer Math, 2007, 105: 633–658
- Levin D. Procedures for computing one- and two-dimensional integrals of functions with rapid irregular oscillations. Math Comp, 1982, 38: 531–538
- Olver S. Moments-free numerical integration of highly oscillatory functions. IMA J Numer Anal, 2006, 26: 213–227
- Olver S. Shifted GMRES for oscillatory integrals. Numer Math, 2010, 114: 607–628
- Olver S. Fast, numerically stable computation of oscillatory integrals with stationary points. BIT, 2010, 50: 149–171
- Milovanovic G V. Numerical calculation of integrals involving oscillatory and singular kernels and some applications of quadratures. Comput Math Appl, 1998, 36: 19–39
- Huybrechs D, Vandewalle S. On the evaluation of highly oscillatory integrals by analytic continuation. SIAM J Numer Anal, 2006, 44: 1026–1048
- Deaño A, Huybrechs D. Complex Gaussian quadrature of oscillatory integrals. Numer Math, 2009, 112: 197–219
- Asheim A, Huybrechs D. Asymptotic analysis of numerical steepest descent with path approximations. Found Comput Math, 2010, 10: 647–671
- Kaneko H, Xu Y. Gauss-type quadratures for weakly singular integrals and their application to Fredholm integral equations of the second kind. Math Comp, 1994, 62: 739–753
- Schwab C. Variable order composite quadratures for singular and nearly singular integrals. Computing, 1994, 53:

- 173–194
- 27 Chen Z, Wu B, Xu Y. Error control strategies for numerical integrations in fast collocation methods. *Northeast Math J*, 2005, 21: 233–252
- 28 Rice J R. On the degree of convergence of nonlinear spline approximation. In: *Approximations with Emphasis on Spline Functions*. New York: Academic Press, 1969, 349–565
- 29 Domínguez V. Public domain code. [Http://www.unavarra.es/personal/victor.dominguez/clenshawcu-rtisrule](http://www.unavarra.es/personal/victor.dominguez/clenshawcu-rtisrule)
- 30 Gradshteyn I S, Ryzhik I M. *Table of Integrals, Series, and Products*. New York: Academic Press, 1994

Computing oscillatory integrals: Partition of the integration interval based on the singularity and the wave number of the integrand

MA YunYun & XU YueSheng

Abstract In this paper, we develop composite moment-free numerical quadratures for computing highly oscillatory integrals with singularities and stationary points. The composite quadrature rules for computing highly oscillatory integrals with a smooth integrand and without a stationary point are developed based on partitioning the integration domain according to the values of the derivative of the oscillator and the wave number. The moment-free Filon-type quadrature is used for each of the oscillatory integrals defined on the subintervals. The composite quadrature rules for computing highly oscillatory integrals with singularities and stationary points are developed by partitioning the integration domain according to the singularity of the integrand and the wave number, such that the integral defined on a subinterval has either a weak singularity without rapid oscillation or oscillation without a singularity or stationary point. The classical quadrature rules for weakly singular integrals using graded points are employed for computing the singular integral without rapid oscillation and the modified moment-free Filon-type method is used for computing the oscillatory integrals. Unlike the existing methods, the proposed methods do not have to compute the inverse of the oscillator or to utilize the integral of special functions.

Keywords oscillatory integrals, algebraic singularities, stationary points, moment-free Filon-type method, graded points

MSC(2010) 65D30, 65D32

doi: 10.1360/N012014-00227