逐段决定 Markov 过程与半动力系统可加泛函

刘国欣^{①*}, 刘兆阳^②

① 石家庄铁道大学数理系, 石家庄 050043;

② 中南大学数学与统计学院, 长沙 410083

E-mail: liugx@stdu.edu.cn, liu.zhy@csu.edu.cn

收稿日期: 2015-01-31; 接受日期: 2015-03-10; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11471218) 和河北省高等学校科学技术研究 (批准号: ZD20131017) 资助项目

摘要 本文致力于奠定一般逐段决定 Markov 过程理论的新的分析基础. 本文首次引入半动力系统可加泛函的概念, 系统地分析它的性质, 特别是得到半动力系统可加泛函对半动力系统轨道的本质依赖特征, 给出它的 Lebesgue 分解式. 半动力系统可加泛函这一概念与逐段决定 Markov 过程的条件跳时分布和过程的可加泛函等都有着本质的联系.

关键词 逐段决定 Markov 过程 半动力系统 半动力系统可加泛函

MSC (2010) 主题分类 60J25, 60J75, 46T12

1 引言

逐段决定 Markov 过程, 简记为 PDMPs, 是一类广泛的非扩散连续时间 Markov 过程. 其随机性只限于随机跳时和随机跃度, 在两个相邻随机跳之间的轨道沿决定性系统 (动力系统) 演化. PDMPs 的开创性工作属于 Davis. Davis 的 PDMPs 的定义和理论的基础是文献 [1, 2]. Davis 的主要贡献不仅在于给出了模型的一般框架, 更重要的是基于跳过程的局部鞅理论, 将 Strook 和 Varadhan^[3] 针对多维扩散过程提出的广生成元 (extended generator) $\mathcal{A}$, 移植于 PDMPs 理论并得到了 Itô 型公式. 同时, 他也发展了 PDMPs 的最优控制理论.

逐段决定 Markov 过程的概念一经提出立即得到应用概率诸多领域的广泛关注. Embrechts 和 Schmidli^[4] 曾兴奋地指出, PDMPs 理论为破产理论的研究提供了系统的工具 (systematic toolet). Rolski 等人在他们被广泛引用的文献 [5] 中用近 80 页的篇幅介绍了 PDMPs 理论及其在破产理论中的应用. Palmowski 和 Roski^[6] 对相当广泛的 Markov 过程 (包括 Davis 的 PDMPs), 得到了借助广生成元 $\mathcal{A}$ 表示的指数鞅的一般表达式, 并建立了相应测度变换理论. 关于保险中随机控制问题较全面的可参见文献 [7] 及所列参考文献. 源于不同领域应用随机控制问题的驱动, PDMPs 随机控制理论亦得到快速发展, 可参见文献 [8] 及所列文献.

Jacobsen^[9] 对 PDMPs 给出了新的处理. 他基于标值点过程 (marked point processes) 的理论来重述 Davis 的 PDMPs, 较之 Davis^[2] 加入了更多现代随机分析的观点. 同时, 他还讨论了非齐次 PDMPs. 而正如 Jacobsen^[9] 指出的那样, “Davis 只是讨论了所有条件跳时分布, 除了确定性强制跳外, 都具有密度的一类齐次 PDMPs”. 对 PDMPs 的本质的推广属于 Jacod 和 Skorokhod^[10]. 他们一般化了 PDMPs 的概念, 而一般化后的过程, 他们称为跳 Markov 过程 (jumping Markov processes, 简记为

英文引用格式: Liu G X, Liu Z Y. Piecewise deterministic Markov processes and additive functionals of semi-dynamic systems (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2015, 45: 579–592, doi: 10.1360/N012015-00069

JMPs). 还进一步研究了 JMPs 的特征以及通常 Markov 过程理论的研究对象, 如可加泛函、半鞅和半鞅函数等的性质.

与 Jacod 和 Skorokhod^[10] 殊途同归的另一对 PDMPs 概念的推广, 源于侯振挺等人^[11] 提出的 Markov 骨架过程. 在长期研究 Q 过程和半 Markov 过程等随机系统模型的基础上, 侯振挺等人^[11] 首次提出了 Markov 骨架过程的概念. Markov 骨架过程不仅本质上涵盖了几乎所有现存应用随机过程模型, 而且可以作为随机系统建模的出发点. 正是借助于这个概念, Hou 和 Liu^[12] 重新审视 Davis 的 PDMPs 概念, 从 Markov 骨架过程角度给出了一般逐段决定 Markov 过程的定义, 并建立了逐段决定随机系统的 Markov 建模方法 (参见文献 [13, 14]).

本文第 2 节回顾逐段决定 Markov 骨架过程的定义^[13, 14] 和文献 [12] 中的主要结果, 即逐段决定 Markov 骨架过程成为 (强) Markov 过程的充要条件, 给出逐段决定 Markov 过程的一般定义. 这个定义本质上与 Jacod 和 Skorokhod^[10] 的 JMPs 定义是一致的. 这里定义的好处在于, 它借助于 PDMPs 的三元特征 (ϕ, F, q) 的分析性质给出. 按 Jacod 和 Skorokhod^[10] 的理论, 如果 $F(x, \cdot)$ ($x \in E$) 是连续的, 则过程称作拟 Hunt 的; 如果 $F(x, \cdot)$ ($x \in E$) 是绝对连续的, 则过程称为拟 Itô 的. 原则上讲, Davis 讨论的是拟 Itô PDMPs, Jacod 和 Skorokhod^[10] 讨论的则是拟 Hunt PDMPs. 而 Hou 和 Liu^[13] 允许 $F(x, \cdot)$ ($x \in E$) 可以有跳, 更具有一般性. 本文的目的是为发展 PDMPs 的一般理论奠定进一步的分析基础. 为了进一步讨论的方便, 我们在第 2 节后半部分介绍半动力系统的基本概念.

第 3 节进入本文主体部分. 首先引入半动力系统可加泛函 $a(x, t)$ 的概念. 讨论可加泛函与半动力系统性质的关系. 证明当可加泛函关于时间 t 是绝对连续时, 其绝对连续部分的密度函数仅依赖于系统当前状态; 当可加泛函关于时间 t 存在跳时, 其跳的跃度也仅依赖于系统当前状态. 最后给出可加泛函的 Lebesgue 分解式.

