论 文

多径条件下的乘性阵列误差有源校正算法

王鼎*, 吴瑛

解放军信息工程大学信息工程学院, 郑州 450002

* 通信作者. E-mail: wang_ding814@aliyun.com

收稿日期: 2014-05-27; 接受日期: 2014-12-02; 网络出版日期: 2015-01-21

国家自然科学基金 (批准号: 61201381) 和信息工程学院未来发展基金 (批准号: YP12JJ202057) 资助项目

摘要 针对有源校正中的多径传播问题, 该文提出了校正源多径条件下的乘性阵列误差 (包括幅相误差或互耦效应) 校正算法. 文中采用单个远场连续波校正源, 通过旋转阵列天线在多个校正方位上获得校正数据, 基于此依据最大似然准则建立关于乘性阵列误差参数、校正源多径传播方位以及多径衰减系数的优化模型. 针对该优化模型, 文中设计相应的“嵌入式”Newton 型迭代算法用以实现全部未知参量的数值优化. 此外, 文中还推导出关于全部未知参量的克拉美罗界的闭式表达式. 仿真实验验证文中校正算法的渐近有效性, 即其渐近性能在大样本条件下可逼近相应的克拉美罗界.

关键词 阵列误差校正 有源校正 幅相误差 互耦 多径传播 最大似然估计器 克拉美罗界

1 引言

众所周知, 基于特征空间技术 (或称子空间技术) 和最大似然准则的超分辨率波达方向 (direction of arrival, DOA) 估计算法受阵列误差 (或称模型误差) 的影响较大^[1~3], 因此阵列误差校正是提高超分辨率算法实际性能的重要环节之一. 一般而言, 阵列误差校正方法可分为两大类: 第一类是自校正方法^[4~8], 即依据某种优化准则将信源方位和阵列误差参数进行联合估计或联合优化, 该方法可在估计信源方位的同时完成阵列误差参数的在线估计; 第二类是有源校正方法^[9~16], 即利用方位已知的校正源对阵列误差参数进行离线估计. 两类校正方法 (或称体制) 各有自身优缺点, 本文主要研究后者. 事实上, 关于阵列误差有源校正方法的文献报道已有很多, 根据校正源放置方式的不同可将校正方法分为两大类: 第一类是将校正源同时放置^[9~13]; 第二类是分时放置校正源^[14~16], 其中前者通常应用于仅存在单一误差形式的校正问题^[9~13], 而后者更多的应用于多种误差形式同时存在情况下的校正问题^[14~16]. 然而, 无论是上述哪类校正方法, 它们都很少考虑校正源的多径传播问题, 事实上, 信源的多径传播在实际校正过程中难以避免, 此时若利用子空间类方法^[9~16]进行误差校正, 实际中的多径效应会使得校正算法完全失效.

值得一提的是, 关于多径信源条件下的阵列误差自校正算法已有若干文献报道, 例如, 文献^[17~19]提出多径信源条件下的互耦自校正算法, 文献^[20]提出多径信源条件下的通道幅相误差自校正算法, 尽管这些方法均可直接作为有源校正方法使用, 但是都对阵列误差的数学模型和阵列流形结构有严格要求 (主要应用于均匀线阵). 文献^[21]首次研究多径信源条件下的阵列误差有源校正方法, 与其

引用格式: 王鼎, 吴瑛. 多径条件下的乘性阵列误差有源校正算法. 中国科学: 信息科学, 2015, 45: 270–288, doi: 10.1360/N112013-00060

他方法不同的是, 该方法需要将阵列天线安放在高精度的旋转平台上, 并通过旋转阵列天线获得不同方位的接收数据, 由于旋转运动的相对性, 阵列天线的旋转过程与校正信号源相对于阵列天线的反向旋转过程对各阵元所接收信号的相对相位关系的影响是完全等效的, 因此该方法仅需要放置单个远场校正源 (连续波) 即可. 另一方面, 由于校正源与周围反射物体的位置始终固定不变, 所以旋转阵列天线并不会引入新的未知参量, 这也是该方法能够在多径传播条件下进行误差校正的基本思想所在. 需要指出的是, 文献 [21] 中的方法并不是针对特定的阵列误差进行校正, 而是估计阵列天线在整个空域内的流形响应, 因此它需要阵列天线在整个空域范围内根据一定方位步长进行旋转, 从而带来庞大的工作量. 显然, 若针对特定的阵列误差进行校正, 则其未知参量的自由度必然会大大降低, 需要旋转阵列天线的次数也会大大减少. 为此, 本文依据文献 [21] 中的基本思路, 提出多径条件下针对乘性阵列误差参数 (主要包括幅相误差或互耦效应) 的有源校正方法, 并推导出阵列误差参数的克拉美罗界 (Cramér-Rao Bound, CRB), 由于文中的校正方法是基于最大似然准则提出的, 因此其参数估计性能可渐近逼近相应的 CRB.

在给出正文前, 这里首先约定若干符号: (1) $\otimes$ 和 $\circ$ 分别表示矩阵 Kronecker 积和 Column-wise Kronecker 积 [7]; (2) $\bullet$ 表示矩阵 Hadamard 积 (即对应元素相乘); (3) $\text{vecd}[\cdot]$ 表示提取矩阵对角元素构成列向量; (4) $\text{diag}[\cdot]$ 表示由向量元素构成对角矩阵; (5) $\text{trace}[\cdot]$ 表示矩阵的迹; (6) $[\cdot]^\dagger$ 表示矩阵的 Moore-Penrose 逆; (7) $\langle \mathbf{X} \rangle_{nm}$ 表示矩阵 $\mathbf{X}$ 的第 n 行、第 m 列元素, $\langle \mathbf{x} \rangle_n$ 表示向量 $\mathbf{x}$ 的第 n 个元素.

2 阵列信号模型与问题描述

2.1 阵列接收信号模型

假设单个窄带校正信号源 (连续波) 位于同平面内某个 L 元阵列的远场区, 其中心频率为 f_0 . 与文献 [21~23] 类似的是, 该阵列也安放在高精度的旋转平台上, 并且在旋转装置的精确控制下, 该阵列可在若干不同的方位上接收校正源信号. 由于旋转运动的相对性, 阵列天线的旋转过程与信号源相对于阵列天线的反向旋转过程对各阵元所接收信号的相对相位关系的影响是完全等效的, 为了方便起见, 这里不妨令旋转轴所在位置为相位参考点 (或称相位零点). 另一方面, 这里还假设阵列周围存在若干固定的反射物体 (如图 1 所示), 因此阵列接收到的信号除了包括校正信号源发射的直达波外, 还包括周围物体的反射波 (假设共有 N 条反射波), 若令阵列天线在初始状态 (即旋转前) 时, 校正源发射的直达波的方位为 θ_0 (已知), 第 n 个反射波的方位为 θ_n (未知), 此时阵列接收信号可表示为

$$\mathbf{x}^{(0)}[t] = \mathbf{b}[\theta_0] \cdot s_0[t] + \sum_{n=1}^N \mathbf{b}[\theta_n] \cdot s_n[t] + \mathbf{n}^{(0)}[t] = \mathbf{b}[\theta_0] \cdot s_0[t] + \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \mathbf{b}[\theta_n] \cdot s_0[t] + \mathbf{n}^{(0)}[t], \quad (1)$$

式中 $s_0[t]$ 表示校正信号源发射的直达波到达相位零点位置的复包络, $s_n[t] = \alpha_n \cdot s_0[t]$ 为校正信号源的第 n 条反射波到达相位零点位置的复包络, 其中 α_n 表示复衰减系数 (未知), $\mathbf{n}^{(0)}[t]$ 为阵元加性复圆高斯白噪声向量, 并且各阵元的噪声功率相等. 此外, $\mathbf{b}[\theta] = \mathbf{M} \cdot \mathbf{a}[\theta]$ 表示存在阵列误差条件下的导引向量, 其中 $\mathbf{a}[\theta]$ 为理想条件下的导引向量, $\mathbf{M}$ 表示阵列误差矩阵 (由乘性阵列误差参数构成), 若考虑幅相误差校正, 则可令 $\mathbf{M} = \mathbf{\Gamma} = \text{diag}[\boldsymbol{\tau}]$ 为阵元幅相误差矩阵, 其中 $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2 \ \cdots \ \tau_L]^\text{T}$ 中的元素表示各阵元的幅相应; 若考虑互耦校正, 则可令 $\mathbf{M} = \mathbf{C}$ 为互耦矩阵, 并记 $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_K]^\text{T}$ (其中 K 表示向量 $\mathbf{c}$ 的维数) 表示 $\mathbf{C}$ 中的全部独立参量构成的列向量, 于是互耦矩阵 $\mathbf{C}$ 的估计问题可转化为互耦向量 $\mathbf{c}$ 的估计问题, 并记 $\mathbf{C} = \mathbf{Z}^{-1}[\mathbf{c}]$, 其中 $\mathbf{Z}^{-1}[\cdot]$ 表示将向量转化为互耦矩阵的向量函数.

图 1 可旋转阵列和校正源多径传播示意图

Figure 1 Rotatable antenna array and multipath propagation of calibration source (modified from Figure 1 in [21])

下面考虑阵列经旋转后的接收信号模型, 假设阵列经第 m 次旋转后, 相对于初始状态的旋转角度为 $\beta^{(m)}$ (已知), 由于校正源的方位固定不变, 此时校正信号源发射的直达波相对于阵列天线的方位为 $\phi_0^{(m)} = \theta_0 + \beta^{(m)}$, 校正信号源的第 n 条反射波相对于阵列天线的方位为 $\phi_n^{(m)} = \theta_n + \beta^{(m)}$, 由于阵列旋转轴的位置不会改变, 周围物体的位置也不会变化, 因此无论是直达波还是反射波到达相位零点位置的复包络也不会改变, 于是阵列接收信号可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(m)}[t] &= \mathbf{b}[\phi_0^{(m)}] \cdot s_0[t] + \sum_{n=1}^N \mathbf{b}[\phi_n^{(m)}] \cdot s_n[t] + \mathbf{n}^{(m)}[t] \\ &= \mathbf{b}[\phi_0^{(m)}] \cdot s_0[t] + \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \mathbf{b}[\phi_n^{(m)}] \cdot s_0[t] + \mathbf{n}^{(m)}[t] \quad (m = 1, 2, \dots, D), \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{n}^{(m)}[t]$ 表示加性复圆高斯白噪声向量, D 表示阵列旋转次数.

