Bergman-Hartogs 型域的全纯自同构群

潘利双*, 王安

首都师范大学数学科学学院, 北京 100048

E-mail: plshuang123@163.com, wangan@cnu.edu.cn

收稿日期: 2014-01-17; 接受日期: 2014-11-20; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371257) 和北京市自然科学基金 (批准号: 1122010) 资助项目

摘要 我们考虑一类以有界对称域 D 为底的 Bergman-Hartogs 型域

$$\Omega = \{(w_{(1)}, \dots, w_{(r)}, z) \in \mathbb{C}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{m_r} \times D : \|w_{(1)}\|^{2p_1} + \dots + \|w_{(r)}\|^{2p_r} < K_D(z, z)^{-q}\},$$

其中 $K_D(z, z)$ 是 D 上的 Bergman 核函数, $r \geq 1$ 且为正整数, 参数 $p_1, \dots, p_r > 1$ 和 $q > 0$ 为实数. 我们给出它的全纯自同构群, 并且证明当 $r = 1$ 时此自同构群为最大全纯自同构群; 当 $r > 1$ 时, 若 Ω 的全纯自同构变换 F 将 $(0, z) \in \{0\} \times D$ 映到 $(0, z^*) \in \{0\} \times D$, 则 F 在我们给出的全纯自同构群中.

关键词 Bergman-Hartogs 型域 全纯自同构群 有界对称域

MSC (2010) 主题分类 32A07, 32M05

1 引言

设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域, 并记 $\text{Aut}(\Omega)$ 为将 Ω 映到 Ω 的双全纯映射的全体构成的集合. 显然, $\text{Aut}(\Omega)$ 中的变换在映射的复合运算下构成一个群, $\text{Aut}(\Omega)$ 称为 Ω 的全纯自同构群.

域的全纯自同构群是多复变中研究许多问题的有力工具. 例如, 对于函数空间理论, Bergman 核函数以及域的全纯等价等问题的研究, 全纯自同构群都起到了很大的作用. 因为全纯自同构群的重要性, 所以它被广泛地关注和研究. $\mathbb{C}^n$ 中的单位球和单位多圆盘的全纯自同构群是我们所熟知的. 但是确定一个域的全纯自同构群是很困难的, 尤其是给出最大全纯自同构群. 华罗庚^[1]给出了 4 类 Cartan 域的全纯自同构群. Xu^[2,3]给出了两类例外 Cartan 域的全纯自同构群. Ahn 等人^[4]证明了以 4 类 Cartan 域为底的 Hartogs 域 $\Omega = \{(w, z) \in \mathbb{C}^N \times D : \|w\|^{2\mu} < N_D(z, z)\}$ 的最大全纯自同构群. 由于确定域的最大自同构群的困难性, 有时人们去构造域的全纯自同构子群. 殷慰萍等人^[5]给出了华罗庚域的全纯自同构群的一个子群. Xu 等人^[6]给出正规 Siegel 域在固定点处的最大连通迷向子群. Liu 和 Tang 给出了 Egg 域 $B_{p,q} = \{(z, \dots, \zeta, w, \xi, \dots, \eta) \in \mathbb{C}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{m_s} \times \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{n_t} : |z_1|^{p_1} + \dots + |z_{m_1}|^{p_1} + \dots + |\zeta_1|^{p_s} + \dots + |\zeta_{m_s}|^{p_s} + |w|^2 + \dots + |w_k|^2 + |\xi_1|^{q_1} + \dots + |\xi_{n_1}|^{q_1} + \dots + |\eta_1|^{q_t} + \dots + |\eta_{n_t}|^{q_t} < 1\}$, $0 < p_1 < \dots < p_s < 2 < q_1 < \dots < q_t < \infty$ 在 origin 处的最大迷向子群.

我们考虑更一般的情形, 研究一类以有界对称域为底的 Bergman-Hartogs 型域, 给出它的全纯自同构群, 并证明给出的全纯自同构群是最大自同构群. 首先, 我们给出以有界对称域为底的 Bergman-Hartogs 型域的定义.

英文引用格式: Pan L S, Wang A. The holomorphic automorphism group of the domains of the Bergman-Hartogs type (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 31–42, doi: 10.1360/N012014-00005

设 D 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界对称域, $K_D(z, z)$ 是 D 上的 Bergman 核函数. 定义 $\mathbb{C}^{m+n}$ 中 Bergman-Hartogs 型域为

$$\Omega = \{(w_{(1)}, \dots, w_{(r)}, z) \in \mathbb{C}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{m_r} \times D : \|w_{(1)}\|^{2p_1} + \dots + \|w_{(r)}\|^{2p_r} < K_D(z, z)^{-q}\}, \quad (1.1)$$

其中, $m = m_1 + \dots + m_r$, $r \geq 1$ 为正整数, 参数 $p_1, \dots, p_r > 1$ 和 $q > 0$ 为实数. 若记 $w = (w_{(1)}, \dots, w_{(r)})$, $w_{(j)} = (w_{j1}, \dots, w_{jm_j})$, $j = 1, \dots, r$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, 则 Ω 中的点为

$$(w, z) = (w_{(1)}, w_{(2)}, \dots, w_{(r)}, z) = (w_{11}, \dots, w_{1m_1}, w_{21}, \dots, w_{2m_2}, \dots, w_{r1}, \dots, w_{rm_r}, z_1, \dots, z_n).$$

注 对于上述 Bergman-Hartogs 型域 Ω , 在 $r \geq 1$ 为正整数, $p_1, \dots, p_r > 1$, $q > 0$ 为实数的条件下, 容易证明 Ω 不全纯等价于单位球.