第 4 节, 引入沿半动力系统轨道的测度的概念, 并分别对轨道的不同情形, 讨论轨道测度的性质. 定理 4.2 指出, 半动力系统可加泛函与这样的轨道测度相互唯一决定.

最后, 第 5 节给出两个重要的可加泛函及它们相应的 Lebesgue 分解.

我们期待以上的讨论, 为今后研究推广 PDMPs 生成元、可加泛函以及测度变换理论打下良好的基础.

2 预备知识

让我们回顾一下逐段决定 Markov 骨架过程的概念和简单性质. 设 E 为 Polish 空间, $\mathcal{E}$ 为其上的 Borel σ -代数. 考虑定义于概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上取值于 $(E, \mathcal{E})$ 的随机过程 $X = \{X_t(\omega)\}_{0 \leq t < \tau}$. 设 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 为其自然流的普遍完备化流,

$$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t=0}^{\infty} \mathcal{F}_t,$$

θ_t 为通常意义下的推移算子. 为叙述上的方便, 在状态空间加入一孤立点 Δ , 并补充定义 $X_t = \Delta$, 若 $t \geq \tau$.

定义 2.1 过程 X 称为逐段决定 Markov 骨架过程, 如果存在一系列严格增的随机变量序列 $\{\tau_n\}_{n \geq 0}$ 满足 $\tau_0 = 0$, $\tau_n \uparrow \tau$, 使得

(i) $\{\mathcal{F}_t\}$ 为离散型流, 亦即

$$\mathcal{F}_t \cap \{\tau_n \leq t < \tau_{n+1}\} = \mathcal{F}_{\tau_n} \cap \{\tau_n \leq t < \tau_{n+1}\}, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{F}_t \cap \{\tau \leq t\} = \mathcal{F}_\infty \cap \{\tau \leq t\}, \quad t \geq 0; \quad (2.2)$$

(ii) 对每个 $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$ 及 $(E^{[0,\infty)}, \mathcal{E}^{[0,\infty)})$ 上有界可测函数 f 有

$$E_x[f(X_\cdot) \circ \theta_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_{\tau_n}] = E_x[f(X_\cdot) \circ \theta_{\tau_n} \mid X_{\tau_n}]. \quad (2.3)$$

性质 (i) 刻画过程是逐段决定的; 而性质 (ii) 描述过程在每个 τ_n 时刻具有 Markov 性. 令 $\sigma_0 = 0$, $\sigma_n := \tau_n - \tau_{n-1}$, $n > 0$, $\eta_n := (\sigma_n, X_{\tau_n})$, $n \geq 0$. 序列 $\{\eta_n\}$ 是 Markov 序列, 且其转移核与第一个分量无关, 我们称其为 Markov 骨架序列. 记序列 $\{\eta_n\}$ 的转移核列为 $\{G_n(x, dt, dy)\}_{n \geq 0}$, 又记

$$F_n(x, dt) := G_n(x, dt, E), \quad n \geq 0.$$

则对任意的 $B \in \mathcal{E}$, $G_n(x, dt, B) \ll F_n(x, dt)$, 存在 $q_n(x, t, \cdot)$ 使得对任意固定的 (x, t) , $q_n(x, t, \cdot)$ 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的概率测度; 而对固定的 $B \in \mathcal{E}$, $q_n(\cdot, \cdot, B)$ 是 $\mathcal{E} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -可测的. F_n 和 q_n 分别刻画下一次随机跳的时间和跳后状态. 在过程是右连续的假设下, 进一步有, 对每个 n , 存在可测映射 $\phi_n: (\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{E}) \mapsto (E, \mathcal{E})$ 使得

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t - \tau_n, X_{\tau_n}) \mathbb{1}_{[\tau_n, \tau_{n+1})}(t), \quad 0 \leq t < \tau, \quad P_x\text{-a.s.}, \quad x \in E. \quad (2.4)$$

反过来, 如果上式成立则其自然流为离散型流. 我们称 $\{(\phi_n, F_n, q_n)\}$ 为逐段决定 Markov 骨架过程 X 的三元特征列. 过程的有限维分布族完全由它决定. 逐段决定 Markov 骨架过程 X 称为齐次的, 如果三元特征列与 n 无关, 即 $(\phi_n, F_n, q_n) = (\phi, F, q)$. (ϕ, F, q) 称作齐次逐段决定 Markov 骨架过程 X 的三元特征.

基于上述概念和性质, Hou 和 Liu^[12] 证明了如下定理.

定理 2.2 一个具有三元特征 (ϕ, F, q) 的逐段决定 Markov 骨架过程 $X = \{X_t(\omega)\}_{0 \leq t < \tau}$ 成为齐次强 Markov 过程的充要条件是, 对任意的 $x \in E$, $s, t \in \mathbb{R}_+$ 且 $s+t \in (0, c(x))$,

(i) ϕ 是中断半动力系统, 即 ϕ 满足

$$\phi(0, x) = x, \quad \phi(t, \phi(s, x)) = \phi(s+t, x); \quad (2.5)$$

(ii) $F(x, t) := F(x, (t, +\infty])$ 满足函数方程

$$F(x, 0) = 1, \quad F(x, s)F(\phi(s, x), t) = F(x, s+t); \quad (2.6)$$

(iii) q 满足

$$q(x, s+t, B) = q(\phi(s, x), t, B), \quad B \in \mathcal{E}, \quad (2.7)$$

且当 $F(x, \{c(x)\}) > 0$, 上式对 $s+t = c(x)$ 也成立, 其中

$$c(x) := \inf\{t > 0 : F(x, t) = 0\}$$

(约定 $\inf \emptyset = \infty$).

基于定理 2.2, 我们可以如下定义逐段决定 Markov 过程.