2.2 校正问题阐述

在讨论完阵列接收信号模型和阵列误差模型后, 下面的主要问题在于如何在校正源多径传播条件下精确估计阵列误差参数. 需要指出的是, 由于校正信号源 $s_0[t]$ 是人为设置, 因此它可以是先验已知的^[13](或仅差一个复常数因子, 该复常数因子与阵列误差矩阵参数相互“耦合”, 因此不妨直接令其为 1). 综上所述, 在整个参数估计系统中全部的已知参量包括 θ_0 , $\{\beta^{(m)}\}_{m=1}^D$ 和 $s_0[t]$, 而未知参量包括 $\{\theta_n\}_{n=1}^N$, $\{\alpha_n\}_{n=1}^N$ 和乘性阵列误差参数.

3 多径传播条件下的阵列误差校正算法

3.1 基于最大似然准则的目标函数的建立

为了获得未知参量的有效估计, 这里不妨选择最大似然估计器进行参数估计, 因为最大似然估计器在参数满足“正则性”要求的条件下可获得方差最小的估计值. 假设共有 P 个样本点数用于误差校

正, 并且各阵元的噪声功率统一记为 σ^2 , 不妨将阵列接收到的所有数据表示为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(0)}[t_1] & \mathbf{x}^{(0)}[t_2] & \cdots & \mathbf{x}^{(0)}[t_P] & \mathbf{x}^{(1)}[t_1] & \mathbf{x}^{(1)}[t_2] & \cdots & \mathbf{x}^{(1)}[t_P], \dots, \\ \dots & \mathbf{x}^{(D)}[t_1] & \mathbf{x}^{(D)}[t_2] & \cdots & \mathbf{x}^{(D)}[t_P] \end{bmatrix}^T. \quad (3)$$

于是可以得到关于全部未知参量的最大似然函数为

$$f_{\text{ml}}[\mathbf{x}|\sigma^2, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho}] = (\pi\sigma^2)^{-(D+1)LP} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{m=0}^D \sum_{p=1}^P \left\| \mathbf{x}^{(m)}[t_p] - \left(\mathbf{b}[\phi_0^{(m)}] + \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \mathbf{b}[\phi_n^{(m)}] \right) \cdot s_0[t_p] \right\|_2^2 \right\}, \quad (4)$$

式中 $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_N]^T$ 表示多径衰减向量, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_N]^T$ 为反射波的方向向量, 而 $\boldsymbol{\rho}$ 统一泛指阵列误差参数向量, 当考虑幅相误差校正时 $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\tau}$; 而考虑互耦校正时 $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{c}$. 相应的对数似然函数 (舍去与未知参量无关的常数项) 为

$$f_{\ln-\text{ml}}[\sigma^2, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho}] = -(D+1)LP \cdot \ln[\sigma^2] - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{m=0}^D \sum_{p=1}^P \left\| \mathbf{x}^{(m)}[t_p] - \left(\mathbf{b}[\phi_0^{(m)}] + \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \mathbf{b}[\phi_n^{(m)}] \right) \cdot s_0[t_p] \right\|_2^2, \quad (5)$$

根据式 (5) 可知噪声功率 σ^2 的最优闭式解为

$$\sigma^2 = \frac{1}{(D+1)LP} \sum_{m=0}^D \sum_{p=1}^P \left\| \mathbf{x}^{(m)}[t_p] - \left(\mathbf{b}[\phi_0^{(m)}] + \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \mathbf{b}[\phi_n^{(m)}] \right) \cdot s_0[t_p] \right\|_2^2, \quad (6)$$

再将式 (6) 代入式 (5) 可得

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho}} g_{\ln-\text{ml}}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho}] = \min_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho}} \sum_{m=0}^D \sum_{p=1}^P \left\| \mathbf{x}^{(m)}[t_p] - \left(\mathbf{b}[\phi_0^{(m)}] + \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \mathbf{b}[\phi_n^{(m)}] \right) \cdot s_0[t_p] \right\|_2^2. \quad (7)$$

下面将重点考虑式 (7) 的数值优化求解, 其中将分别给出误差向量 $\boldsymbol{\rho}$ 为幅相误差向量 $\boldsymbol{\tau}$ 和互耦向量 $\mathbf{c}$ 时的校正算法.

3.2 阵列误差校正算法

本小节将重点考虑式 (7) 的数值优化算法, 由于 $g_{\ln-\text{ml}}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho}]$ 是关于向量 $\boldsymbol{\rho}$ 的二次函数, 因此 $\boldsymbol{\rho}$ 的闭式解可以直接获得, 于是不妨通过“嵌入式”优化方法^[13~17]进行数值求解, 即将 $\boldsymbol{\rho}$ 的闭式解代入 $g_{\ln-\text{ml}}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho}]$ 中, 此时便可以获得仅关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 的目标函数, 从而减少未知参量的维数, 并且“嵌入式”优化方法通常具有较快的收敛速度和稳健性^[13~17]. 另一方面, 由于幅相误差和互耦的数学模型不同, 因此相应数值算法的形式也有所区分, 下面将分别给予推导.

3.2.1 幅相误差校正算法

显然, 在本小节中 $\rho = \tau$. 首先记 $\xi^{(m)}[\alpha, \theta] = \mathbf{a}[\phi_0^{(m)}] + \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \mathbf{a}[\phi_n^{(m)}]$, 利用矩阵恒等式

$$\text{vec}[\mathbf{X}_1 \cdot \text{diag}[\mathbf{x}_2] \cdot \mathbf{X}_3] = (\mathbf{X}_3^T \circ \mathbf{X}_1) \mathbf{x}_2, \quad (8)$$

可将目标函数 $g_{\text{ln-ml}}[\alpha, \theta, \tau]$ 表示为

$$g_{\text{ln-ml}}[\alpha, \theta, \tau] = \sum_{m=0}^D \sum_{p=1}^P \left\| \mathbf{x}^{(m)}[t_p] - (s_0[t_p] \cdot \xi^{(m)T}[\alpha, \theta] \circ \mathbf{I}_L) \tau \right\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \Phi_\tau[\alpha, \theta] \cdot \tau\|_2^2, \quad (9)$$

式中

$$\Phi_\tau[\alpha, \theta] = \begin{bmatrix} s_0 \otimes (\xi^{(0)T}[\alpha, \theta] \circ \mathbf{I}_L) \\ s_0 \otimes (\xi^{(1)T}[\alpha, \theta] \circ \mathbf{I}_L) \\ \vdots \\ s_0 \otimes (\xi^{(D)T}[\alpha, \theta] \circ \mathbf{I}_L) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中 $\mathbf{s}_0 = [s_0[t_1] \ s_0[t_2] \ \cdots \ s_0[t_P]]^T$.

根据式 (9) 不难证明幅相误差向量 τ 的最优闭式解为

$$\begin{aligned} \tau_{\text{opt}} &= \Phi_\tau^\dagger[\alpha, \theta] \cdot \mathbf{x} = (\Phi_\tau^H[\alpha, \theta] \cdot \Phi_\tau[\alpha, \theta])^{-1} \cdot \Phi_\tau^H[\alpha, \theta] \cdot \mathbf{x} = \Omega_\tau[\alpha, \theta] \cdot \Phi_\tau^H[\alpha, \theta] \cdot \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{q_0} \left(\mathbf{I}_L \cdot \left(\sum_{m=0}^D \xi^{(m)*}[\alpha, \theta] \cdot \xi^{(m)T}[\alpha, \theta] \right) \right)^{-1} \left(\sum_{m=0}^D \xi^{(m)*}[\alpha, \theta] \cdot \mathbf{x}_{s_0}^{(m)} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

式中

$$\begin{cases} \Omega_\tau[\alpha, \theta] = (\Phi_\tau^H[\alpha, \theta] \cdot \Phi_\tau[\alpha, \theta])^{-1} = \frac{1}{q_0} \left(\mathbf{I}_L \cdot \left(\sum_{m=0}^D \xi^{(m)*}[\alpha, \theta] \cdot \xi^{(m)T}[\alpha, \theta] \right) \right)^{-1}, \\ \mathbf{x}_{s_0}^{(m)} = \sum_{p=1}^P s_0^*[t_p] \cdot \mathbf{x}^{(m)}[t_p], q_0 = \sum_{p=1}^P |s_0[t_p]|^2. \end{cases} \quad (12)$$

将式 (11) 代入式 (9) 中可以得到仅关于 α 和 θ 的“嵌入式”优化模型

$$\min_{\alpha, \theta} \varphi_\tau[\alpha, \theta] = \min_{\alpha, \theta} \mathbf{x}^H \cdot \Pi_{\Phi_\tau[\alpha, \theta]}^\perp \cdot \mathbf{x}, \quad (13)$$

式中

$$\begin{aligned} \Pi_{\Phi_\tau[\alpha, \theta]}^\perp &= \mathbf{I}_{(D+1)LP} - \Phi_\tau[\alpha, \theta] \cdot (\Phi_\tau^H[\alpha, \theta] \cdot \Phi_\tau[\alpha, \theta])^{-1} \cdot \Phi_\tau^H[\alpha, \theta] \\ &= \mathbf{I}_{(D+1)LP} - \Phi_\tau[\alpha, \theta] \cdot \Omega_\tau[\alpha, \theta] \cdot \Phi_\tau^H[\alpha, \theta]. \end{aligned} \quad (14)$$

显然, 式 (13) 无法直接给出 α 和 θ 的闭式解, 不妨通过交替迭代的方式进行数值优化, 即在优化向量 α 时固定 θ , 而在优化向量 θ 时固定 α , 并如此反复迭代直至收敛为止.