下面我们给出几个变换群. 在第 2 节, 我们将证明它们为 (1.1) 式所示的 Bergman-Hartogs 型域 Ω 的全纯自同构子群.

设

$$G_1 = \{F : F(w, z) = (w_{(1)} \det J_\tau(z)^{\frac{q}{p_1}}, \dots, w_{(r)} \det J_\tau(z)^{\frac{q}{p_r}}, \tau(z)), \tau \in \text{Aut}(D), (w, z) \in \Omega\}, \quad (1.2)$$

其中 $\det J_\tau$ 是 D 上全纯自同构变换 $\tau(z)$ 的 Jacobi 行列式.

设

$$G_2 = \left\{ F : F(w, z) = (w, z) \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, (w, z) \in \Omega \right\}, \quad (1.3)$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} U_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_{m_r} \end{pmatrix},$$

$U_{m_1}, \dots, U_{m_r}$ 分别是 $m_1, \dots, m_r$ 阶酉方阵, I_n 是 n 阶单位方阵.

设 $E_{i,j}$ 是第 i 行第 j 列元素为 1 其他元素都是 0 的 m 阶方阵, $1 \leq i, j \leq m$, 则 m 阶初等矩阵 $P_{i,j}$ 为

$$P_{i,j} = I_m - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}.$$

即 $P_{i,j}$ 是由 m 阶单位方阵的第 i 列和第 j 列互换得到的初等矩阵.

如果 Ω 中点的变量 $w_{(1)}, \dots, w_{(r)}$ 中有两组变量 $w_{(j)}$ 和 $w_{(k)}$ 的维数和幂次相同, 即 $m_j = m_k$, $p_j = p_k$, $1 \leq j < k \leq r$, 那么定义一个初等变换矩阵

$$Q_{j,k,l} \triangleq P_{\alpha+1, \beta+1} P_{\alpha+2, \beta+2} \cdots P_{\alpha+l, \beta+l},$$

其中 $\alpha = m_1 + \dots + m_{j-1}$, $\beta = m_1 + \dots + m_{k-1}$, $l = m_j$. 即 $Q_{j,k,l}$ 是将单位方阵 I_m 的第 $\alpha+1, \dots, \alpha+m_j$ 列与 $\beta+1, \dots, \beta+m_k$ 列依次对应交换位置, 也就是变量 $w_{(1)}, \dots, w_{(j)}, \dots, w_{(k)}, \dots, w_{(r)}$ 在 $Q_{j,k,l}$ 的作用下交换 $w_{(j)}$ 和 $w_{(k)}$ 的位置.

记由满足条件 $m_j = m_k$, $p_j = p_k$, $1 \leq j < k \leq r$ 的 $Q_{j,k,l}$ 按照矩阵的乘法运算生成的循环群为 S , 即

$$S = \langle Q_{j,k,l} : m_j = m_k, p_j = p_k, 1 \leq j < k \leq r \rangle,$$

设

$$G_3 = \left\{ F : F(w, z) = (w, z) \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, Q \in S, (w, z) \in \Omega \right\}. \quad (1.4)$$

现在我们给出本文的主要结论:

定理 1 设 Ω 是 $\mathbb{C}^{m+n}$ 中如 (1.1) 所示的 Bergman-Hartogs 型域. 当 $r = 1$, 则 Ω 的最大全纯自同构群为 $G_1 G_2 G_3$, 即 $\text{Aut}(\Omega) = G_1 G_2 G_3$, 其中, G_1, G_2 和 G_3 分别为 (1.2), (1.3) 和 (1.4) 所给出的变换群.

定理 2 设 Ω 是 $\mathbb{C}^{m+n}$ 中如 (1.1) 所示的 Bergman-Hartogs 型域. 若

$$F \in \text{Aut}(\Omega) : (0, z) \rightarrow (0, z^*), \quad (1.5)$$

其中 $z, z^* \in D$, 则 $F \in G_1 G_2 G_3$.

2 基础知识

下面先给出齐性域和对称域的概念.

定义 1 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{C}^N$ 中的域. 若对域 $\mathcal{D}$ 中的任意两点 a 和 b , 总存在 $\mathcal{D}$ 的一个全纯自同构变换 F , 使得 $F(a) = b$. 则称 $\mathcal{D}$ 为齐性域.

定义 2 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{C}^N$ 中的一个域. 若对域 $\mathcal{D}$ 内的每一点 a_0 , 都存在域 $\mathcal{D}$ 的全纯自同构变换 F , 使得此变换连续作用两次为恒等变换, 且 a_0 为变换 F 的唯一不动点. 即

$$F^2 = Id, \quad F(a_0) = a_0,$$

则称 $\mathcal{D}$ 为对称域.

任一有界对称域必然是齐性域. 不可约的有界对称域又分为四类 Cartan 域和 16 维与 27 维的两个例外 Cartan 域.

定义 3 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{C}^N$ 中的域. 若对于任意 $a \in \mathcal{D}$ 以及实数 θ , 都有 $e^{\sqrt{-1}\theta}a \in \mathcal{D}$, 则称 $\mathcal{D}$ 为圆型域.

有界对称域都是圆型域. 根据文献 [7] 可知, (1.1) 式给出的 Bergman-Hartogs 域 Ω 是分组圆型域, 因此 Ω 也是圆型域. 对于圆型域上的双全纯映射, 有下面的 Cartan 定理:

Cartan 定理 设 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 都是 $\mathbb{C}^N$ 中包含原点的圆型域, 并且 $\mathcal{D}_1$ 是有界的. 若 $F : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ 是双全纯映射, 且 $F(0) = 0$, 则 F 是线性映射.