定义 2.3 一个具有三元特征 (ϕ, F, q) 的 (齐次) 逐段决定 Markov 骨架过程 $X = \{X_t(\omega)\}_{0 \leq t < \tau}$,

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(t - \tau_n, X_{\tau_n}) \mathbb{1}_{[\tau_n, \tau_{n+1})}, \quad 0 \leq t < \tau, \quad P_x\text{-a.s.}, \quad x \in E.$$

称为 (齐次) 逐段决定 Markov 过程, 如果存在函数 $c: (E, \mathcal{E}) \mapsto (\bar{\mathbb{R}}_+ \setminus \{0\}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}_+ \setminus \{0\}))$, 使得对任意的 $x \in E, s, t \in \mathbb{R}_+$ 且 $s + t \in (0, c(x))$, 我们有

(i) ϕ 是中断时刻为 $c(x)$ 的半动力系统, 即 ϕ 满足

$$\phi(0, x) = x, \quad \phi(t, \phi(s, x)) = \phi(s + t, x);$$

(ii) 条件尾分布函数 $F(x, t) := F(x, (t, \infty])$ 满足函数方程

$$F(x, 0) = 1, \quad F(x, s)F(\phi(s, x), t) = F(x, s + t);$$

(iii) 跳转移特征 q 满足

$$q(x, t, \{\phi(t, x)\}) = 0, \quad q(x, s + t, B) = q(\phi(s, x), t, B), \quad B \in \mathcal{E},$$

且当 $F(x, \{c(x)\}) > 0$, 上式对 $s + t = c(x)$ 也成立, 其中

$$c(x) := \inf\{t > 0 : F(x, t) = 0\}.$$

PDMPs 的有限维分布族由过程的三元特征决定. 这三元特征是半动力系统特征 ϕ 、跳时分布特征 F 和跳转移特征 q . 这三者的性质与相互关系决定了过程的性质. 与 Jacod 和 Skorokhod^[10] 的 JMPs 的定义比较, 我们不难发现这里的 PDMPs 与 JMPs 是一致的. 文献 [10, 13, 15] 对三者的基本性质分别给予了不同程度的讨论. 半动力系统特征刻画的是系统两个相邻跳时之间的确定性运动.

定义 2.4 设 $(E, \mathcal{E})$ 为 Polish 空间, $\phi: (\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{E}) \mapsto (E, \mathcal{E})$ 为可测映射, 我们称 ϕ 为 E 上的半动力系统 (semi-dynamic system) 或半流 (semi-flow), 若

(i) $\phi(0, x) = x$;

(ii) $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(s + t, x)$,

其中 $x \in E, s, t \in \mathbb{R}_+$ 且 $s + t < c(x)$. 而函数 $c: E \mapsto \bar{\mathbb{R}}_+ \setminus \{0\}$ 满足

$$c(x) = c(\phi(t, x)) + t, \quad 0 \leq t < c(x), \quad (2.8)$$

其中 $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, 且 $c(\cdot)$ 称为半动力系统的中断时刻 (killing time).

对于任意固定的 $x \in E$, 通过扩大状态空间的办法, 补充 $\phi(\cdot, x)$ 在中断时刻 $c(x)$ 点的值, 使得定义 2.4(ii) 当 $s + t = c(x)$ 时仍满足, 如令

$$\phi(c(x), x) := \begin{cases} \lim_{t \uparrow c(x)} \phi(t, x), & \text{如果 } \lim_{t \uparrow c(x)} \phi(t, x) \text{ 存在,} \\ \Delta, & \text{其他,} \end{cases} \quad (2.9)$$

其中 Δ 称为坟墓点 (cemetery point), 它是状态空间 E 外的一点. 令

$$\partial^+ E := \{\phi(c(x), x) : x \in E\}.$$

我们称 $\partial^+ E$ 为状态空间 E 的 ϕ -流出边界.

对于任意的 $x \in E$, $E \cup \partial^+ E$ 的子集 $\Phi_x := \{\phi(t, x) : t \in (0, c(x)] \cap \mathbb{R}_+\}$, 称为半动力系统从 x 出发, 在时刻 $c(x)$ 中断的一条轨道 (trajectory).

状态 $x \in E$ 称为平衡点 (equilibrium point), 如果 $\phi(t, x) = x$ 对所有的 $t \in \mathbb{R}_+$ 都成立. 此时有 $\Phi_x = \{x\}$. 平衡点也称为静点 (rest point) 或不动点 (fixed point). 半动力系统 ϕ 的所有平衡点的集合记为 E_e .

状态 $x \in E$ 称为周期点 (periodic point), 如果函数 $\phi(\cdot, x)$ 是一个周期函数. 此时, 轨道 Φ_x 称为周期的, 它的最小正周期记为 T_x ($0 \leq T_x < \infty$). 半动力系统 ϕ 的所有周期点的集合记为 E_p .

半动力系统与动力系统的本质区别在于, 从起点出发, 半动力系统只能预测未来, 不能回溯历史. 在半动力系统中, 允许不同轨道相交的情形出现.

定义 2.5 状态 $x \in E$ 称为交汇点 (confluent point), 若存在两个状态 $x_1, x_2 \in E$ 满足 $x_1 \notin \Phi_{x_2}$ 且 $\Phi_{x_1} \cap \Phi_{x_2} \neq \emptyset$, 使得 $x = \phi(t^*(x_1, x_2), x_1)$, 其中

$$t^*(x_1, x_2) := \inf\{t > 0 : \phi(t, x_1) \in \Phi_{x_2}\}.$$

3 半动力系统可加泛函

我们首先引入半动力系统可加泛函的概念, 它在一般 PDMPs 的研究中将起到基础的作用.

定义 3.1 对给定的半动力系统 ϕ , 函数 $a : (E \times \mathbb{R}_+, \mathcal{E} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 称为半动力系统 ϕ 的可加泛函, 如果对任意的 $x \in E$, $s, t \in \mathbb{R}_+$ 且 $s + t \in [0, c(x)]$ 满足

$$a(x, 0) = 0, \quad a(x, s) + a(\phi(s, x), t) = a(x, s + t).$$

以下假定半动力系统可加泛函 $a(x, t)$ 关于 t 是右连续的. 下面先给出几个基本的例子和性质.