需要指出的是, 由于 α 和 θ 均包含在目标函数中的正交投影矩阵 $\Pi_{\Phi_\tau[\alpha, \theta]}^\perp$ 中, 此时通过 Newton 迭代进行数值优化可获得较快的收敛速度^[13~17]. 首先, 优化 θ 的 Newton 迭代公式为

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + \mu^k \cdot \text{Re}^{-1} \{ \mathbf{H}_\theta[\theta^{(k)}] \} \cdot \text{Re} \{ \mathbf{h}_\theta[\theta^{(k)}] \}, \quad (15)$$

式中 $0 < \mu < 1$ 表示步长因子 (下同), $\mathbf{h}_\theta[\theta]$ 和 $\mathbf{H}_\theta[\theta]$ 分别是相应梯度向量和 Hessian 矩阵, 其表达式分别为

$$\begin{cases} \mathbf{h}_\theta[\theta] = \text{vecd} \left[\sum_{m=0}^D \boldsymbol{\alpha} \left(\mathbf{x}_{s_0}^{(m)} - q_0 \cdot \text{diag}[\boldsymbol{\omega}_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \theta]] \cdot \boldsymbol{\xi}^{(m)}[\boldsymbol{\alpha}, \theta] \right)^H \cdot \text{diag}[\boldsymbol{\omega}_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \theta]] \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(m)}[\theta] \right], \\ \mathbf{H}_\theta[\theta] \approx (q_0 \boldsymbol{\alpha}^* \boldsymbol{\alpha}^T) \bullet \left(\sum_{m=0}^D \dot{\mathbf{A}}^{(m)H}[\theta] \cdot \text{diag}[\boldsymbol{\omega}_\tau^*[\boldsymbol{\alpha}, \theta] \bullet \boldsymbol{\omega}_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \theta]] \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(m)}[\theta] \right) \\ - (q_0^2 \boldsymbol{\alpha}^* \boldsymbol{\alpha}^T) \bullet \left(\sum_{m_1=0}^D \sum_{m_2=0}^D \left(\dot{\mathbf{A}}^{(m_1)H}[\theta] \cdot \text{diag}[\boldsymbol{\omega}_\tau^*[\boldsymbol{\alpha}, \theta] \bullet \boldsymbol{\xi}^{(m_1)}[\boldsymbol{\alpha}, \theta]] \cdot \boldsymbol{\Omega}_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \theta] \times \right. \right. \\ \left. \left. \text{diag}[\boldsymbol{\xi}^{(m_2)*}[\boldsymbol{\alpha}, \theta] \bullet \boldsymbol{\omega}_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \theta]] \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(m_2)}[\theta] \right) \right), \end{cases} \quad (16)$$

式中

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \theta] = \boldsymbol{\Phi}_\tau^\dagger[\boldsymbol{\alpha}, \theta] \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{q_0} \left(\mathbf{I}_L \bullet \left(\sum_{m=0}^D \boldsymbol{\xi}^{(m)*}[\boldsymbol{\alpha}, \theta] \cdot \boldsymbol{\xi}^{(m)T}[\boldsymbol{\alpha}, \theta] \right) \right)^{-1} \\ \left(\sum_{m=0}^D \boldsymbol{\xi}^{(m)*}[\boldsymbol{\alpha}, \theta] \bullet \mathbf{x}_{s_0}^{(m)} \right), \\ \dot{\mathbf{A}}^{(m)}[\theta] = [\dot{a}[\phi_1^{(m)}] \ \dot{a}[\phi_2^{(m)}] \ \cdots \ \dot{a}[\phi_N^{(m)}]] \quad (m = 0, 1, \dots, D). \end{cases} \quad (17)$$

式 (15) 至式 (17) 的推导见附录 A. 接着, 优化 $\boldsymbol{\alpha}$ 的 Newton 迭代公式为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \text{Re}\{\boldsymbol{\alpha}^{(k+1)}\} \\ \text{Im}\{\boldsymbol{\alpha}^{(k+1)}\} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \text{Re}\{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\} \\ \text{Im}\{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\} \end{bmatrix} - \mu^k \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{H}_\alpha[\boldsymbol{\alpha}^{(k)}]\} & -\text{Im}\{\mathbf{H}_\alpha[\boldsymbol{\alpha}^{(k)}]\} \\ \text{Im}\{\mathbf{H}_\alpha[\boldsymbol{\alpha}^{(k)}]\} & \text{Re}\{\mathbf{H}_\alpha[\boldsymbol{\alpha}^{(k)}]\} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} -\text{Re}\{\mathbf{h}_\alpha[\boldsymbol{\alpha}^{(k)}]\} \\ \text{Im}\{\mathbf{h}_\alpha[\boldsymbol{\alpha}^{(k)}]\} \end{bmatrix} \quad (\text{实数形式}) \\ \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}^{(k+1)} &= \boldsymbol{\alpha}^{(k)} + \mu^k \cdot \mathbf{H}_\alpha^{-1}[\boldsymbol{\alpha}^{(k)}] \cdot \mathbf{h}_\alpha^*[\boldsymbol{\alpha}^{(k)}] \quad \text{复数形式}, \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $\mathbf{h}_\alpha[\boldsymbol{\alpha}]$ 和 $\mathbf{H}_\alpha[\boldsymbol{\alpha}]$ 分别是相应的梯度向量和 Hessian 矩阵, 其表达式分别为

$$\begin{cases} \mathbf{h}_\alpha[\boldsymbol{\alpha}] = \text{vecd} \left[\sum_{m=0}^D \mathbf{1}_{N \times 1} \left(\mathbf{x}_{s_0}^{(m)} - q_0 \cdot \text{diag}[\boldsymbol{\omega}_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \theta]] \cdot \boldsymbol{\xi}^{(m)}[\boldsymbol{\alpha}, \theta] \right)^H \cdot \text{diag}[\boldsymbol{\omega}_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \theta]] \cdot \mathbf{A}^{(m)}[\theta] \right], \\ \mathbf{H}_\alpha[\boldsymbol{\alpha}] = q_0 \sum_{m=0}^D \mathbf{A}^{(m)H}[\theta] \cdot \text{diag}[\boldsymbol{\omega}_\tau^*[\boldsymbol{\alpha}, \theta] \bullet \boldsymbol{\omega}_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \theta]] \cdot \mathbf{A}^{(m)}[\theta] \\ - q_0^2 \sum_{m_1=0}^D \sum_{m_2=0}^D \left(\mathbf{A}^{(m_1)H}[\theta] \cdot \text{diag}[\boldsymbol{\omega}_\tau^*[\boldsymbol{\alpha}, \theta] \bullet \boldsymbol{\xi}^{(m_1)}[\boldsymbol{\alpha}, \theta]] \cdot \boldsymbol{\Omega}_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \theta] \right. \\ \left. \times \text{diag}[\boldsymbol{\xi}^{(m_2)*}[\boldsymbol{\alpha}, \theta] \bullet \boldsymbol{\omega}_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \theta]] \cdot \mathbf{A}^{(m_2)}[\theta] \right), \end{cases} \quad (19)$$

式中

$$\mathbf{A}^{(m)}[\theta] = [\mathbf{a}[\phi_1^{(m)}] \ \mathbf{a}[\phi_2^{(m)}] \ \cdots \ \mathbf{a}[\phi_N^{(m)}]] \quad (m = 0, 1, \dots, D). \quad (20)$$

式 (18) 至式 (20) 的推导见附录 B. 再获得 θ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数值解后, 将其代入式 (11) 即可获得幅相误差向量 $\boldsymbol{\tau}$ 的数值解.

若将上述过程进行总结, 则可得到如下数值算法:

步骤 1 设置 e 为很小的正数以及初始值 θ_0 和 $\boldsymbol{\alpha}_0$, 并令 $k \leftarrow 1$;

- 步骤 2 基于当前的估计值 α_{k-1} , 利用式 (15)~(17) 给出的 Newton 迭代公式计算方位向量 θ_k ;
 步骤 3 基于当前的估计值 θ_k , 利用式 (18)~(20) 给出的 Newton 迭代公式计算复衰减向量 α_k ;
 步骤 4 计算 $\varepsilon_k = \|\alpha_k - \alpha_{k-1}\|_2$, 若 $\varepsilon_k \leq \varepsilon$, 则转至步骤 5, 否则令 $k \leftarrow k + 1$, 并转至步骤 2;
 步骤 5 基于最终的估计值 θ_k 和 α_k , 利用式 (11) 计算幅相误差向量 τ .

3.2.2 互耦校正算法

显然, 在本小节中 $\rho = c$. 仍记 $\xi^{(m)}[\alpha, \theta] = a[\phi_0^{(m)}] + \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot a[\phi_n^{(m)}]$, 于是目标函数 $g_{\text{ln-ml}}[\alpha, \theta, c]$ 可表示为

$$g_{\text{ln-ml}}[\alpha, \theta, c] = \sum_{m=0}^D \sum_{p=1}^P \left\| x^{(m)}[t_p] - s_0[t_p] \cdot T[\xi^{(m)}[\alpha, \theta]] \cdot c \right\|_2^2 = \|x - \Phi_c[\alpha, \theta] \cdot c\|_2^2, \quad (21)$$

式中

$$\Phi_c[\alpha, \theta] = \begin{bmatrix} s_0 \otimes T[\xi^{(0)}[\alpha, \theta]] \\ s_0 \otimes T[\xi^{(1)}[\alpha, \theta]] \\ \vdots \\ s_0 \otimes T[\xi^{(D)}[\alpha, \theta]] \end{bmatrix}, \quad (22)$$

其中 $T[\cdot] \in C^{L \times K}$ 是关于向量的矩阵函数, 它满足

$$Ca = T[a] \cdot c \quad (\forall a \in C^{L \times 1}). \quad (23)$$

不难验证 $T[a]$ 的数值结构与互耦矩阵 C 的数值结构密切相关. 对于均匀线阵而言, 其定义方式为^[4]:

$$T_{\text{ULA}}[a] = T_{\text{ULA}}^{(1)}[a] + T_{\text{ULA}}^{(2)}[a], \quad (24)$$

式中

$$\langle T_{\text{ULA}}^{(1)}[a] \rangle_{nm} = \begin{cases} \langle a \rangle_{n+m-1}, & n+m \leq L+1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad \langle T_{\text{ULA}}^{(2)}[a] \rangle_{nm} = \begin{cases} \langle a \rangle_{n-m+1}, & n \geq m \geq 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (25)$$

对于均匀圆阵而言, 其定义方式为^[4]:

$$T_{\text{UCA}}[a] = T_{\text{UCA}}^{(1)}[a] + T_{\text{UCA}}^{(2)}[a] + T_{\text{UCA}}^{(3)}[a] + T_{\text{UCA}}^{(4)}[a], \quad (26)$$

式中

$$\begin{cases} \langle T_{\text{UCA}}^{(1)}[a] \rangle_{nm} = \begin{cases} \langle a \rangle_{n+m-1}, & n+m \leq L+1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \\ \langle T_{\text{UCA}}^{(2)}[a] \rangle_{nm} = \begin{cases} \langle a \rangle_{n-m+1}, & n \geq m \geq 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \\ \langle T_{\text{UCA}}^{(3)}[a] \rangle_{nm} = \begin{cases} \langle a \rangle_{L+1+n-m}, & n < m \leq \bar{L}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \\ \langle T_{\text{UCA}}^{(4)}[a] \rangle_{nm} = \begin{cases} \langle a \rangle_{n+m-L-1}, & 2 \leq m \leq \bar{L}; n+m \geq L+2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \end{cases} \quad (27)$$

其中 $L = \lceil L/2 \rceil$.