在 $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ 时, Cartan 定理即: 对于包含原点的有界圆型域 $\mathcal{D}$, 将原点映为原点的全纯自同构变换 $F \in \text{Aut}(\mathcal{D})$ 一定是线性映射.

定义 4 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{C}^N$ 中具有 C^2 边界的域, $T_p^{\mathbb{C}}(b\mathcal{D})$ 是 $\mathcal{D}$ 的边界 $b\mathcal{D}$ 在 $p \in b\mathcal{D}$ 点的复切空间. 如果对所有的复切向量 $\omega \in T_p^{\mathbb{C}}(b\mathcal{D})$, 且 $\omega \neq 0$, 有

$$L_p(\rho, \omega) = \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(p) \omega_j \bar{\omega}_k > 0,$$

则称 $\mathcal{D}$ 在 $p \in b\mathcal{D}$ 是强 Levi 拟凸的, 称 $L_p(\rho, \omega)$ 为 Levi 形式.

下面我们证明第 1 节引入的 G_1, G_2 和 G_3 都是 Bergman-Hartogs 型域 Ω 的自同构子群, 并且给出有关 Bergman-Hartogs 型域 Ω 的性质.

命题 1 设 Ω 为如 (1.1) 所示的 Bergman-Hartogs 型域, G_1 为 (1.2) 所给的集合. 则 G_1 是 Ω 的一个全纯自同构子群.

证明 对于 $F \in G_1$, 有

$$F(w, z) = (w_{(1)} \det J_\tau(z)^{\frac{q}{p_1}}, \dots, w_{(r)} \det J_\tau(z)^{\frac{q}{p_r}}, \tau(z)) \triangleq (w_{(1)}^*, \dots, w_{(r)}^*, z^*), \quad (w, z) \in \Omega.$$

利用 D 上 Bergman 核函数的变换法则

$$K_D(z, z) = K_D(\tau(z), \tau(z)) |\det J_\tau(z)|^2, \quad z \in D,$$

则有

$$\begin{aligned} & (\|w_{(1)}^*\|^{2p_1} + \dots + \|w_{(r)}^*\|^{2p_r}) K_D(z^*, z^*)^q \\ &= (\|w_{(1)} \det J_\tau(z)^{\frac{q}{p_1}}\|^{2p_1} + \dots + \|w_{(r)} \det J_\tau(z)^{\frac{q}{p_r}}\|^{2p_r}) K_D(z, z)^q |\det J_\tau(z)|^{-2q} \\ &= (\|w_{(1)}\|^{2p_1} + \dots + \|w_{(r)}\|^{2p_r}) K_D(z, z)^q < 1. \end{aligned}$$

因此 $F(w, z) = (w_{(1)}^*, \dots, w_{(r)}^*, z^*) \in \Omega$. 显然, F 是全纯的.

令 $F^{-1}(w, z) = (w_{(1)} \det J_{\tau^{-1}}(z)^{\frac{q}{p_1}}, \dots, w_{(r)} \det J_{\tau^{-1}}(z)^{\frac{q}{p_r}}, \tau^{-1}(z))$, 因为 $\tau \in \text{Aut}(D)$ 是 D 上的全纯自同构变换, 所以存在 $\tau^{-1} \in \text{Aut}(D)$, 于是 $F^{-1} \in G_1$. 故 $F \in G_1$ 是 $\Omega \rightarrow \Omega$ 的一一全纯映射, 即 $F \in \text{Aut}(\Omega)$ 且 $F^{-1} \in \text{Aut}(\Omega)$.

另外, 定义 G_1 的二元运算为两个映射的复合, 且 G_1 的单位元为恒等映射. 于是 G_1 是 Ω 的一个全纯自同构子群. $\square$

命题 2 设 Ω 为 (1.1) 所示的 Bergman-Hartogs 型域, G_2 为 (1.3) 所述的集合. 则 G_2 是 Ω 的一个全纯自同构子群.

证明 根据矩阵乘法的性质, 要想证明 G_2 是 Ω 的一个全纯自同构子群, 只需证明 $F \in G_2$ 是 $\Omega \rightarrow \Omega$ 的映射以及它的可逆性. 对于 $F \in G_2$, 有

$$F(w, z) = (w, z) \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \quad (w, z) \in \Omega.$$

根据 U 的定义有

$$w_{(1)}^* = w_{(1)} U_{m_1}, \quad \dots, \quad w_{(r)}^* = w_{(r)} U_{m_r}, \quad z^* = z I_n,$$

于是可得

$$\begin{aligned} & (\|w_{(1)}^*\|^{2p_1} + \dots + \|w_{(r)}^*\|^{2p_r}) K_D(z^*, z^*) \\ &= (\|w_{(1)} U_{m_1}\|^{2p_1} + \dots + \|w_{(r)} U_{m_r}\|^{2p_r}) K_D(z^*, z^*) \\ &= (\|w_{(1)}\|^{2p_1} + \dots + \|w_{(r)}\|^{2p_r}) K_D(z, z) < 1. \end{aligned}$$

因此 $F(w, z) = (w^*, z^*) \in \Omega$. 而变换 F 的全纯性是显然的. 现定义

$$F^{-1}(w, z) = (w, z) \begin{pmatrix} \bar{U}^t & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \quad (w, z) \in \Omega.$$

即得 $F^{-1} \in G_2$ 且全纯. 由此可知, F 是 $\Omega \rightarrow \Omega$ 的单满全纯映射, 即 $F \in \text{Aut}(\Omega)$. $\square$

命题 3 设 Ω 为 (1.1) 所示的 Bergman-Hartogs 型域, G_3 为 (1.4) 所给的集合. 则 G_3 是 Ω 的一个全纯自同构子群.