例 3.2 (i) $a(x, t) = \int_0^t l(\phi(s, x))ds$ 是半动力系统 ϕ 的可加泛函. 我们称可测函数 $l : (E, \mathcal{E}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 是局部路径可积的, 若对任意的 $x \in E$, $t \in [0, c(x)] \cap \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^t l(\phi(s, x))ds < \infty.$$

(ii) $a(x, t) = \sum_{0 < s \leq t} b(\phi(s, x))$ 也是半动力系统 ϕ 的可加泛函. 我们称可测函数 $b : (E, \mathcal{E}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 是局部路径可和的, 若对任意的 $x \in E$, $t \in [0, c(x)] \cap \mathbb{R}_+$,

$$\sum_{0 < s \leq t} b(\phi(s, x)) < \infty.$$

性质 3.3 (i) (可加性) 若 a_1 和 a_2 都是半动力系统 ϕ 的可加泛函, 则 $a_1 + a_2$ 仍是半动力系统 ϕ 的可加泛函;

(ii) (可积性) 若 a_1 是半动力系统 ϕ 的可加泛函, 则对于任意可测函数 $f : E \cup \partial^+ E \mapsto \mathbb{R}$,

$$a_3(x, t) := \int_{(0, t]} f(\phi(s, x))a_1(x, ds), \quad x \in E, \quad t \in [0, c(x)] \cap \mathbb{R}_+$$

也是半动力系统 ϕ 的可加泛函.

证明 可由可加泛函的定义直接证得. □

性质 3.4 若状态 $x \in E$ 是平衡点, 则存在可测函数 $l: E_e \mapsto \mathbb{R}$ 使得

$$a(x, t) = l(x)t, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.1)$$

证明 这时, $c(x) = \infty$, 而方程 $a(x, s) + a(\phi(s, x), t) = a(x, s + t)$ 成为

$$a(x, s) + a(x, t) = a(x, s + t),$$

由右连续性即得结论. $\square$

性质 3.5 若状态 $x \in E$ 是非平衡的周期点 $x \in E_p \setminus E_e$, 最小正周期 $T_x \in (0, \infty)$, 则

$$a(x, t) = \left\lfloor \frac{t}{T_x} \right\rfloor a(x, T_x) + a\left(x, t - \left\lfloor \frac{t}{T_x} \right\rfloor T_x\right),$$

其中 $\left\lfloor \frac{t}{T_x} \right\rfloor$ 是不超过 $\frac{t}{T_x}$ 的最大正整数.

证明 令 $n = \left\lfloor \frac{t}{T_x} \right\rfloor$, $s = t - nT_x$. 于是,

$$a(x, t) = a(x, nT_x + s) = \sum_{k=1}^n a(\phi((k-1)T_x, x), T_x) + a(\phi(nT_x, x), s) = na(x, T_x) + a(x, s).$$

证毕. $\square$

引理 3.6 设 $a: E \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ 是半动力系统 ϕ 的可加泛函, $x \in E$, $s \in (0, c(x))$. 如果函数 $a(x, t)$ 在 $t = s$ 点的右导数存在, 则 $a(\phi(s, x), t)$ 在 $t = 0$ 的右导数存在, 且

$$\left. \frac{\partial^+ a(x, t)}{\partial t} \right|_{t=s} = \left. \frac{\partial^+ a(\phi(s, x), t)}{\partial t} \right|_{t=0}. \quad (3.2)$$

证明 由可加泛函的定义可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^+ a(x, s)}{\partial t} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{a(x, s+h) - a(x, s)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{[a(x, s) + a(\phi(s, x), h)] - [a(x, s) + a(\phi(s, x), 0)]}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{a(\phi(s, x), h) - a(\phi(s, x), 0)}{h} \\ &= \frac{\partial^+ a(\phi(s, x), 0)}{\partial t}. \end{aligned}$$

此即 (3.2). $\square$

对任意的 $x \in E$, 令

$$l(x) := \begin{cases} \left. \frac{\partial^+ a(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0}, & \text{如果 } \left. \frac{\partial^+ a(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} \text{ 存在,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (3.3)$$

定理 3.7 设 $a: E \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ 是半动力系统 ϕ 的可加泛函, 那么, $a(x, \cdot)$ 为 $[0, c(x))$ 上的绝对连续函数当且仅当存在一个定义如 (3.3) 的局部路径可积函数 l 使得

$$a(x, t) = \int_0^{t \wedge c(x)} l(\phi(s, x)) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.4)$$

证明 对 $x \in E$, 设 $a(x, \cdot)$ 为 $[0, c(x))$ 上的绝对连续函数, 那么, 它在 $[0, c(x))$ 上几乎处处可微. 由引理 3.6 有

$$\frac{\partial a(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^+ a(x, t)}{\partial t} = l(\phi(t, x)), \quad \text{a.e. 于 } [0, c(x)).$$

定义函数

$$\tilde{a}(x, t) = \int_0^{t \wedge c(x)} l(\phi(s, x)) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

则 $\tilde{a}(x, \cdot)$ 在 $[0, c(x))$ 上是绝对连续的, 且有

$$\frac{\partial \tilde{a}(x, t)}{\partial t} = l(\phi(t, x)), \quad \text{a.e. 于 } [0, c(x)).$$

于是,

$$\frac{\partial \tilde{a}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial a(x, t)}{\partial t}, \quad \text{a.e. 于 } [0, c(x))$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{a}(x, t) - a(x, t)) = 0, \quad \text{a.e. 于 } [0, c(x)).$$

注意到 $\tilde{a}(x, 0) = a(x, 0) = 0$, 由 $\tilde{a}(x, \cdot)$ 和 $a(x, \cdot)$ 的绝对连续性知, $\tilde{a}(x, \cdot) - a(x, \cdot)$ 在 $[0, c(x))$ 上绝对连续, 且有

$$\tilde{a}(x, t) - a(x, t) = \tilde{a}(x, 0) - a(x, 0) = 0, \quad \text{a.e. 于 } [0, c(x)).$$

所以,

$$a(x, t) = \tilde{a}(x, t).$$

这就证明了定理. □

定义 3.8 我们称 y 为 a -跳点, 若 $y \in J_a$, 其中

$$J_a := \{\phi(t, x) : a(t, x) - a(t-, x) \neq 0, x \in E, t \in (0, c(x)] \cap \mathbb{R}_+\}.$$

对任意 $x \in E, t \in (0, c(x)]$, 令

$$\Delta a(x, t) := a(x, t) - a(x, t-).$$

引理 3.9 对任意 $x \in E, t \in (0, c(x)]$, 令 $y = \phi(t, x)$. 存在局部路径可和函数 b 使得, 当 y 不是 a -跳点时, $\Delta a(x, t) = b(y) = 0$; 当 y 是 a -跳点但不是半动力系统 ϕ 的交汇点时, $\Delta a(x, t) = b(y)$ 为关于 y 的函数, 与 (x, t) 的选择无关.