根据式 (21) 不难证明互耦向量 $\mathbf{c}$ 的最优闭式解为

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{\text{opt}} &= \Phi_c^\dagger[\alpha, \theta] \cdot \mathbf{x} = (\Phi_c^H[\alpha, \theta] \cdot \Phi_c[\alpha, \theta])^{-1} \cdot \Phi_c^H[\alpha, \theta] \cdot \mathbf{x} \\ &= \Omega_c[\alpha, \theta] \cdot \Phi_c^H[\alpha, \theta] \cdot \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{q_0} \left(\sum_{m=0}^D \mathbf{T}^H[\xi^{(m)}[\alpha, \theta]] \cdot \mathbf{T}[\xi^{(m)}[\alpha, \theta]] \right)^{-1} \left(\sum_{m=0}^D \mathbf{T}^H[\xi^{(m)}[\alpha, \theta]] \cdot \mathbf{x}_{s_0}^{(m)} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

式中

$$\Omega_c[\alpha, \theta] = (\Phi_c^H[\alpha, \theta] \cdot \Phi_c[\alpha, \theta])^{-1} = \frac{1}{q_0} \left(\sum_{m=0}^D \mathbf{T}^H[\xi^{(m)}[\alpha, \theta]] \cdot \mathbf{T}[\xi^{(m)}[\alpha, \theta]] \right)^{-1}. \quad (29)$$

将式 (28) 代入式 (21) 中可以得到仅关于 α 和 θ 的“嵌入式”优化模型

$$\min_{\alpha, \theta} \varphi_c[\alpha, \theta] = \min_{\alpha, \theta} \mathbf{x}^H \cdot \Pi_{\Phi_c[\alpha, \theta]}^\perp \cdot \mathbf{x}, \quad (30)$$

式中

$$\begin{aligned} \Pi_{\Phi_c[\alpha, \theta]}^\perp &= \mathbf{I}_{(D+1)LP} - \Phi_c[\alpha, \theta] \cdot (\Phi_c^H[\alpha, \theta] \cdot \Phi_c[\alpha, \theta])^{-1} \cdot \Phi_c^H[\alpha, \theta] \\ &= \mathbf{I}_{(D+1)LP} - \Phi_c[\alpha, \theta] \cdot \Omega_c[\alpha, \theta] \cdot \Phi_c^H[\alpha, \theta]. \end{aligned} \quad (31)$$

类似于式 (13), 式 (30) 也可以通过交替迭代的方式进行数值优化, 并且 θ 和 α 仍可分别通过 Newton 迭代进行数值优化.

首先, 优化 θ 的 Newton 迭代公式为

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + \mu^k \cdot \text{Re}^{-1} \left\{ \mathbf{G}_\theta[\theta^{(k)}] \right\} \cdot \text{Re} \left\{ \mathbf{g}_\theta[\theta^{(k)}] \right\}, \quad (32)$$

式中 $\mathbf{g}_\theta[\theta]$ 和 $\mathbf{G}_\theta[\theta]$ 分别是相应的梯度向量和 Hessian 矩阵, 其表达式分别为

$$\begin{cases} \mathbf{g}_\theta[\theta] = \text{vecd} \left[\sum_{m=0}^D \alpha \left(\mathbf{x}_{s_0}^{(m)} - q_0 \cdot \mathbf{Z}^{-1}[\omega_c[\alpha, \theta]] \cdot \xi^{(m)}[\alpha, \theta] \right)^H \cdot \mathbf{Z}^{-1}[\omega_c[\alpha, \theta]] \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(m)}[\theta] \right], \\ \mathbf{G}_\theta[\theta] \approx (q_0 \alpha^* \alpha^T) \cdot \left(\sum_{m=0}^D \dot{\mathbf{A}}^{(m)H}[\theta] \cdot \mathbf{Z}^{-H}[\omega_c[\alpha, \theta]] \cdot \mathbf{Z}^{-1}[\omega_c[\alpha, \theta]] \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(m)}[\theta] \right) \\ - (q_0^2 \alpha^* \alpha^T) \cdot \left(\sum_{m_1=0}^D \sum_{m_2=0}^D \left(\dot{\mathbf{A}}^{(m_1)H}[\theta] \cdot \mathbf{Z}^{-H}[\omega_c[\alpha, \theta]] \cdot \mathbf{T}[\xi^{(m_1)}[\alpha, \theta]] \cdot \Omega_c[\alpha, \theta] \right) \right. \\ \left. \times \mathbf{T}^H[\xi^{(m_2)}[\alpha, \theta]] \cdot \mathbf{Z}^{-1}[\omega_c[\alpha, \theta]] \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(m_2)}[\theta] \right) \end{cases}, \quad (33)$$

式中

$$\omega_c[\alpha, \theta] = \Phi_c^\dagger[\alpha, \theta] \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{q_0} \left(\sum_{m=0}^D \mathbf{T}^H[\xi^{(m)}[\alpha, \theta]] \cdot \mathbf{T}[\xi^{(m)}[\alpha, \theta]] \right)^{-1} \left(\sum_{m=0}^D \mathbf{T}^H[\xi^{(m)}[\alpha, \theta]] \cdot \mathbf{x}_{s_0}^{(m)} \right). \quad (34)$$

式 (32) 至式 (34) 的推导类似于附录 A, 限于篇幅这里不再阐述. 接着, 优化 α 的 Newton 迭代公式为

$$\begin{bmatrix} \text{Re} \{ \alpha^{(k+1)} \} \\ \text{Im} \{ \alpha^{(k+1)} \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re} \{ \alpha^{(k)} \} \\ \text{Im} \{ \alpha^{(k)} \} \end{bmatrix} - \mu^k \begin{bmatrix} \text{Re} \{ \mathbf{G}_\alpha[\alpha^{(k)}] \} & -\text{Im} \{ \mathbf{G}_\alpha[\alpha^{(k)}] \} \\ \text{Im} \{ \mathbf{G}_\alpha[\alpha^{(k)}] \} & \text{Re} \{ \mathbf{G}_\alpha[\alpha^{(k)}] \} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -\text{Re}\{g_{\alpha}[\alpha^{(k)}]\} \\ \text{Im}\{g_{\alpha}[\alpha^{(k)}]\} \end{bmatrix} \quad (\text{实数形式})$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + \mu^k \cdot G_{\alpha}^{-1}[\alpha^{(k)}] \cdot g_{\alpha}^*[\alpha^{(k)}] \quad (\text{复数形式}), \quad (35)$$

式中 $g_{\alpha}[\alpha]$ 和 $G_{\alpha}[\alpha]$ 分别是相应的梯度向量和 Hessian 矩阵, 其表达式分别为

$$\begin{cases} g_{\alpha}[\alpha] = \text{vecd} \left[\sum_{m=0}^D \mathbf{1}_{N \times 1} \left(\mathbf{x}_{s_0}^{(m)} - q_0 \cdot \mathbf{Z}^{-1}[\omega_c[\alpha, \theta]] \cdot \xi^{(m)}[\alpha, \theta] \right)^H \cdot \mathbf{Z}^{-1}[\omega_c[\alpha, \theta]] \cdot \mathbf{A}^{(m)}[\theta] \right], \\ G_{\alpha}[\alpha] = q_0 \sum_{m=0}^D \mathbf{A}^{(m)H}[\theta] \cdot \mathbf{Z}^{-H}[\omega_c[\alpha, \theta]] \cdot \mathbf{Z}^{-1}[\omega_c[\alpha, \theta]] \cdot \mathbf{A}^{(m)}[\theta] \\ - q_0^2 \sum_{m_1=0}^D \sum_{m_2=0}^D \left(\mathbf{A}^{(m_1)H}[\theta] \cdot \mathbf{Z}^{-H}[\omega_c[\alpha, \theta]] \cdot \mathbf{T}[\xi^{(m_1)}[\alpha, \theta]] \cdot \Omega_c[\alpha, \theta] \right) \\ \times \mathbf{T}^H[\xi^{(m_2)}[\alpha, \theta]] \cdot \mathbf{Z}^{-1}[\omega_c[\alpha, \theta]] \cdot \mathbf{A}^{(m_2)}[\theta] \end{cases} \quad (36)$$

式 (35) 和式 (36) 的推导类似于附录 B, 限于篇幅这里不再阐述. 获得 θ 和 α 的数值解后, 将其代入式 (28) 即可获得互耦向量 c 的数值解.

若将上述过程进行总结, 则可得到如下数值算法:

- 步骤 1 设置 e 为很小的正数以及初始值 θ_0 和 α_0 , 并令 $k \leftarrow 1$;
- 步骤 2 基于当前的估计值 α_{k-1} , 利用式 (32)~(34) 给出的 Newton 迭代公式计算方位向量 θ_k ;
- 步骤 3 基于当前的估计值 θ_k , 利用式 (35) 和 (36) 给出的 Newton 迭代公式计算复衰减向量 α_k ;
- 步骤 4 计算 $\varepsilon_k = \|\alpha_k - \alpha_{k-1}\|_2$, 若 $\varepsilon_k \leq e$, 则转至步骤 5, 否则令 $k \leftarrow k + 1$, 并转至步骤 2;
- 步骤 5 基于最终的估计值 θ_k 和 α_k , 利用式 (28) 计算互耦向量 c .

3.2.3 校正算法的进一步讨论

在前面的分析讨论中, 已经分别给出了校正源多径传播条件下的幅相误差和互耦校正算法, 虽然两种算法在数学推导上不尽相同, 但都具有相同的计算模式和理论框架, 即都是基于“嵌入式”优化方式^[13~17]所进行, 该优化方法是针对一类所谓“参数可分离”的非线性最小二乘优化模型所设计的, 对于解决信号处理问题具有较高的收敛速度和稳健性. 另一方面, 由于文中的优化函数是基于最大似然准则提出的, 因此其参数估计方差可渐近逼近相应的 CRB(见第 5 节中的仿真实验).

下面将讨论上述校正算法的参数估计可辨识性条件, 即参数估计唯一性条件. 事实上, 参数估计唯一性的充要条件仍然是个公开的难问题, 这里仅能给出参数估计唯一性的必要条件, 从中也可以间接推导出阵列旋转次数 D 所需满足的下界. 这里分析的理论依据是式 (7) 中的实方程个数不小于未知实参量个数. 显然, 式 (7) 中的实方程个数为 $2(D+1)P$, 而未知实参量的个数则根据误差模型的不同而变化. 当考虑幅相误差校正时, 其中未知实参量个数为 $3N + 2L$ (其中包括 α 中的 $2N$ 个实参量, θ 中的 N 个实参量和 ρ 中的 $2L$ 个实参量), 于是需要满足

$$2(D+1)P \geq 3N + 2L \Rightarrow D \geq [(3N + 2L)/2P - 1]. \quad (37)$$

当考虑互耦校正时, 其中未知实参量个数为 $3N + 2K$ (其中包括 α 中的 $2N$ 个实参量, θ 中的 N 个实参量和 ρ 中的 $2K$ 个实参量), 于是需要满足

$$2(D+1)P \geq 3N + 2K \Rightarrow D \geq [(3N + 2K)/2P - 1]. \quad (38)$$

从式 (37) 和式 (38) 中不难看出, 校正源的反射波数目越多, 阵列需要旋转的次数也越多.