证明 类似于命题 2, 我们只需证明 $\forall F \in G_3$ 是 $\Omega \rightarrow \Omega$ 的映射. 设 $\forall F \in G_3$, 则有

$$F(w, z) = (w, z) \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

$Q \in S$. 由 S 定义可知, 只需验证 S 的生成元的性质即可. 故我们验证 $Q = Q_{j,k,l}$ 时的情况.

设

$$F(w, z) = (w, z) \begin{pmatrix} Q_{j,k,l} & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = (w^*, z^*),$$

此时, $m_j = m_k, p_j = p_k$. 则

$$\begin{aligned} & (w_{(1)}^*, \dots, w_{(j-1)}^*, w_{(j)}^*, w_{(j+1)}^*, \dots, w_{(k-1)}^*, w_{(k)}^*, w_{(k+1)}^*, \dots, w_{(r)}^*, z^*) \\ &= (w_{(1)}, \dots, w_{(j-1)}, w_{(j)}, w_{(j+1)}, \dots, w_{(k-1)}, w_{(k)}, w_{(k+1)}, \dots, w_{(r)}, z) \begin{pmatrix} Q_{j,k,l} & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\ &= (w_{(1)}, \dots, w_{(j-1)}, w_{(k)}, w_{(j+1)}, \dots, w_{(k-1)}, w_{(j)}, w_{(k+1)}, \dots, w_{(r)}, z). \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} & (\|w_{(1)}^*\|^{2p_1} + \dots + \|w_{(r)}^*\|^{2p_r}) K_D(z^*, z^*) \\ &= (\|w_{(1)}\|^{2p_1} + \dots + \|w_{(r)}\|^{2p_r}) K_D(z, z) < 1. \end{aligned}$$

此即 $(w^*, z^*) \in \Omega$. 另外, $F^{-1} = F$, 所以 G_3 是 $\text{Aut}(\Omega)$ 的一个子群. $\square$

命题 4 设 Ω 为 (1.1) 所示的 Bergman-Hartogs 型域. 若 $F \in \text{Aut}(\Omega)$ 且满足 $F(0, 0) = (0, 0)$ 和 $F(w, z) = (w^*, z), (w, z) \in \Omega$, 则 $F \in G_2 G_3$.

证明 我们需要先引入 $\mathbb{C}^r$ 中的 Egg 域

$$\Omega^* = \{(w_1, \dots, w_r) \in \mathbb{C}^r : |w_1|^{2p_1} + \dots + |w_r|^{2p_r} < c\},$$

其中 $c > 0$ 是常数, $r \geq 1$ 为正整数, 参数 $p_1, \dots, p_r > 1$ 为实数. 由 Liu 和 Tang 的结果可知: Ω^* 在原点的迷向子群为

$$G^* = \{f : f(w_1, \dots, w_r) = (w_1, \dots, w_r) U^* Q^*\},$$

其中

$$U^* = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{-1}\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\sqrt{-1}\theta_r} \end{pmatrix},$$

$\theta_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, r$ 和 $Q^* \in \langle P_{i,j}^* : p_i = p_j \rangle$, $P_{i,j}^*$ 是由 r 阶单位方阵的第 i 列和第 j 列互换得到的初等矩阵.

我们再引入 $\mathbb{C}^m$ 中的 Egg 域 $\widehat{\Omega}$,

$$\widehat{\Omega} = \{w = (w_{(1)}, \dots, w_{(r)}) \in \mathbb{C}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{m_r} : \|w_{(1)}\|^{2p_1} + \dots + \|w_{(r)}\|^{2p_r} < c\}, \quad (2.1)$$

其中 $c > 0$ 为常数, $r \geq 1$ 为正整数, 参数 $p_1, \dots, p_r > 1$ 为实数, 且 $w_{(j)} = (w_{j1}, \dots, w_{jm_j}) \in \mathbb{C}^{m_j}$, $j = 1, \dots, r$. 对于 m_j 阶酉方阵 U_{m_j} , 有

$$\|w_{(j)}U_{m_j}\| = \|w_{(j)}\|.$$

对于 $m_j = m_k$, $p_j = p_k$, 有

$$\begin{aligned} & (w_{(1)}, \dots, w_{(j-1)}, w_{(j)}, w_{(j+1)}, \dots, w_{(k-1)}, w_{(k)}, w_{(k+1)}, \dots, w_{(r)}, z) \begin{pmatrix} Q_{j,k,l} & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\ &= (w_{(1)}, \dots, w_{(j-1)}, w_{(k)}, w_{(j+1)}, \dots, w_{(k-1)}, w_{(j)}, w_{(k+1)}, \dots, w_{(r)}, z). \end{aligned}$$

因此根据 Ω^* 的极点处的迷向子群 G^* 以及 U 和 Q 的定义, 易得 $\hat{\Omega}$ 在极点处的迷向子群为

$$\hat{G} = \{f : f(w_1, \dots, w_r) = (w_1, \dots, w_r)UQ\},$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} U_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_{m_r} \end{pmatrix}$$

且 $Q \in S = \langle Q_{j,k,l} : m_j = m_k, p_j = p_k, 1 \leq j < k \leq r \rangle$.