证明 显然, 当 y 不是 a -跳点时, $b(y) = 0$.

设 y 是 a -跳点但不是半动力系统 ϕ 的交汇点. 于是, 对任意两状态 x_1 和 x_2 满足 $y = \phi(t_1, x_1) = \phi(t_2, x_2)$, 存在 $s \in (0, t_1 \wedge t_2)$ 及状态 z 满足

$$z = \phi(t_1 - s, x_1) = \phi(t_2 - s, x_2), \quad y = \phi(s, z).$$

于是,

$$\begin{aligned} \Delta a(x_1, t_1) &= a(x_1, t_1) - a(x_1, t_1-) = (a(x_1, t_1 - s) + a(z, s)) - (a(x_1, t_1 - s) + a(z, s-)) \\ &= a(z, s) - a(z, s-). \end{aligned}$$

同理可得

$$\Delta a(x_2, t_2) = a(z, s) - a(z, s-).$$

所以, $\Delta a(x_1, t_1) = \Delta a(x_2, t_2)$. 由 (x_1, t_1) 和 (x_2, t_2) 的任意性证明了 $\Delta a(x, t) = b(y)$ 为关于 y 的函数, 与 (x, t) 的选择无关. $\square$

下面给出半动力系统可加泛函的 Lebesgue 分解. 为此, 我们先定义所谓局部有限变差的可加泛函的概念.

定义 3.10 我们称半动力系统 ϕ 的可加泛函 a 是局部有限变差的, 如果对任意的 $x \in E$, $a(x, \cdot)$ 在 $[0, c(x))$ 的任意紧子区间上是有限变差的.

定理 3.11 设半动力系统 ϕ 的可加泛函 a 是局部有限变差的. 如果所有的交汇点都不是 a -跳点, 则存在局部路径可积函数 l 和局部路径可和函数 b 使得 $a(x, \cdot)$ ($x \in E$) 有如下 Lebesgue 分解:

$$a(x, \cdot) = a^{ac}(x, \cdot) + a^{sc}(x, \cdot) + a^d(x, \cdot), \quad (3.5)$$

其中

$$a^{ac}(x, t) = \int_0^{t \wedge c(x)} l(\phi(s, x)) ds, \quad a^d(x, t) = \sum_{0 < s \leq t \wedge c(x)} b(\phi(s, x)),$$

$a^{sc}(x, \cdot)$ 为奇异连续部分, 且 a^{ac} , a^{sc} 和 a^d 均是半动力系统 ϕ 的可加泛函.

证明 对任意 $x \in E$, 令函数 l 定义如 (3.3). 又 $a^{sc}(x, \cdot)$ 和 $a^d(x, \cdot)$ 的导数几乎处处为 0, 因此有

$$\frac{\partial a^{ac}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^+ a(x, t)}{\partial t} = l(\phi(t, x)), \quad \text{a.e. 于 } [0, c(x)),$$

即

$$a^{ac}(x, t) = \int_0^{t \wedge c(x)} l(\phi(s, x)) ds.$$

另一方面, 由于 $a^{ac}(x, \cdot)$ 和 $a^{sc}(x, \cdot)$ 都是连续的, 所以, 所有的 a^d -跳点与 a -跳点是一致的, 于是, 由引理 3.9, 有

$$a^d(x, t) = \sum_{0 < s \leq t \wedge c(x)} \Delta a(s, x) = \sum_{0 < s \leq t \wedge c(x)} b(\phi(s, x)).$$

另外, 依据例 3.2 可知, a^{ac} 和 a^d 都是半动力系统 ϕ 的可加泛函, 因此, a^{sc} 也是半动力系统 ϕ 的可加泛函. $\square$

4 半动力系统可加泛函与符号轨道测度

设 ϕ 是 Polish 空间 $(E, \mathcal{E})$ 上的半动力系统. 对任意的 $x \in E$, 轨道 Φ_x 上的序关系和 σ -代数可由 $\mathbb{R}_+$ 上的序关系和 Borel σ -代数诱导给出.

首先, 要区分轨道的不同情形. 从 $x \in E$ 出发, 轨道 Φ_x 可以分为以下几种情形:

- (1) 从平衡点 $x \in E_e$ 出发, 此时整个轨道只有一个平衡点, 即 $\Phi_x = \{x\} \subset E_e$;
- (2) 从非平衡的周期点 $x \in E_p \setminus E_e$ 出发, 此时最小正周期 $T_x \in (0, \infty)$ 且整个轨道 Φ_x 都是周期的, 即 $\Phi_x \subset E_p \setminus E_e$;
- (3) 从非周期点 $x \in E \setminus E_p$ 出发, 但在某一时刻到达某一平衡点 $x^* \in E_e$, 此时轨道是由一段非周期轨道和一个平衡点组成, 即

$$\Phi_x = \{\phi(t, x) : 0 \leq t < t_x^*\} \cup \{x^*\},$$

其中

$$t_x^* := \inf\{t > 0 : \phi(t, x) = x^*\};$$

(4) 从非周期点 $x \in E \setminus E_p$ 出发, 但在经过一段时间后到达某一非平衡的周期点 $y \in E_p \setminus E_e$, 之后进入周期轨道, 最小正周期 $T_{x^*} \in (0, \infty)$, 此时轨道是由一段非周期轨道和一段周期轨道组成, 即

$$\Phi_x = \{\phi(t, x) : 0 \leq t < t_x^*\} \cup \Phi_{x^*},$$

其中

$$t_x^* := \inf\{t > 0 : \phi(t, x) \in \Phi_y\}, \quad x^* := \phi(t_x^*, x),$$

注意 x^* 是半动力系统 ϕ 的交汇点;

(5) 从非周期点 $x \in E \setminus E_p$ 出发, 且从不过任何周期点, 此时整个轨道 Φ_x 都是非周期的, 即 $\Phi_x \subset E \setminus E_p$.