4 参数估计方差的克拉美罗界

命题 1^[24] 假设实向量 $\mathbf{y}$ 的 CRB 为 $\mathbf{CRB}_{\mathbf{y}}$, 若定义一个新的实向量 $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{F}\mathbf{y}$, 式中 $\mathbf{F}$ 为可逆方阵, 则关于向量 $\bar{\mathbf{y}}$ 的 CRB 为 $\mathbf{CRB}_{\bar{\mathbf{y}}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{CRB}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{F}^T$.

不妨将所有的未知实参量包含在向量 $\boldsymbol{\mu}$ 中, 则有

$$\boldsymbol{\mu} = [\sigma^2 \ \boldsymbol{\eta}^T]^T = [\sigma^2 \ \boldsymbol{\alpha}^{(r)T} \ \boldsymbol{\alpha}^{(i)T} \ \boldsymbol{\theta}^T \ \boldsymbol{\rho}^{(r)T} \ \boldsymbol{\rho}^{(i)T}]^T, \quad (39)$$

式中 $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\alpha}^{(r)T} \ \boldsymbol{\alpha}^{(i)T} \ \boldsymbol{\theta}^T \ \boldsymbol{\rho}^{(r)T} \ \boldsymbol{\rho}^{(i)T}]^T$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}^{(r)} = \text{Re}\{\boldsymbol{\alpha}\}$, $\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = \text{Im}\{\boldsymbol{\alpha}\}$, $\boldsymbol{\rho}^{(r)} = \text{Re}\{\boldsymbol{\rho}\}$ 和 $\boldsymbol{\rho}^{(i)} = \text{Im}\{\boldsymbol{\rho}\}$. 根据式 (3) 可知数据向量 $\mathbf{x}$ 的均值向量可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{\mathbf{x}} = \mathbf{E}[\mathbf{x}] = [\mathbf{r}_{\mathbf{x}}^{(0)H} \ \mathbf{r}_{\mathbf{x}}^{(1)H} \ \dots \ \mathbf{r}_{\mathbf{x}}^{(D)H}]^H, \\ \mathbf{r}_{\mathbf{x}}^{(m)} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{b}[\phi_0^{(m)}] \cdot s_0[t_1] + \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \mathbf{b}[\phi_n^{(m)}] \cdot s_0[t_1] \right)^H & \dots \\ \left(\mathbf{b}[\phi_0^{(m)}] \cdot s_0[t_P] + \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \mathbf{b}[\phi_n^{(m)}] \cdot s_0[t_P] \right)^H & \end{bmatrix}^H \\ = \mathbf{s}_0 \otimes (\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\xi}^{(m)}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}]) \quad (m = 0, 1, \dots, D), \end{cases} \quad (40)$$

相应的协方差阵为 $\mathbf{R}_{\mathbf{x}} = \sigma^2 \mathbf{I}_{(D+1)P}$, 于是关于向量 $\boldsymbol{\mu}$ 的 Fisher 信息矩阵中的元素为

$$\langle \mathbf{FISH}_{\boldsymbol{\mu}} \rangle_{nm} = \langle \mathbf{CRB}_{\boldsymbol{\mu}}^{-1} \rangle_{nm} = 2 \cdot \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}_{\mathbf{x}}^H}{\partial \langle \boldsymbol{\mu} \rangle_n} \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}_{\mathbf{x}}}{\partial \langle \boldsymbol{\mu} \rangle_m} \right\} + \text{trace} \left[\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_{\mathbf{x}}}{\partial \langle \boldsymbol{\mu} \rangle_n} \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_{\mathbf{x}}}{\partial \langle \boldsymbol{\mu} \rangle_m} \right]. \quad (41)$$

根据式 (41) 可得关于噪声功率 σ^2 的 CRB 为

$$\mathbf{CRB}_{\sigma^2} = \sigma^4 / (D+1)P, \quad (42)$$

而关于向量 $\boldsymbol{\eta}$ 的 CRB 可表示为

$$\mathbf{CRB}_{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \text{Re}^{-1} \{ \boldsymbol{\Sigma}^H \boldsymbol{\Sigma} \}, \quad (43)$$

式中

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_{\mathbf{x}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^{(r)T}} & \frac{\partial \mathbf{r}_{\mathbf{x}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^{(i)T}} & \frac{\partial \mathbf{r}_{\mathbf{x}}}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} & \frac{\partial \mathbf{r}_{\mathbf{x}}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{(r)T}} & \frac{\partial \mathbf{r}_{\mathbf{x}}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{(i)T}} \end{bmatrix}, \quad (44)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_{\mathbf{x}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^{(r)T}} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{s}_0 \mathbf{1}_{N \times 1}^T) \circ \mathbf{B}^{(0)}[\boldsymbol{\theta}] \\ (\mathbf{s}_0 \mathbf{1}_{N \times 1}^T) \circ \mathbf{B}^{(1)}[\boldsymbol{\theta}] \\ \vdots \\ (\mathbf{s}_0 \mathbf{1}_{N \times 1}^T) \circ \mathbf{B}^{(D)}[\boldsymbol{\theta}] \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_{\mathbf{x}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^{(i)T}} = \mathbf{i} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{\mathbf{x}}}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{s}_0 \mathbf{1}_{N \times 1}^T) \circ \dot{\mathbf{B}}^{(0)}[\boldsymbol{\theta}] \\ (\mathbf{s}_0 \mathbf{1}_{N \times 1}^T) \circ \dot{\mathbf{B}}^{(1)}[\boldsymbol{\theta}] \\ \vdots \\ (\mathbf{s}_0 \mathbf{1}_{N \times 1}^T) \circ \dot{\mathbf{B}}^{(D)}[\boldsymbol{\theta}] \end{bmatrix} \cdot \text{diag}[\boldsymbol{\alpha}] = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}, \end{aligned} \quad (45)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{B}^{(m)}[\boldsymbol{\theta}] = \begin{bmatrix} \mathbf{b}[\phi_1^{(m)}] & \mathbf{b}[\phi_2^{(m)}] & \cdots & \mathbf{b}[\phi_N^{(m)}] \end{bmatrix}, \\ \dot{\mathbf{B}}^{(m)}[\boldsymbol{\theta}] = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{b}}[\phi_1^{(m)}] & \dot{\mathbf{b}}[\phi_2^{(m)}] & \cdots & \dot{\mathbf{b}}[\phi_N^{(m)}] \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (m = 0, 1, \dots, D). \quad (46)$$

此外, 当考虑幅相误差校正时可得

$$\frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial \boldsymbol{\rho}^{(r)T}} = \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial \boldsymbol{\tau}^{(r)T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_0 \otimes \text{diag}[\boldsymbol{\xi}^{(0)}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}]] \\ \mathbf{s}_0 \otimes \text{diag}[\boldsymbol{\xi}^{(1)}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}]] \\ \vdots \\ \mathbf{s}_0 \otimes \text{diag}[\boldsymbol{\xi}^{(D)}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}]] \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}_\tau = \boldsymbol{\Sigma}_\rho, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial \boldsymbol{\rho}^{(i)T}} = \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial \boldsymbol{\tau}^{(i)T}} = \mathbf{i}\boldsymbol{\Sigma}_\tau = \mathbf{i}\boldsymbol{\Sigma}_\rho, \quad (47)$$

而当考虑互耦校正时可得

$$\frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial \boldsymbol{\rho}^{(r)T}} = \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial \mathbf{c}^{(r)T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_0 \otimes \mathbf{T}[\boldsymbol{\xi}^{(0)}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}]] \\ \mathbf{s}_0 \otimes \mathbf{T}[\boldsymbol{\xi}^{(1)}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}]] \\ \vdots \\ \mathbf{s}_0 \otimes \mathbf{T}[\boldsymbol{\xi}^{(D)}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}]] \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}_c = \boldsymbol{\Sigma}_\rho, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial \boldsymbol{\rho}^{(i)T}} = \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial \mathbf{c}^{(i)T}} = \mathbf{i}\boldsymbol{\Sigma}_c = \mathbf{i}\boldsymbol{\Sigma}_\rho. \quad (48)$$

虽然通过式 (43) 可以获得全部未知参量的 CRB, 但并不是以很显式的形式给出, 下面不妨进一步推导每个未知参量 CRB 的显式表达式, 为此可令

$$\boldsymbol{\kappa} = \left[(\boldsymbol{\alpha}^{(r)} + \mathbf{U}^{(r)}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{V}^{(r)}\bar{\boldsymbol{\rho}})^T (\boldsymbol{\alpha}^{(i)} + \mathbf{U}^{(i)}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{V}^{(i)}\bar{\boldsymbol{\rho}})^T \boldsymbol{\theta}^T \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \right]^T, \quad (49)$$

式中 $\bar{\boldsymbol{\rho}} = [\boldsymbol{\rho}^{(r)T} \boldsymbol{\rho}^{(i)T}]^T$, $\mathbf{U}^{(r)} = \text{Re}\{\mathbf{U}\}$, $\mathbf{U}^{(i)} = \text{Im}\{\mathbf{U}\}$, $\mathbf{V}^{(r)} = \text{Re}\{\mathbf{V}\}$ 和 $\mathbf{V}^{(i)} = \text{Im}\{\mathbf{V}\}$, 其中 $\mathbf{U} = \boldsymbol{\Sigma}_\alpha^\dagger \boldsymbol{\Sigma}_\theta$ 和 $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Sigma}_\alpha^\dagger [\boldsymbol{\Sigma}_\rho \mathbf{i}\boldsymbol{\Sigma}_\rho]$. 根据式 (49) 可得

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{F}\boldsymbol{\eta}, \quad (50)$$

式中

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{U}^{(r)} & \mathbf{V}^{(r)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{U}^{(i)} & \mathbf{V}^{(i)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (51)$$

根据命题 1 可知参量 $\boldsymbol{\kappa}$ 的 CRB 为

$$\text{CRB}_{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \text{Re}^{-1} \left\{ (\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{F}^{-1})^H (\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{F}^{-1}) \right\}, \quad (52)$$

式中

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & -\mathbf{U}^{(r)} & -\mathbf{V}^{(r)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} & -\mathbf{U}^{(i)} & -\mathbf{V}^{(i)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (53)$$

于是有

$$\Sigma F^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\alpha} & i\Sigma_{\alpha} \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\theta} \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \left[\Sigma_{\rho} & i\Sigma_{\rho} \right] \end{bmatrix}. \quad (54)$$

将式 (54) 代入式 (52) 中可得

$$\text{CRB}_{\kappa} = \frac{\sigma^2}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}^{-1}, \quad (55)$$