对于 $\mathbb{C}^{m+n}$ 中的 Bergman-Hartogs 型域 Ω , 如果 Ω 中的点 (w, z) 的分量 $z = 0$, 那么得到的 Ω 的子集与 $\hat{\Omega}$ 是相同的. 从而得命题结论. $\square$

为了研究如 (1.1) 所示的 Bergman-Hartogs 域 Ω 的边界的拟凸性, 我们将 Ω 的边界分成不相交的两部分. 设 Ω 的边界为 $b\Omega$ 并记 $\rho(w, z) = \|w_{(1)}\|^{2p_1} + \dots + \|w_{(r)}\|^{2p_r} - K_D(z, z)^{-q}$, 则

$$\begin{aligned} b\Omega &= \{(w, z) \in \mathbb{C}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{m_r} \times \overline{D} : \rho(w, z) = 0, z \in \overline{D}\} \\ &= \{(w, z) \in \mathbb{C}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{m_r} \times \overline{D} : \rho(w, z) = 0, w = 0, z \in \overline{D}\} \\ &\quad \cup \{(w, z) \in \mathbb{C}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{m_r} \times \overline{D} : \rho(w, z) = 0, w \neq 0, z \in \overline{D}\} \\ &= \{(w, z) : w \in \mathbb{C}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{m_r}, w = 0, z \in bD\} \\ &\quad \cup \{(w, z) : w \in \mathbb{C}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{m_r}, \rho(w, z) = 0, w \neq 0, z \in D\}, \end{aligned}$$

其中, $\overline{D}$ 表示 D 的闭包, bD 表示 D 的边界. 分别记

$$\begin{aligned} b_0\Omega &= \{(w, z) : 0 = w \in \mathbb{C}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{m_r}, z \in bD\} = \{0\} \times bD, \\ b_1\Omega &= \{(w, z) \in \mathbb{C}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{m_r} \times D : \rho(w, z) = 0, w \neq 0\}. \end{aligned}$$

即得

$$b\Omega = b_0\Omega \cup b_1\Omega.$$

命题 5 设 Ω 为 (1.1) 式所示的 Bergman-Hartogs 型域, 若 $r = 1$, 则 $b_1\Omega$ 上的点都是强拟凸边界点.

证明 令 $\rho(w, z) = \|w_{(1)}\|^{2p_1} - K_D(z, z)^{-q}$. 对于 $(w_0, z_0) \in b_1\Omega$, 有 $z_0 \in D$ 且 $w_0 = w_{(1)0} \neq 0$. 记 $V(z_0) \in D$ 是 z_0 在 D 上的邻域, 且 $\Delta(w_{(1)0})$ 是 $w_{(1)0}$ 在 $\mathbb{C}^{m_1}$ 中的邻域. 则 (w_0, z_0) 点的邻域 $U(w_0, z_0) = V(z_0) \times \Delta(w_{(1)0})$ 满足

(1) $U(w_0, z_0) \cap \Omega = \{(w, z) \in U(w_0, z_0) : \rho(w, z) < 0\}$;

(2) 对于 $\forall (w, z) \in U(w_0, z_0)$, 有 $d\rho(w, z) \neq 0$.

由此可知 $\rho(w, z)$ 是 Ω 在 (w_0, z_0) 点的局部定义函数. 要证明 $(w_0, z_0) \in b_1\Omega$ 点为强拟凸边界点, 需要我们计算 ρ 在 (w_0, z_0) 点处的 Levi 形式.

对于 $\forall (w_0, z_0) \in b_1\Omega$, 有 $z_0 \in D$, 则存在有界对称域 D 上的全纯自同构变换 $\tau_{z_0} \in \text{Aut}(D)$, 使得 $\tau_{z_0}(z) = z^*$ 和 $\tau_{z_0}(z_0) = 0$. 于是, 由 G_1 的定义 (1.2) 式可知, 存在 Ω 上的可以延拓到边界的全纯自同构变换

$$F \in G_1 : F(w, z) = (w^*, z^*),$$

其中 $z^* = \tau_{z_0}(z)$, 使得 $F(w_0, z_0) = (w_0^*, 0) \in b_1\Omega$. 再根据 $\rho(w, z)$ 的 Hessian 矩阵 $H(w, z)$ 在映射 $F \in G_1$ 下的变换公式可得

$$H(w_0, z_0) = J_F(w, z)|_{(w_0, z_0)} H(w_0^*, 0) \overline{J_F(w, z)}|_{(w_0, z_0)},$$

因此若要验证 ρ 在 $(w_0, z_0) \in b_1\Omega$ 处的 Levi 形式, 只需验证 ρ 在 $(w_0^*, 0) \in b_1\Omega$ 点的 Levi 形式.

注意到,

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_{1k} \partial \bar{w}_{1k}} = p_1(p_1 - 1) \|w_{(1)}\|^{2(p_1-2)} |w_{1k}|^2 + p_1 \|w_{(1)}\|^{2(p_1-1)},$$

其中 $k = 1, \dots, m_1$.