定义 4.1 对 $x \in E$, 轨道 Φ_x 上的偏序关系定义为 $y_1 \preceq y_2$, 若 $y_1, y_2 \in \Phi_x$ 且 $t_1 \leq t_2$, 其中

$$t_i := \inf\{t > 0 : \phi(t, x) = y_i\}, \quad i = 1, 2.$$

轨道 Φ_x 上的区间定义为

$$(y_1, y_2]_{\text{tra}} := \{\phi(t, x) : t_1 < t \leq t_2\}, \quad y_1, y_2 \in \Phi_x, \quad y_1 \preceq y_2.$$

类似地, 我们可以定义 $[y_1, y_2]_{\text{tra}}$, $[y_1, y_2)_{\text{tra}}$ 和 $(y_1, y_2)_{\text{tra}}$. 轨道 Φ_x 上的 σ -代数定义为

$$\mathcal{B}(\Phi_x) := \sigma\{(y_1, y_2]_{\text{tra}} : y_1, y_2 \in \Phi_x, y_1 \preceq y_2\} \subset \mathcal{E}.$$

设 a 是半动力系统 ϕ 的可加泛函. 定义 $(\Phi_x, \mathcal{B}(\Phi_x))$ 上的符号测度, 仍记为 a :

$$a((y_1, y_2]_{\text{tra}}) := a(x, t_2) - a(x, t_1) = a(y_1, t_2 - t_1), \quad y_1, y_2 \in \Phi_x, \quad y_1 \preceq y_2.$$

我们称符号测度 a 为定义在 $(\Phi_x, \mathcal{B}(\Phi_x))$ 上的由半动力系统 ϕ 的可加泛函 a 诱导的符号轨道测度.

定理 4.2 设 a 是半动力系统 ϕ 的可加泛函. 假设半动力系统 ϕ 的所有交汇点都不是 a -跳点. 若对任意 $x \in E$, 函数 $a(x, \cdot)$ 在 $[0, c(x)] \cap \mathbb{R}_+$ 上是局部有限变差的, 则存在唯一的符号轨道测度 a 和可测函数 $l : E_e \mapsto \mathbb{R}$ 使得

$$a(x, t) = \int_{(0, t]} a(d\phi(s, x)) + \int_0^t l(\phi(s, x)) \mathbb{1}_{E_e}(\phi(s, x)) ds, \quad t \in [0, c(x)] \cap \mathbb{R}_+, \quad (4.1)$$

其中在情形 (1)–(4) 中, 符号轨道测度 a 在 $(\Phi_x, \mathcal{B}(\Phi_x))$ 上是有限的; 在情形 (5) 中, 符号轨道测度 a 在 $(\Phi_x, \mathcal{B}(\Phi_x))$ 上是 σ -有限的.

证明 在这里, 我们首先给出轨道的一般性描述: 半动力系统从状态 $x \in E$ 出发, 在时刻

$$t_x^* := \inf\{t \geq 0 : \phi(t, x) \in E_p\}$$

到达某一周期点. 如果 $t_x^* < \infty$, 记 $x^* := \phi(t_x^*, x)$, 那么, 对应半动力系统轨道的情形 (1)–(5), 我们就可以用 t_x^* 和 T_{x^*} 的不同取值范围来分别描述:

(1) $t_x^* = 0$, $T_{x^*} = 0$, 此时 $x^* = x$;

(2) $t_x^* = 0, T_{x^*} \in (0, \infty)$, 此时 $x^* = x$;

(3) $t_x^* \in (0, \infty), T_{x^*} = 0$;

(4) $t_x^* \in (0, \infty), T_{x^*} \in (0, \infty)$;

(5) $t_x^* = \infty$.

下面将针对半动力系统轨道的五种情形进行逐一分析.

先来看情形 (5), 即整个轨道都是非周期的. 我们知道, 对任意 $x \in E$, $a(x, \cdot)$ 在 $[0, c(x)] \cap \mathbb{R}_+$ 上是局部有限变差函数的充分必要条件是在 $[0, c(x)] \cap \mathbb{R}_+$ 上存在唯一的 σ -有限符号测度 μ_x 使得

$$\mu_x((0, t]) = a(x, t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

那么, 对任意 $y \in \Phi_x$, 我们有

$$a((x, y]_{\text{tra}}) = a(x, t_y) = \mu_x((0, t_y]) < \infty,$$

其中

$$t_y := \inf\{t > 0 : \phi(t, x) = y\}.$$

这就证明了符号轨道测度 a 在 $(\Phi_x, \mathcal{B}(\Phi_x))$ 上也是 σ -有限的. 由于此时轨道 Φ_x 上没有周期点, 所以, 可测映射 $\phi(\cdot, x) : (0, c(x)] \cap \mathbb{R}_+ \mapsto \Phi_x$ 既是单射又是满射, 于是有

$$a(x, t) = a((x, \phi(t, x)]_{\text{tra}}) = \int_{(0, t]} a(d\phi(s, x)), \quad t \in [0, c(x)] \cap \mathbb{R}_+.$$

情形 (1), 即整个轨道上只有一个平衡点 $x \in E_e$, 此时 $c(x) = \infty$, 符号轨道测度

$$a((x, \phi(t, x)]_{\text{tra}}) = a((x, x]_{\text{tra}}) = a(\emptyset) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

然而, 由性质 3.4 知, 存在唯一的可测函数 $l : E_e \mapsto \mathbb{R}$ 使得

$$a(x, t) = l(x)t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

情形 (2), 即整个轨道都是周期的, 此时 $c(x) = \infty$, 可测映射 $\phi(\cdot, x) : (0, T_x] \mapsto \Phi_x$ 既是单射又是满射. 参照情形 (5), 有

$$a(x, t) = \int_{(0, t]} a(d\phi(s, x)) = \mu_x((0, t]), \quad t \in (0, T_x].$$