式中

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} \text{Re} \{ \Sigma_{\alpha}^H \Sigma_{\alpha} \} & -\text{Im} \{ \Sigma_{\alpha}^H \Sigma_{\alpha} \} \\ \text{Im} \{ \Sigma_{\alpha}^H \Sigma_{\alpha} \} & \text{Re} \{ \Sigma_{\alpha}^H \Sigma_{\alpha} \} \end{bmatrix}, \quad (56)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} \text{Re} \{ \Sigma_{\theta}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\theta} \} & \text{Re} \{ \Sigma_{\theta}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} & -\text{Im} \{ \Sigma_{\theta}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} \\ \text{Re} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\theta} \} & \text{Re} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} & -\text{Im} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} \\ \text{Im} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\theta} \} & \text{Im} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} & \text{Re} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} \end{bmatrix}. \quad (57)$$

根据式 (56) 和分块矩阵求逆公式可得

$$\begin{aligned} \text{CRB}_{\theta} &= \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \begin{aligned} &\text{Re} \{ \Sigma_{\theta}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\theta} \} - \left[\text{Re} \{ \Sigma_{\theta}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} \quad -\text{Im} \{ \Sigma_{\theta}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} \right] \\ &\times \left[\begin{array}{cc} \text{Re} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} & -\text{Im} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} \\ \text{Im} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} & \text{Re} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} \end{array} \right]^{-1} \cdot \left[\begin{array}{c} \text{Re} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\theta} \} \\ \text{Im} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\theta} \} \end{array} \right] \end{aligned} \right\}^{-1} \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \cdot \text{Re}^{-1} \left\{ \Sigma_{\theta}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\theta} - \Sigma_{\theta}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} (\Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho})^{-1} \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\theta} \right\}, \end{aligned} \quad (58)$$

CRB_{ρ}

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \begin{aligned} &\left[\begin{array}{cc} \text{Re} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} & -\text{Im} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} \\ \text{Im} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} & \text{Re} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Re} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\theta} \} \\ \text{Im} \{ \Sigma_{\rho}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\theta} \} \end{array} \right] \cdot \text{Re}^{-1} \{ \Sigma_{\theta}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\theta} \} \\ &\times \left[\begin{array}{cc} \text{Re} \{ \Sigma_{\theta}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} & -\text{Im} \{ \Sigma_{\theta}^H \Pi_{\Sigma_{\alpha}}^{\perp} \Sigma_{\rho} \} \end{array} \right] \end{aligned} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (59)$$

类似可推得

CRB_{α}

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \begin{aligned} &\left[\begin{array}{cc} \text{Re} \{ \Sigma_{\alpha}^H \Pi_{\Sigma_{\rho}}^{\perp} \Sigma_{\alpha} \} & -\text{Im} \{ \Sigma_{\alpha}^H \Pi_{\Sigma_{\rho}}^{\perp} \Sigma_{\alpha} \} \\ \text{Im} \{ \Sigma_{\alpha}^H \Pi_{\Sigma_{\rho}}^{\perp} \Sigma_{\alpha} \} & \text{Re} \{ \Sigma_{\alpha}^H \Pi_{\Sigma_{\rho}}^{\perp} \Sigma_{\alpha} \} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Re} \{ \Sigma_{\alpha}^H \Pi_{\Sigma_{\rho}}^{\perp} \Sigma_{\theta} \} \\ \text{Im} \{ \Sigma_{\alpha}^H \Pi_{\Sigma_{\rho}}^{\perp} \Sigma_{\theta} \} \end{array} \right] \cdot \text{Re}^{-1} \{ \Sigma_{\theta}^H \Pi_{\Sigma_{\rho}}^{\perp} \Sigma_{\theta} \} \\ &\times \left[\begin{array}{cc} \text{Re} \{ \Sigma_{\theta}^H \Pi_{\Sigma_{\rho}}^{\perp} \Sigma_{\alpha} \} & -\text{Im} \{ \Sigma_{\theta}^H \Pi_{\Sigma_{\rho}}^{\perp} \Sigma_{\alpha} \} \end{array} \right] \end{aligned} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (60)$$

5 算法仿真

首先, 定义乘性阵列误差估计均方根误差 e_1 如下: 独立进行 200 次实验, 设第 k 次实验估计出的

图 2 幅相误差估计均方根误差变化曲线

Figure 2 RMSEs of gain/phase error estimate. (a) RMSEs of gain/phase error estimate versus SNR of calibration source with $P=400$; (b) RMSEs of gain/phase error estimate versus snapshot number at SNR=10 dB

幅相误差或互耦向量分别为 $\hat{\tau}_k$ 和 $\hat{c}_k$, 则 e_1 可表示为

$$e_1 = \sqrt{\frac{1}{200} \sum_{k=1}^{200} \|\tau - \hat{\tau}_k\|_2^2} \quad \text{或} \quad e_1 = \sqrt{\frac{1}{200} \sum_{k=1}^{200} \|c - \hat{c}_k\|_2^2}, \quad (61)$$

接着, 定义校正源多径传播方位估计均方根误差 e_2 如下: 独立进行 200 次实验, 设第 k 次实验估计出的多径传播方位为 $\hat{\theta}_{n,k}$ ($1 \leq n \leq N$), 则 e_2 可表示为

$$e_2 = \sqrt{\frac{1}{200} \sum_{k=1}^{200} \sum_{n=1}^N (\theta_n - \hat{\theta}_{n,k})^2}, \quad (62)$$

最后, 定义多径复衰减系数估计均方根误差 e_3 如下: 独立进行 200 次实验, 设第 k 次实验估计出的多径复衰减系数为 $\hat{\alpha}_{n,k}$ ($1 \leq n \leq N$), 则 e_3 可表示为

$$e_3 = \sqrt{\frac{1}{200} \sum_{k=1}^{200} \sum_{n=1}^N |\alpha_n - \hat{\alpha}_{n,k}|^2}. \quad (63)$$

5.1 针对幅相误差校正的仿真实验

假设阵列流形为 9 元均匀圆阵 (安装在高精度的旋转平台上), 半径与波长比为 1, 各阵元的幅度因子分别为 1.00, 0.83, 0.92, 1.18, 1.24, 0.95, 1.28, 0.79 和 1.32, 相位误差因子分别为 0.00° , -18.37° , 15.85° , 23.53° , -24.56° , -13.57° , 17.85° , -20.36° 和 18.36° . 该阵列的远场处放置单个窄带连续波校正信号源, 其到达该阵列的入射方位为 30° (已知), 此外, 该校正源还经过两条多径传播入射至该阵列, 其方位分别为 60° 和 90° (未知), 相应的复衰减系数分别为 $-0.15+0.23i$ 和 $0.32-0.13i$, 假设平台每次旋转都是沿着反方向旋转 20° , 并且在仿真实验中分别让旋转平台旋转 3 次、4 次和 5 次. 图 2 给出了算法的幅相误差估计均方根误差变化曲线; 图 3 给出了算法的多径传播方位估计均方根误差变化曲线; 图 4 给出了算法的多径复衰减系数估计均方根误差变化曲线.

5.2 针对互耦校正的仿真实验

假设阵列流形为 9 元均匀线阵 (安装在高精度的旋转平台上), 相邻阵元间距与波长比为 0.5, 仅考虑相邻四个阵元之间的互耦效应, 其互耦因子分别为 1, $0.28-0.24i$, $0.16+0.15i$ 和 $-0.06+0.07i$. 该

图 3 方位估计均方根误差变化曲线

Figure 3 RMSEs of DOA estimate. (a) RMSEs of DOA estimate versus SNR of calibration source with $P=400$; (b) RMSEs of DOA estimate versus snapshot number at SNR=10 dB

图 4 复衰减系数估计均方根误差变化曲线

Figure 4 RMSEs of attenuation coefficient estimate. (a) RMSEs of attenuation coefficient estimate versus SNR of calibration source with $P=400$; (b) RMSEs of attenuation coefficient estimate versus snapshot number at SNR=10 dB

阵列的远场处放置单个窄带连续波校正信号源, 其到达该阵列的入射方位 (指与线阵夹角) 为 20° (已知), 此外, 该校正源还经过两条多径传播入射至该阵列, 其方位分别为 40° 和 60° (未知), 相应的复衰减系数分别为 $0.22-0.35i$ 和 $-0.38+0.27i$, 假设平台每次旋转都是沿着反方向旋转 15° , 并且在仿真实验中分别让旋转平台旋转 4 次、5 次和 6 次. 图 5 给出了算法的互耦系数估计均方根误差变化曲线; 图 6 给出了算法的多径方位估计均方根误差变化曲线; 图 7 给出了算法的多径复衰减系数估计均方根误差变化曲线.

从图 2 至图 7 中可以看出, 无论是幅相误差校正还是互耦校正, 文中提出的多径校正算法均是渐近有效的, 即其参数估计性能可逼近相应的 CRB (即式 (58) 至式 (60) 的矩阵迹的平方根), 这是因为文中的校正算法是基于最大似然准则提出的, 因此在参数满足“正则性”要求的情况下, 其渐近估计方差即为相应的 CRB. 此外, 从上述仿真结果中也可以看出, 随着旋转平台旋转次数的增加, 校正算法的参数估计性能也有所提高, 这是因为旋转次数的增加并不会增加未知参量个数, 但却增加可利用的数据信息, 从而有利于提高参数估计性能. 最后需要指出的是, 文中的校正算法通过适当修正后, 可应用于阵元位置误差校正以及多种阵列误差形式同时存在的情况, 限于篇幅这里不再给出理论和实验结果.

图 5 互耦系数估计均方根误差变化曲线

Figure 5 RMSEs of mutual coupling coefficient estimate. (a) RMSEs of mutual coupling coefficient estimate versus SNR of calibration source with $P=400$; (b) RMSEs of mutual coupling coefficient estimate versus snapshot number at SNR=10 dB

图 6 方位估计均方根误差变化曲线

Figure 6 RMSEs of DOA estimate. (a) RMSEs of DOA estimate versus SNR of calibration source with $P=400$; (b) RMSEs of DOA estimate versus snapshot number at SNR=10 dB

图 7 复衰减系数估计均方根误差变化曲线

Figure 7 RMSEs of attenuation coefficient estimate. (a) RMSEs of attenuation coefficient estimate versus SNR of calibration source with $P=400$; (b) RMSEs of attenuation coefficient estimate versus snapshot number at SNR=10 dB

5.3 阵列旋转角度对误差校正精度的影响

下面通过观测 CRB 曲线的变化情况讨论阵列旋转角度的选择对误差校正精度的影响, 为了便于

图 8 幅相误差估计 CRB 曲线随阵列旋转的变化曲线 (采样点数为 400, 信噪比为 10 dB)

Figure 8 CRBs of gain/phase error estimate versus array rotation angle with $P=400$ and $\text{SNR}=10$ dB

图 9 互耦系数估计 CRB 曲线随阵列旋转的变化曲线 (采样点数为 400, 信噪比为 10 dB)

Figure 9 CRBs of mutual coupling coefficient estimate versus array rotation angle with $P=400$ and $\text{SNR}=10$ dB

分析, 这里假设阵列每次旋转的角度是一致的. 首先, 将实验环境设置为第 5.1 小节中的条件, 但需将采样点数固定为 400, 信噪比固定为 10 dB, 图 8 给出了幅相误差估计 CRB 曲线随着阵列旋转角度的变化曲线; 接着, 将实验环境设置为第 5.2 小节中的条件, 但需将采样点数固定为 400, 信噪比固定为 10 dB, 图 9 给出了互耦系数估计 CRB 曲线随着阵列旋转角度的变化曲线.