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_{1k} \partial \bar{w}_{1l}} = p_1(p_1 - 1) \|w_{(1)}\|^{2(p_1-2)} w_{1k} \bar{w}_{1l},$$

其中 $k, l = 1, \dots, m_1$. 有界对称域 D 的 Bergman 核函数 $K_D(z, z)$ 满足 $K(z, 0) = K(0, 0)$. 因而有

$$\left. \frac{\partial K_D(z, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial K_D(z, 0)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0.$$

又因为 D 上的 Bergman 度量矩阵为

$$T(z) = \left(\frac{\partial^2 \log K_D(z, z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right)_{1 \leq j, k \leq n}, \quad z \in D,$$

所以综合以上内容, 我们得 ρ 在 $(w_0^*, 0)$ 处的 Hessian 矩阵 $H(w_0^*, 0)$ 为

$$H(w_0^*, 0) = \begin{pmatrix} M|_{w=w_0^*} & 0 \\ 0 & c_1 T(0) \end{pmatrix},$$

其中 $M = p_1 \|w_{(1)}\|^{2(p_1-1)} \left(\frac{(p_1-1)}{\|w_{(1)}\|^2} w_{(1)}^t \bar{w}_{(1)} + I_{m_1} \right)$ 和 $c_1 = \frac{q}{K_D(0,0)^q}$. 由于

$$\begin{aligned} \det M|_{w=w_0^*} &= (p_1 \|w_{(1)0}^*\|^{2(p_1-1)})^{m_1} \left(1 + \frac{(p_1-1)}{\|w_{(1)0}^*\|^2} \|w_{(1)0}^*\|^2 \right) \\ &= p_1^{m_1+1} \|w_{(1)0}^*\|^{2(p_1-1)m_1} > 0, \end{aligned}$$

$q > 0$, $T(0) > 0$ 和 $K_D(0, 0) > 0$, 显然, $H(w_0^*, 0) > 0$.

由 $H(w_0^*, 0) > 0$ 立即可得

$$H(w_0, z_0) > 0, \quad (w_0, z_0) \in b_1\Omega.$$

证明完毕. □

现在我们给出定理证明中要用到的一个引理.

引理 1 设 Ω 为 (1.1) 所示的 Bergman-Hartogs 型域, 记 Ω 的子集 $\{(w, z) \in \Omega : w = 0\} := \{0\} \times D$. 当 $r = 1$ 时, 若 $F \in \text{Aut}(\Omega)$, 则 F 将 $\{0\} \times D$ 映射到 $\{0\} \times D$, 即对于 $\forall (0, z) \in \{0\} \times D \subset \Omega$, 有 $F(0, z) = (0, z^*) \in \{0\} \times D$.

证明 设 $F \in \text{Aut}(\Omega)$, 令 $\{(0, z^j)\}_{j=1}^\infty$ 是 $\{0\} \times D$ 上任意一列收敛到边界 $b_0\Omega = \{0\} \times bD$ 上点的点列, 其中 $z^j \in D$. 则我们断定 $\{F(0, z^j)\}_{j=1}^\infty$ 的收敛子列也收敛到边界 $b_0\Omega = \{0\} \times bD$ 上的点.

事实上, 由于 D 是有界对称域, 因而存在 $\tau \in \text{Aut}(D)$, 使得 $\tau(z^j) = 0$, 于是由命题 1 可知, 存在 $\Psi_j \in G_1$, 使得

$$\Psi_j(0, 0) = (0, z^j), \quad j = 1, \dots, \infty.$$

故 $\{F(0, z^j)\}_{j=1}^\infty$ 可以被看作是一个全纯自同构轨道 $\{(F \circ \Psi_j)(0, 0)\}_{j=1}^\infty$. 如果 $\{F(0, z^j)\}_{j=1}^\infty$ 有一收敛到边界 $b_1\Omega$ 的子列, 不妨设这个子列收敛到点 $p \in b_1\Omega$, 那么由命题 5 可知, 点 p 是强拟凸点. 应用 Wong-Rosay 定理 [8, 9]: 对于 $\mathbb{C}^N$ 中的有界域 $\mathcal{D}$, p 是 Ω 的强拟凸边界点. 若存在一列全纯自同构变换 $F_k \in \text{Aut}(\Omega)$ 和 Ω 的内点 a , 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(a) = p,$$

则 $\mathcal{D}$ 全纯等价于 $\mathbb{C}^N$ 中的单位球 B_N . 由此可知, Bergman-Hartogs 域 Ω 一定全纯等价于 $\mathbb{C}^{m+n}$ 中的单位球 B_n . 而这与 Ω 的定义 (1.1) 矛盾. 因此, $\{F(0, z^j)\}_{j=1}^\infty$ 的收敛子列也一定收敛到边界 $b_0\Omega = \{0\} \times bD$ 上的点. 故对于 Ω 上所有收敛到边界 $b_0\Omega$ 的点列 $\{(0, z^j)\}_{j=1}^\infty$, 有 $\{F(0, z^j)\}_{j=1}^\infty$ 的收敛子列也收敛到边界 $b_0\Omega$ 上.

设 $F \in \text{Aut}(\Omega) : (w, z) \rightarrow (w^*, z^*)$. 记 $F(w, z) = (f_{11}(w, z), \dots, f_{1m_1}(w, z), g_1(w, z), \dots, g_n(w, z))$. 则

$$F(0, z) = (f_{11}(0, z), \dots, f_{1m_1}(0, z), g_1(0, z), \dots, g_n(0, z)), \quad (0, z) \in \{0\} \times D.$$

定义

$$h : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(z) = f_{11}(0, z), \quad z \in D.$$

对于 $\forall z^* \in bD$, 有 $\lim_{j \rightarrow \infty} z^j = z^*$. 于是根据前面我们的断言可知, 对于收敛子列 $\{F(0, z^{jk})\}_{j,k=1}^\infty \subset \{F(0, z^j)\}_{j=1}^\infty \subset D$, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(z^{jk}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{11}(0, z^{jk}) = 0.$$

故 h 可以连续延拓到 D 的边界 bD . 再由 z^* 任意性可知,

$$h(z^*) = 0, \quad \forall z^* \in bD.$$

从而由最大模原理可知 $h(z) = f_{11}(0, z) \equiv 0, z \in D$. 同理可得, $f_{12}(0, z) = \dots = f_{1m_1}(0, z) \equiv 0, z \in D$. 此即

$$F(0, z) = (0, g(0, z)) = (0, z^*) \in \{0\} \times D, \quad (0, z) \in \{0\} \times D.$$

3 定理证明

现在我们要证明本文的主要定理.