由于 μ_x 在 $\mathbb{R}_+$ 上是 σ -有限的, 所以, μ_x 在 $(0, T_x]$ 上是有限的, 相应地, 符号轨道测度 a 在 $(\Phi_x, \mathcal{B}(\Phi_x))$ 上也应该是有限的. 又由性质 3.5 可知, 符号轨道测度在每个周期上的取值都是相同的, 因此有

$$a(x, t) = \int_{(0, t]} a(d\phi(s, x)), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

情形 (3), 即轨道从非周期点 x 出发, 经过一段时间后停留在平衡点 x^* . 此时 $c(x) = \infty$, 在时间区间 $(0, t_x^*]$ 和 (t_x^*, ∞) 上, 分别参照情形 (5) 和 (1), 我们有

$$a(x, t) = a((x, x^*]_{\text{tra}}) + l(x^*)(t - t_x^*)\mathbb{1}_{(t_x^*, \infty)}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

此即 (4.1), 符号轨道测度 a 在 $(\Phi_x, \mathcal{B}(\Phi_x))$ 上是有限的.

情形 (4), 即轨道从非周期点 x 出发, 经过一段时间后进入周期轨道 Φ_{x^*} . 此时 $c(x) = \infty$, 在时间区间 $(0, t_x^*]$ 和 (t_x^*, ∞) 上, 分别参照情形 (5) 和 (2), 我们有

$$a(x, t) = \int_{(0, t]} a(d\phi(s, x)), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

符号轨道测度 a 在 $(\Phi_x, \mathcal{B}(\Phi_x))$ 上是有限的. 注意, 在这种情形下, x^* 是交汇点, 但由假设知, x^* 不是 a -跳点, 所以,

$$a(\{x^*\}_{\text{tra}}) = \Delta a(x, t_x^*) = \Delta a(x, t_x^* + T_{x^*}) = 0,$$

即函数 $a(x, \cdot)$ 在经过 $t = t_x^*$ 和 $t = t_x^* + T_{x^*}$ 时的变化量是一致的.

综合情形 (1)–(5), 定理得证. $\square$

注 4.3 对半动力系统 ϕ 的任意可加泛函 a , 由它诱导的符号轨道测度 a 在轨道 $\Phi_x (x \in E)$ 上与轨道的起点 x 无关. 实际上, 对任意 $y \in \Phi_x$, 即 $x \preceq y$, 此时 $\Phi_y \subseteq \Phi_x$, 若在轨道 Φ_y 上存在由 a 诱导的另一个符号轨道测度 $\tilde{a}$ 且该轨道上没有平衡点, 则

$$\begin{aligned} \int_{(0, t]} \tilde{a}(d\phi(s, y)) &= a(y, t) = a(x, t_y + t) - a(x, t_y) \\ &= \int_{(0, t_y + t]} a(d\phi(s, x)) - \int_{(0, t_y]} a(d\phi(s, x)) \\ &= \int_{(t_y, t_y + t]} a(d\phi(s, x)) \\ &= \int_{(0, t]} a(d\phi(s, y)). \end{aligned}$$

定理 4.4 设 a 是定义在 $(\Phi_x, \mathcal{B}(\Phi_x))$ ($x \in E$) 上的符号轨道测度, $l: E_e \mapsto \mathbb{R}$ 是可测函数. 若在情形 (1)–(4) 中, a 在 $(\Phi_x, \mathcal{B}(\Phi_x))$ 上是有限测度; 在情形 (5) 中, a 在 $(\Phi_x, \mathcal{B}(\Phi_x))$ 上是 σ -有限测度, 则由 (4.1) 定义的函数 a 是半动力系统 ϕ 的可加泛函, 且对任意 $x \in E$, $a(x, \cdot)$ 在 $[0, c(x)] \cap \mathbb{R}_+$ 上是局部有限变差函数.

证明 显然, 由 (4.1) 定义的函数 a 是半动力系统 ϕ 的可加泛函. 另由定理 4.2 的证明, 即可得证结论. $\square$

5 两个特殊的半动力系统可加泛函

5.1 状态空间上的可测实值函数

对任意可测函数 $f: E \cup \partial^+ E \mapsto \mathbb{R}$, 显然, 函数 $a_f(x, t) := f(\phi(t, x)) - f(x)$ 总是半动力系统 ϕ 的可加泛函.

定义 5.1 设 $f: E \cup \partial^+ E \mapsto \mathbb{R}$ 是可测函数. 我们称 f 是局部路径有限变差函数, 如果对每个 $x \in E$, $f(\phi(\cdot, x))$ 在 $[0, c(x))$ 的任何紧子区间上是有限变差函数.

以下假定 $f(\phi(\cdot, x))$ 关于 t 是右连续的. 引入记号: 对任意 $x \in E$,

$$\mathcal{X}f(x) := \begin{cases} \left. \frac{\partial^+ f(\phi(t, x))}{\partial t} \right|_{t=0}, & \text{如果 } \left. \frac{\partial^+ f(\phi(t, x))}{\partial t} \right|_{t=0} \text{ 存在,} \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$\Delta f(\phi(t, x)) := f(\phi(t, x)) - f(\phi(t-, x)), \quad t \in (0, c(x)].$$

于是, 由定理 3.11, 有如下推论.

推论 5.2 设 $f: E \cup \partial^+ E \mapsto \mathbb{R}$ 是可测函数. 如果 f 是路径右连续且局部路径有限变差的, 且所有的交汇点都不是 $f(\phi(\cdot, x))$ 的跳点, 则

$$f(\phi(t, x)) - f(x) = \int_0^{t \wedge c(x)} \mathcal{X} f(\phi(s, x)) ds + a_f^{sc}(x, t \wedge c(x)) + \sum_{0 < s \leq t \wedge c(x)} \Delta f(\phi(s, x)), \quad x \in E, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

其中 $a_f^{sc}(x, \cdot)$ 是奇异连续函数.