从图 8 中可以看出, 对于均匀圆阵而言, 误差校正精度一般会随着阵列旋转角度的增大而提高, 但当旋转角度增加到一定程度后其校正精度会趋于某个稳定值; 而从图 9 中可以看出, 对于均匀线阵而言, 误差校正精度刚开始也随着阵列旋转角度的增大而提高, 但随着阵列旋转角度的进一步增加, 其校正精度会出现波动, 这是由线阵的特征所决定. 需要指出的是, 对于特定的实验条件, 其最优的阵列旋转角度数值也不同, 实际中可通过最小化 CRB 的数值进行预先估计.

6 结束语

本文提出校正源多径条件下的乘性阵列误差 (包括幅相误差或互耦效应) 的校正算法. 文中设置单个远场连续波校正源, 通过旋转阵列天线在多个校正方位上测得校正数据, 基于此通过最大似然准则, 建立关于乘性阵列误差参数、校正源多径传播方位以及多径复衰减系数的数学优化模型. 针对该优化模型, 文中设计出相应的“嵌入式”交替迭代算法用以实现全部未知参量的数值优化. 仿真实验验证文中新算法的渐近有效性, 其渐近性能在一定条件下可逼近相应的 CRB.

最后需要指出的是, 文中的校正算法是假设信号源与阵列之间的相对位置固定不变, 并且信号的多径传播也确定不变, 但实际中这些参数可能会发生随机扰动, 为此需要基于贝叶斯 (Bayes) 理论框架提出具有鲁棒性的校正算法, 该研究工作将在后续给出.

参考文献

- 1 Ferréol A, Larzabal P, Viberg M. Statistical analysis of the MUSIC algorithm in the presence of modeling errors, taking into account the resolution probability. *IEEE Trans Signal Process*, 2010, 58: 4156–4166
- 2 Ferréol A, Larzabal P, Viberg M. On the resolution probability of MUSIC in presence of modeling errors. *IEEE Trans Signal Process*, 2008, 56: 1945–1953
- 3 Ferréol A, Larzabal P, Viberg M. Performance prediction of maximum-likelihood direction-of-arrival estimation in the presence of modeling errors. *IEEE Trans Signal Process*, 2008, 56: 4785–4793

- 4 Friedlander B, Weiss A J. Direction finding in the presence of mutual coupling. *IEEE Trans Antenn Propag*, 1991, 39: 273–284
- 5 Pesavento M, Gershman A B, Wong K M. Direction finding in partly calibrated sensor arrays composed of multiple subarrays. *IEEE Trans Signal Process*, 2002, 50: 2103–2115
- 6 Sellone F, Serra A. A novel mutual coupling compensation algorithm for uniform and linear arrays. *IEEE Trans Signal Process*, 2007, 55: 560–573
- 7 Wijnholds S J, Veen A J. Multisource self-calibration for sensor arrays. *IEEE Trans Signal Process*, 2009, 57: 3512–3522
- 8 Hu X Q, Chen H, Wang Y L, et al. A self-calibration algorithm for cross array in the presence of mutual coupling. *Sci China Inf Sci*, 2011, 54: 836–848
- 9 Cheng Q, Hua Y B, Stoica P. Asymptotic performance of optimal gain-and-phase estimators of sensor arrays. *IEEE Trans Signal Process*, 2000, 48: 3587–3590
- 10 Lin M, Gong Z Q. Subspace-based calibration approach for mutual coupling among sensors. *Acta Electron Sin*, 2001, 29: 1176–1178 [林敏, 龚铮权. 基于子空间的阵元间互耦校正方法. *电子学报*, 2001, 29: 1176–1178]
- 11 Gao H T, Li Y X, Zheng X. Estimating the mutual coupling coefficient of arrays. *J Commun*, 2005, 26: 19–23 [高火涛, 李咏絮, 郑霞. 天线阵互耦系数的估计. *通信学报*, 2005, 26: 19–23]
- 12 Park H Y, Lee C Y, Kang H G, et al. Generalization of subspace-based array shape estimations. *IEEE J Oceanic Eng*, 2004, 29: 847–856
- 13 Ng B C, Nehorai A. Active array sensor localization. *Signal Process*, 1995, 44: 309–327
- 14 Ng B C, See C M S. Sensor array calibration using a maximum-likelihood approach. *IEEE Trans Antenn Propag*, 1996, 44: 827–835
- 15 Wang D, Wu Y. Array errors active calibration algorithm and its improvement. *Sci China Inf Sci*, 2010, 53: 1016–1033
- 16 Wang D, Wu Y. The array errors active calibration algorithm based on instrumental sensors. *Sci China Inf Sci*, 2011, 54: 1500–1511
- 17 Bao Q, Ko C C, Zhi W. DOA estimation under unknown mutual coupling and multipath. *IEEE Trans Aero Elec Sys*, 2005, 41: 565–573
- 18 Xu X, Ye Z F, Zhang Y F. DOA estimation for mixed signals in the presence of mutual coupling. *IEEE Trans Signal Process*, 2009, 57: 3523–3532
- 19 Dai J, Ye Z. Spatial smoothing for direction of arrival estimation of coherent signals in the presence of unknown mutual coupling. *IET Signal Process*, 2011, 5: 418–425
- 20 Wang B H, Wang Y L, Chen H. Array gain and phase calibration in the presence of multipath based on weighted spatial smoothing. *J China Inst Commun*, 2004, 25: 166–174 [王布宏, 王永良, 陈辉. 多径条件下基于加权空间平滑的阵元幅相误差校正. *通信学报*, 2004, 25: 166–174]
- 21 Leshem A, Wax M. Array calibration in the presence of multipath. *IEEE Trans Signal Process*, 2000, 48: 53–59
- 22 Zhang H, Chen J H, Zhou X L. Calibration technique for sensor position uncertainty, channel mismatch and mutual coupling of sensor-array. *J Shanghai Jiaotong Univ*, 2002, 36: 1284–1287 [章宏, 陈荆花, 周希朗. 阵列天线阵元位置误差、通道不一致性和互耦的校正. *上海交通大学学报*, 2002, 36: 1284–1287]
- 23 Li Q, Ye Z F, Xu X. Fast calibration method for sensor gain, phase and position uncertainties of linear equi-spaced array. *J Data Acquisit Process*, 2003, 18: 383–388 [李琼, 叶中付, 徐旭. 均匀线阵中幅相及位置误差的快速校正方法. *数据采集与处理*, 2003, 18: 383–388]
- 24 Stoica P, Larsson E G. Comments on “Linearization method for finding Cramér-Rao bounds in signal processing”. *IEEE Trans Signal Process*, 2001, 49: 3168–3169

附录 A 式 (15)~(17) 的证明

附录 A 中将对式 (15) 至式 (17) 进行证明, 首先根据正交投影矩阵求导公式可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_{\tau}[\alpha, \theta]}{\partial \langle \theta \rangle_n} &= -2 \cdot \text{Re} \left\{ \mathbf{x}^H \cdot \boldsymbol{\Pi}_{\Phi_{\tau}[\alpha, \theta]}^{\perp} \cdot \frac{\partial \Phi_{\tau}[\alpha, \theta]}{\partial \langle \theta \rangle_n} \cdot \Phi_{\tau}^{\dagger}[\alpha, \theta] \cdot \mathbf{x} \right\} \\ &= -2 \cdot \text{Re} \left\{ \sum_{m=0}^D \alpha_n \mathbf{x}_{s_0}^{(m)H} \cdot \text{diag}[\boldsymbol{\omega}_{\tau}[\alpha, \theta]] \cdot \dot{\mathbf{a}}[\phi_n^{(m)}] \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \cdot \text{Re} \left\{ \alpha_n q_0 \sum_{m=0}^D \xi^{(m)\text{H}}[\alpha, \theta] \cdot \text{diag}[\omega_\tau^*[\alpha, \theta] \bullet \omega_\tau[\alpha, \theta]] \cdot \dot{a}[\phi_n^{(m)}] \right\} \\
& = -2 \cdot \text{Re} \left\{ \sum_{m=0}^D \left\langle \alpha \left(\mathbf{x}_{s_0}^{(m)} - q_0 \cdot \text{diag}[\omega_\tau[\alpha, \theta]] \cdot \xi^{(m)}[\alpha, \theta] \right)^{\text{H}} \cdot \text{diag}[\omega_\tau[\alpha, \theta]] \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(m)}[\theta] \right\rangle_{nn} \right\}, \quad (\text{A1})
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_\tau[\alpha, \theta]}{\partial \theta} & = -2 \cdot \text{Re} \left\{ \text{vecd} \left[\sum_{m=0}^D \alpha \left(\mathbf{x}_{s_0}^{(m)} - q_0 \cdot \text{diag}[\omega_\tau[\alpha, \theta]] \cdot \xi^{(m)}[\alpha, \theta] \right)^{\text{H}} \cdot \text{diag}[\omega_\tau[\alpha, \theta]] \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(m)}[\theta] \right] \right\} \\
& = -2 \cdot \text{Re} \{ \mathbf{h}_\theta[\theta] \}. \quad (\text{A2})
\end{aligned}$$