证明 由命题 1–3 即知

$$G_1 G_2 G_3 \subseteq \text{Aut}(\Omega).$$

因而, 我们只需证 $\text{Aut}(\Omega) \subseteq G_1 G_2 G_3$.

首先, 对于 $F \in \text{Aut}(\Omega)$ 为 Bergman-Hartogs 型域 Ω 的任意一个全纯变换, 对于定理 1, 由引理 1 可知

$$F(0, 0) = (0, z_0), \quad (0, z_0) \in \{0\} \times D. \quad (3.1)$$

对于定理 2, 由条件 (1.5) 也可得 (3.1) 式. 选取映射

$$\Psi \in G_1 : \Psi(w, z) = (w_{(1)} \det J_{\tau_{z_0}}(z)^{\frac{q}{p_1}}, \dots, w_{(r)} \det J_{\tau_{z_0}}(z)^{\frac{q}{p_r}}, \tau_{z_0}(z)), \quad (w, z) \in \Omega,$$

其中 $\tau_{z_0}(z_0) = 0$, 使得

$$\Psi(0, z_0) = (0, 0).$$

因此,

$$(\Psi \circ F) \in \text{Aut}(\Omega) \quad (3.2)$$

且满足

$$(\Psi \circ F)(0, 0) = (0, 0).$$

其次, 根据以上证明, 对于 $\forall F \in \text{Aut}(\Omega)$, 不妨设 $F(0, 0) = (0, 0)$, 记

$$F(w, z) = (w^*, z^*), \quad (w, z) \in \Omega, \quad (3.3)$$

其中

$$w^* = f(w, z) = (f_{(1)}(w, z), \dots, f_{(r)}(w, z)), \quad z^* = g(w, z).$$

下面我们证明 $g(0, z) \in \text{Aut}(D)$.

对于定理 1, 应用引理 1 可知

$$F(0, z) = (f_{(1)}(0, z), \dots, f_{(r)}(0, z), g(0, z)) = (0, z^*), \quad (0, z) \in \{0\} \times D \quad (3.4)$$

(对于定理 2, 由条件 (1.5) 可得 (3.4) 式), 即

$$w^* = (f_{(1)}(0, z), \dots, f_{(r)}(0, z)) = 0, \quad z^* = g(0, z).$$

由此可知 $g(0, z)$ 是由 D 到 D 的映射. 对于任意的 $z \in D$, $\tilde{z} \in D$, 且 $z \neq \tilde{z}$, 则有 $(0, z), (0, \tilde{z}) \in \Omega$, 且 $(0, z) \neq (0, \tilde{z})$. 而 F 是 Ω 到 Ω 的全纯一一映射, 故 $F(0, z) \neq F(0, \tilde{z})$, 即 $(0, z^*) \neq (0, \tilde{z}^*)$. 从而

$$g(0, z) = z^* \neq \tilde{z}^* = g(0, \tilde{z}).$$

因此 $g(0, z)$ 是单射. 对于 $\forall z^* \in D$, 有 $(0, z^*) \in \Omega$, 则存在 $(0, z) \in \Omega$, 使得

$$F^{-1}(0, z^*) = (0, z).$$

即存在 $(0, z) \in \Omega$, 使得

$$F(0, z) = (0, z^*).$$

从而存在 $z \in D$, 使得

$$g(0, z) = z^*.$$

因此 $g(0, z)$ 是满射. 显然 $g(0, z)$ 是全纯的. 于是我们得到 $g(0, z) \in \text{Aut}(D)$.

所以存在 $\tau_0 \in \text{Aut}(D)$, 有

$$g(0, z) = \tau_0(z), \quad \text{且 } \tau_0(0) = 0.$$

在 G_1 中选取映射

$$\Psi_1 \in G_1 : \Psi_1(w, z) = (w_{(1)} \det J_{\tau_0}(z)^{\frac{q}{p_1}}, \dots, w_{(r)} \det J_{\tau_0}(z)^{\frac{q}{p_r}}, \tau_0(z)), \quad (w, z) \in \Omega. \quad (3.5)$$

显然 $\Psi_1(0, z) = (0, \tau_0(z))$, $(0, z) \in \Omega$.