5.2 条件跳时 Hazard 函数

设函数 $F: E \times \mathbb{R}_+ \mapsto [0, 1]$ 为逐段决定 Markov 过程的三元特征中的条件跳时分布特征, 即对任意 $x \in E, s, t \in \mathbb{R}_+$ 且 $s + t \in (0, c(x)]$, F 满足 (2.6),

$$F(x, 0) = 1, \quad F(x, s)F(\phi(s, x), t) = F(x, s + t).$$

令 $\Lambda(x, \cdot)$ 为函数 $F(x, \cdot)$ 的 Stieltjes 对数, 即

$$\Lambda(x, t) := \text{slog } F(x, t) = \int_{(0, t \wedge c(x)]} \frac{F(x, ds)}{F(x, s-)}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (5.1)$$

其中 $c(x) := \inf\{t: F(x, t) = 0\}$. 我们称 Λ 为逐段决定 Markov 过程的条件跳时 Hazard 函数. 由于 (5.1) 等价于

$$F(x, t) = \text{sexp } \Lambda(x, t), \quad x \in E, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

即 F 与 Λ 是相互唯一确定的.

引理 5.3 设 Λ 为逐段决定 Markov 过程的条件跳时 Hazard 函数, 则 Λ 是半动力系统 ϕ 的可加泛函, 且对任意 $x \in E, \Lambda(x, \cdot)$ 是右连续非降函数.

证明 由于 $F(x, \cdot)$ 是右连续非升函数, 由 (5.1) 可知, $\Lambda(x, \cdot)$ 是右连续非降的, 且有

$$\Lambda(x, 0) = 0, \quad x \in E.$$

其次, 对任意 $x \in E, s, t \in \mathbb{R}_+$ 且 $s + t \in [0, c(x)]$,

$$\begin{aligned} \Lambda(x, s + t) &= \int_{(0, s+t]} \frac{F(x, du)}{F(x, u-)} = \int_{(0, s]} \frac{F(x, du)}{F(x, u-)} + \int_{(0, t]} \frac{F(x, s + du)}{F(x, s + u-)} \\ &= \int_{(0, s]} \frac{F(x, du)}{F(x, u-)} + \int_{(0, t]} \frac{F(x, s)F(\phi(s, x), du)}{F(x, s)F(\phi(s, x), u-)} \\ &= \Lambda(x, s) + \Lambda(\phi(s, x), t). \end{aligned}$$

证毕. □

进一步地, 对 $x \in E$, 令

$$\lambda(x) := \begin{cases} \left. \frac{\partial^+ \Lambda(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0}, & \text{如果 } \left. \frac{\partial^+ \Lambda(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} \text{ 存在,} \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$\Delta\Lambda(\phi(t, x)) := \Lambda(x, t) - \Lambda(x, t-), \quad t \in (0, c(x)].$$

则同样由定理 3.11, 我们有如下推论.

推论 5.4 设 Λ 为逐段决定 Markov 过程的条件跳时 Hazard 函数. 如果所有的交汇点都不是 Λ -跳点, 则对每个 $x \in E$, $\Lambda(x, \cdot)$ 有如下分解:

$$\Lambda(x, t) = \int_0^{t \wedge c(x)} \lambda(\phi(s, x)) ds + \Lambda^{sc}(x, t \wedge c(x)) + \sum_{0 < s \leq t \wedge c(x)} \Delta\Lambda(\phi(s, x)), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

其中 $\Lambda^{sc}(x, \cdot)$ 是奇异连续函数.

证明 由引理 5.3 和定理 3.11 立得. □

致谢 衷心感谢侯振挺老师一直以来的教导、关怀和帮助.

参考文献

- 1 Davis M H A. Piecewise-deterministic Markov processes: A general class of non-diffusion stochastic models. J R Statist Soc B, 1984, 46: 353–388
- 2 Davis M H A. Markov Models & Optimization. Boca Raton: CRC Press, 1993
- 3 Stroock D W, Varadhan S R S. Multidimensional Diffusion Processes. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1979
- 4 Embrechts P, Schmidli H. Modelling of extremal events in insurance and finance. Z Oper Res, 1994, 39: 1–34
- 5 Rolski T, Schmidli H, Schmidt V, et al. Stochastic Processes for Insurance and Finance. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 1998
- 6 Palmowski Z, Rolski T. A technique for exponential change of measure for Markov processes. Bernoulli, 2002, 8: 767–785
- 7 Schmidli H. Stochastic Control in Insurance. London: Springer-Verlag, 2007
- 8 Costa O L V, Dufour F. Continuous Average Control of Piecewise Deterministic Markov Processes. New York: Springer-Verlag, 2013
- 9 Jacobsen M. Point Process Theory and Applications, Marked Point and Piecewise Deterministic Processes. Boston: Birkhäuser, 2006
- 10 Jacod J, Skorokhod A V. Jumping Markov processes. Ann Inst H Poincaré Probab Statist, 1996, 32: 11–67
- 11 侯振挺, 刘再明, 邹捷中, 等. Markov 骨架过程. 科学通报, 1998, 43: 457–466
- 12 Hou Z T, Liu G X. Piecewise deterministic processes and Markov modelling of stochastic systems with continuous parameter. In: Proceedings of the 2nd International Symposium on Semi-Markov Models: Theory and Applications. Compiegne: Universite de Technologie de Compiegne, 1998
- 13 Hou Z T, Liu G X. Markov Skeleton Processes and Their Applications. Beijing: Science Press, 2005
- 14 刘国欣, 侯振挺, 邹捷中. 逐段决定马尔可夫骨架过程. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2000
- 15 Liu G X. Piecewise deterministic Markov processes and semi-dynamic systems. In: Markov Processes and Controlled Markov Chains. New York: Springer-Verlag, 2002, 93–107

Piecewise deterministic Markov processes and additive functionals of semi-dynamic systems

LIU GuoXin & LIU ZhaoYang

Abstract This paper is devoted to an analytic foundation for the study of general piecewise deterministic Markov processes (PDMPs, for short). It is firstly introduced the concept of the additive functionals of a semi-dynamic system in this paper. Furthermore, a systematic study of the additive functionals is presented. It

is pointed out that the additive functionals are intrinsically dependent on the trajectories of the semi-dynamic system. This concept is closely related with the conditional distributions of the jumping times of a PDMP, the additive functionals of the process, etc.

Keywords piecewise deterministic Markov process, semi-dynamic system, additive functional of semi-dynamic system

MSC(2010) 60J25, 60J75, 46T12

doi: 10.1360/N012015-00069