另一方面, 在经过一定近似省略的基础上可以得到如下近似等式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_\tau[\alpha, \theta]}{\partial \langle \theta \rangle_n \cdot \partial \langle \theta \rangle_l} & \approx 2 \cdot \text{Re} \left\{ \mathbf{x}^{\text{H}} \cdot \Phi_\tau^{\text{H}}[\alpha, \theta] \cdot \frac{\partial \Phi_\tau^{\text{H}}[\alpha, \theta]}{\partial \langle \theta \rangle_n} \cdot \Pi_{\Phi_\tau[\alpha, \theta]}^\perp \cdot \frac{\partial \Phi_\tau[\alpha, \theta]}{\partial \langle \theta \rangle_l} \cdot \Phi_\tau^\dagger[\alpha, \theta] \cdot \mathbf{x} \right\} \\
& = 2 \cdot \text{Re} \left\{ \left\langle \left(q_0 \alpha^* \alpha^{\text{T}} \right) \bullet \left(\sum_{m=0}^D \dot{\mathbf{A}}^{(m)\text{H}}[\theta] \cdot \text{diag}[\omega_\tau^*[\alpha, \theta] \bullet \omega_\tau[\alpha, \theta]] \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(m)}[\theta] \right) \right\rangle_{nl} \right\} \\
& \quad - 2 \cdot \text{Re} \left\{ \left\langle \left(q_0^2 \alpha^* \alpha^{\text{T}} \right) \bullet \left(\sum_{m_1=0}^D \sum_{m_2=0}^D \left(\dot{\mathbf{A}}^{(m_1)\text{H}}[\theta] \cdot \text{diag}[\omega_\tau^*[\alpha, \theta] \bullet \xi^{(m_1)}[\alpha, \theta]] \cdot \Omega_\tau[\alpha, \theta] \right) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \times \text{diag}[\xi^{(m_2)*}[\alpha, \theta] \bullet \omega_\tau[\alpha, \theta]] \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(m_2)}[\theta] \right) \right\rangle_{nl} \right\}, \quad (\text{A3})
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_\tau[\alpha, \theta]}{\partial \theta \partial \theta^{\text{T}}} & \approx 2 \cdot \text{Re} \left\{ \left(q_0 \alpha^* \alpha^{\text{T}} \right) \bullet \left(\sum_{m=0}^D \dot{\mathbf{A}}^{(m)\text{H}}[\theta] \cdot \text{diag}[\omega_\tau^*[\alpha, \theta] \bullet \omega_\tau[\alpha, \theta]] \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(m)}[\theta] \right) \right\} \\
& \quad - 2 \cdot \text{Re} \left\{ \left(q_0^2 \alpha^* \alpha^{\text{T}} \right) \bullet \left(\sum_{m_1=0}^D \sum_{m_2=0}^D \left(\dot{\mathbf{A}}^{(m_1)\text{H}}[\theta] \cdot \text{diag}[\omega_\tau^*[\alpha, \theta] \bullet \xi^{(m_1)}[\alpha, \theta]] \cdot \Omega_\tau[\alpha, \theta] \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times \text{diag}[\xi^{(m_2)*}[\alpha, \theta] \bullet \omega_\tau[\alpha, \theta]] \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(m_2)}[\theta] \right) \right\} \\
& = 2 \cdot \text{Re} \{ \mathbf{H}_\theta[\theta] \}. \quad (\text{A4})
\end{aligned}$$

综合上述推导可知式 (15) 至式 (17) 成立.

附录 B 式 (18)~(20) 的证明

附录 B 中将对式 (18) 至式 (20) 进行证明, 首先根据正交投影矩阵求导公式可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_\tau[\alpha, \theta]}{\partial \langle \alpha^{(r)} \rangle_n} & = -2 \cdot \text{Re} \left\{ \mathbf{x}^{\text{H}} \cdot \Pi_{\Phi_\tau[\alpha, \theta]}^\perp \cdot \frac{\partial \Phi_\tau[\alpha, \theta]}{\partial \langle \alpha^{(r)} \rangle_n} \cdot \Phi_\tau[\alpha, \theta] \cdot \mathbf{x} \right\} \\
& = -2 \cdot \text{Re} \left\{ \sum_{m=0}^D \mathbf{x}_{s_0}^{(m)\text{H}} \cdot \text{diag}[\omega_\tau[\alpha, \theta]] \cdot \alpha[\phi_n^{(m)}] \right\} \\
& \quad + 2 \cdot \text{Re} \left\{ q_0 \sum_{m=0}^D \xi^{(m)\text{H}}[\alpha, \theta] \cdot \text{diag}[\omega_\tau^*[\alpha, \theta] \bullet \omega_\tau[\alpha, \theta]] \cdot \alpha[\phi_n^{(m)}] \right\} \\
& = -2 \cdot \text{Re} \left\{ \sum_{m=0}^D \left\langle \mathbf{1}_{N \times 1} \left(\mathbf{x}_{s_0}^{(m)} - q_0 \cdot \text{diag}[\omega_\tau[\alpha, \theta]] \cdot \xi^{(m)}[\alpha, \theta] \right)^{\text{H}} \cdot \text{diag}[\omega_\tau[\alpha, \theta]] \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(m)}[\theta] \right\rangle_{nn} \right\}, \quad (\text{B1})
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_\tau[\alpha, \theta]}{\partial \alpha^{(r)}} = -2 \cdot \text{Re} \left\{ \text{vecd} \left[\sum_{m=0}^D \mathbf{1}_{N \times 1} \left(\mathbf{x}_{s_0}^{(m)} - q_0 \cdot \text{diag}[\omega_\tau[\alpha, \theta]] \cdot \xi^{(m)}[\alpha, \theta] \right)^{\text{H}} \cdot \text{diag}[\omega_\tau[\alpha, \theta]] \cdot \dot{\mathbf{A}}^{(m)}[\theta] \right] \right\} \\ \quad = -2 \cdot \text{Re} \{ \mathbf{h}_\alpha[\alpha] \}, \\ \frac{\partial \varphi_\tau[\alpha, \theta]}{\partial \alpha^{(i)}} = 2 \cdot \text{Im} \{ \mathbf{h}_\alpha[\alpha] \}. \end{cases} \quad (\text{B2})$$

另一方面, 在经过一定近似省略的基础上可以得到如下近似等式

$$\frac{\partial^2 \varphi_\tau[\alpha, \theta]}{\partial \langle \alpha^{(r)} \rangle_n \cdot \partial \langle \alpha^{(r)} \rangle_l} \approx 2 \cdot \text{Re} \left\{ \mathbf{x}^{\text{H}} \cdot \Phi_\tau^{\text{H}}[\alpha, \theta] \cdot \frac{\partial \Phi_\tau^{\text{H}}[\alpha, \theta]}{\partial \langle \alpha^{(r)} \rangle_n} \cdot \Pi_{\Phi_\tau[\alpha, \theta]}^\perp \cdot \frac{\partial \Phi_\tau[\alpha, \theta]}{\partial \langle \alpha^{(r)} \rangle_l} \cdot \Phi_\tau^\dagger[\alpha, \theta] \cdot \mathbf{x} \right\}$$

$$= 2 \cdot \text{Re} \left\{ \left\langle q_0 \sum_{m=0}^D \mathbf{A}^{(m)\text{H}}[\boldsymbol{\theta}] \cdot \text{diag}[\boldsymbol{\omega}_\tau^*[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}] \bullet \boldsymbol{\omega}_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}]] \cdot \mathbf{A}^{(m)}[\boldsymbol{\theta}] \right\rangle_{nl} \right\} \\ - 2 \cdot \text{Re} \left\{ \left\langle q_0^2 \sum_{m_1=0}^D \sum_{m_2=0}^D \left(\mathbf{A}^{(m_1)\text{H}}[\boldsymbol{\theta}] \cdot \text{diag}[\boldsymbol{\omega}_\tau^*[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}] \bullet \boldsymbol{\xi}^{(m_1)}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}]] \cdot \boldsymbol{\Omega}_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}] \right) \right\rangle_{nl} \right\}, \quad (\text{B3})$$

于是有

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}]}{\partial \boldsymbol{\alpha}^{(\text{r})} \partial \boldsymbol{\alpha}^{(\text{r})\text{T}}} &\approx 2 \cdot \text{Re} \left\{ q_0 \sum_{m=0}^D \mathbf{A}^{(m)\text{H}}[\boldsymbol{\theta}] \cdot \text{diag}[\boldsymbol{\omega}_\tau^*[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}] \bullet \boldsymbol{\omega}_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}]] \cdot \mathbf{A}^{(m)}[\boldsymbol{\theta}] \right\} \\ &- 2 \cdot \text{Re} \left\{ q_0^2 \sum_{m_1=0}^D \sum_{m_2=0}^D \left(\mathbf{A}^{(m_1)\text{H}}[\boldsymbol{\theta}] \cdot \text{diag}[\boldsymbol{\omega}_\tau^*[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}] \bullet \boldsymbol{\xi}^{(m_1)}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}]] \cdot \boldsymbol{\Omega}_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}] \right) \right\} \\ &= 2 \cdot \text{Re}\{\mathbf{H}_\alpha[\boldsymbol{\alpha}]\}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}]}{\partial \boldsymbol{\alpha}^{(\text{r})} \partial \boldsymbol{\alpha}^{(\text{i})\text{T}}} &\approx -2 \cdot \text{Im}\{\mathbf{H}_\alpha[\boldsymbol{\alpha}]\}, \frac{\partial^2 \varphi_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}]}{\partial \boldsymbol{\alpha}^{(\text{i})} \partial \boldsymbol{\alpha}^{(\text{r})\text{T}}} \approx 2 \cdot \text{Im}\{\mathbf{H}_\alpha[\boldsymbol{\alpha}]\}, \frac{\partial^2 \varphi_\tau[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}]}{\partial \boldsymbol{\alpha}^{(\text{i})} \partial \boldsymbol{\alpha}^{(\text{i})\text{T}}} \approx 2 \cdot \text{Re}\{\mathbf{H}_\alpha[\boldsymbol{\alpha}]\}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{B4})$$

综合上述推导可知式 (18) 至式 (20) 成立.

The multiplicative array errors calibration algorithms in the presence of multipath

WANG Ding* & WU Ying

Institute of Information System Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450002, China

*E-mail: wang_ding814@aliyun.com

Abstract Aiming at the problem of multipath propagation of the calibration source, the multiplicative array error (referring to gain-and-phase error or mutual coupling) calibration algorithms in the presence of multipath propagation are presented. The array is rotated to different locations in order to receive the calibration signal from a far-field and constant waveform source. Based on the received data, the optimization model with respect to array error parameters, multipath propagation azimuths, and complex attenuation coefficients is constructed according to the maximum likelihood (ML) criterion. The concentrated Newton iteration algorithm is derived to solve the optimization model. Furthermore, Cramér-Rao bound (CRB) for unknown parameters is presented. Simulation experiments validate the effectiveness of the proposed algorithms and demonstrate that the asymptotic performance of the novel algorithms can reach the corresponding CRB.

Keywords array error calibration, active calibration, gain-and-phase error, mutual coupling, multipath propagation, maximum likelihood estimator (MLE), Cramér-Rao bound (CRB)

WANG Ding was born in 1982. He received his B.S., M.S., and Ph.D. degrees in communication and system engineering from PLA Information Engineering University, Zhengzhou, in 2004, 2007 and 2011, respectively. Currently, he is a lecturer at PLA Information Engineering University. His main research interests include array signal processing and passive location.