由 $F(0, 0) = (0, 0)$ 且 $\Psi_1(0, 0) = (0, 0)$, 故

$$\Psi_1^{-1} \circ F(0, 0) = (0, 0).$$

又由于 Ω 是有界圆型域, 对此应用 Cartan 定理可知, $\Psi_1^{-1} \circ F$ 是线性映射. 因此 $\Psi_1^{-1} \circ F$ 的形式为

$$(\Psi_1^{-1} \circ F)(w, z) = (w, z) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

其中 A, B, C 和 D 分别为分块矩阵. 联合 (3.3) 和 (3.5) 可知 $\Psi_1^{-1} \circ F$ 满足

$$(\Psi_1^{-1} \circ F)(0, z) = (0, z), \quad (0, z) \in \Omega.$$

将上式代入 (3.6) 可得

$$C = 0, \quad D = I_n,$$

I_n 为 n 阶单位方阵. 即 (3.6) 化为

$$(\Psi_1^{-1} \circ F)(w, z) = (w, z) \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

我们易证 (3.3) 中 F 的分量 f 满足

$$f(w, 0) \in \text{Aut}(\hat{\Omega}) : w \rightarrow wA,$$

其中 $\hat{\Omega}$ 为 (2.1) 式所给的 Egg 域. 再由命题 4 易得存在映射

$$\Psi_2 \in G_2 : (w, z) \rightarrow (w, z) \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \Psi_3 \in G_3 : (w, z) \rightarrow (w, z) \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

使得 $A = UQ$, 即

$$\Psi_2 \Psi_3 \in G_2 G_3 : (w, z) \rightarrow (w, z) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = (w, z) \begin{pmatrix} UQ & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

其中

$$Q \in S, U = \begin{pmatrix} U_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_{m_r} \end{pmatrix},$$

$U_{m_1}, \dots, U_{m_r}$ 分别是 $m_1, \dots, m_r$ 阶酉方阵. 于是对

$$\Psi_3^{-1}, \Psi_2^{-1} \text{ 和 } \Psi_1^{-1} \circ F$$

作复合运算可得

$$(\Psi_3^{-1} \circ \Psi_2^{-1} \circ \Psi_1^{-1} \circ F)(w, z) = (w, z) \begin{pmatrix} I_m & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

若 $B \neq 0$, 则对映射 $\Psi_3^{-1} \circ \Psi_2^{-1} \circ \Psi_1^{-1} \circ F$ 连续作 k 次复合运算后为

$$(\Psi_3^{-1} \circ \Psi_2^{-1} \circ \Psi_1^{-1} \circ F)^k(w, z) = (w, z) \begin{pmatrix} I_m & kB \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

而这与有界域在原点的迷向子群是紧的相矛盾, 所以 $B = 0$. 因而 (3.7) 式为

$$\Psi_3^{-1} \circ \Psi_2^{-1} \circ \Psi_1^{-1} \circ F = \text{Id}.$$

即

$$F = \Psi_1 \circ \Psi_2 \circ \Psi_3 \in G_1 G_2 G_3.$$

最后, 由以上结论我们得到, 对于 $\forall F \in \text{Aut}(\Omega)$, 有 $F \in G_1 G_2 G_3$, 即 $\text{Aut}(\Omega) \subseteq G_1 G_2 G_3$. $\square$

文献 [4, 5, 10] 研究的有界域都是 (1.1) 式给出的 Bergman-Hartogs 型域的特殊情况, 应用我们的结果定理 1 可以得到文献 [4, 5, 10] 中域的全纯自同构群.

致谢 衷心地感谢审稿人对本文提出宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 华罗庚. 多复变数函数论中的典型域的调和分析. 北京: 科学出版社, 1958
- 2 Xu Y C. Automorphism group of exceptional symmetric domains R_V . Sci China Ser A, 2000, 43: 347–356
- 3 Xu Y C. Automorphism group of exceptional symmetric domains R_{VI} . Sci China Ser A, 2000, 43: 1035–1045
- 4 Ahn H, Byun J, Park J D. Automorphisms of the Hartogs type domains over classical symmetric domains. Int J Math, 2012, 23: 1250098-1-11
- 5 殷慰萍, 王安, 赵振刚, 等. 华罗庚域的 Bergman 核函数. 中国科学 A 辑, 2001, 31: 503–516
- 6 Xu Y C, Chen M R, Ma S Y. Explicit formula of holomorphic automorphism group on complex homogeneous bounded domains. Sci China Ser A, 2006, 49: 1392–1404
- 7 Wang A, Liu Y L. Zeros of the Bergman kernels on some new Hartogs domains. Chin Quart J Math, 2011, 26: 325–334
- 8 Rosay J P. Sur une caract é risation de la boule parmi les domaines de $\mathbb{C}^n$ par son groupe d' automorphismes. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1979, 29: 91–97
- 9 Wong B. Characterization of the unit ball in $\mathbb{C}^n$ by its automorphism group. Invent Math, 1977, 41: 253–257
- 10 殷慰萍. 第一类超 Cartan 域的 Bergman 核函数. 中国科学 A 辑, 1999, 29: 607–615

The holomorphic automorphism group of the domains of the Bergman-Hartogs type

PAN LiShuang & WANG An

Abstract We consider the domain Ω of the Bergman-Hartogs type which bases on any bounded symmetric domain D ,

$$\Omega = \{(w_{(1)}, \dots, w_{(r)}, z) \in \mathbb{C}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{m_r} \times D : \|w_{(1)}\|^{2p_1} + \dots + \|w_{(r)}\|^{2p_r} < K_D(z, z)^{-q}\},$$

where $K_D(z, z)$ denotes the Bergman kernel on D , r is a positive integer, $p_1, \dots, p_r > 1$ and $q > 0$ are real parameters. We give the holomorphic automorphism group of Ω , and prove that the given holomorphic automorphism group is the full holomorphic automorphism group of Ω for $r = 1$. In addition, when $r > 1$, if the holomorphic automorphism mapping F on Ω maps $(0, z) \in \{0\} \times D$ to $(0, z^*) \in \{0\} \times D$, then F belongs to the given holomorphic automorphism group.

Keywords domain of the Bergman-Hartogs type, holomorphic automorphism group, bounded symmetric domain

MSC(2010) 32A07, 32M05

doi: 10.1360/N012014-00005