双同宿分支中极限环的个数*

韩茂安 陈 健

(上海交通大学应用数学系, 上海 200030)

摘要 设 L 是一平面 Hamilton 系统的双同宿环, 给出 L 在扰动下至多产生两个大极限环的条件及至多产生 5 或 6 个极限环的条件.

关键词 同宿轨 分支 极限环

1 主要结果

考虑平面系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) + \epsilon f_0(x, y, \epsilon, \delta) \equiv \bar{f}(x, y, \epsilon, \delta), \\ \dot{y} &= g(x, y) + \epsilon g_0(x, y, \epsilon, \delta) \equiv \bar{g}(x, y, \epsilon, \delta),\end{aligned}\quad (1.1)$$

其中 $\epsilon > 0$ 为小参数, $\delta \in D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, D 有界, 设函数 f, f_0, g 与 g_0 关于 (x, y, ϵ, δ) 至少为 C^3 的. 又设对一切 (ϵ, δ) 原点为系统(1.1)的双曲鞍点, 当 $\epsilon = 0$ 时, 系统(1.1)有一过原点的同宿环 L , 且存在函数 $H(x, y)$, 使得

$$f(x, y) = H_y(x, y), \quad g(x, y) = -H_x(x, y), \quad (1.2)$$

且 L 满足 $H(x, y) = 0$. 由文献[1]知系统(1.1)的一阶 Melnikov 函数

$$M(h, \delta) = \oint_{H=h} (fg_0 - gf_0)_{\epsilon=0} dt \quad (1.3)$$

在 $h=0$ 有下列形式的展式:

$$M(h, \delta) = c_0(\delta) + c_1(\delta)h \ln |h| + c_2(\delta)h + c_3(\delta)h^2 \ln |h| + \cdots. \quad (1.4)$$

如所周知, 可用(1.4)式来讨论 L 附近极限环的最大个数(见文献[1~4]).

由(1.2)式, 系统(1.1) ($\epsilon = 0$) 是 Hamilton 系统, 且有一族闭轨 L_h , 由 $H = h$ 给出. 系统(1.1)在原点的双曲比为 $r(\epsilon, \delta) = \frac{-\alpha_2(\epsilon, \delta)}{\alpha_1(\epsilon, \delta)}$, 其中 $\alpha_1 > 0 > \alpha_2$ 为 $\frac{\partial(f, \bar{g})}{\partial(x, y)}$ 在原点的特征值. 最近文献[2]证明, 若 L_h 是顺时针定向的, 则

$$c_1(\delta) = \pm r'_\epsilon(0, \delta), \quad c_2(\delta) = \pm \oint_L (f_{0x} + g_{0y})|_{\epsilon=0} dt \quad (\text{当 } c_1(\delta) = 0 \text{ 时}),$$

其中当 L_h 随 h 的增加而扩大(缩小)时取“+”(“-”).

现设当 $\epsilon = 0$ 时系统(1.1)有一双同宿环 $L = L_1 \cup L_2$. 如前, 设(1.2)式成立且 L 满足 $H = 0$. 为确定计, 对 $0 < h \ll 1$, 等位线 $H = h$ 有包围 L 的闭分支 L_h , 对 $0 < -h \ll 1$, $H = h$ 有包含

于 L 的闭分支 L_{1h} 与 L_{2h} . 这样系统(1.1)有 3 个 Melnikov 函数 $M(h, \delta)$ (由(1.3)式给出且对 $0 < h \ll 1$ 有定义)及

$$M_i(h, \delta) = \oint_{L_{1h}} (fg_0 - gf_0)_{\varepsilon=0} dt, \quad i = 1, 2,$$

其中 $0 < -h \ll 1$. 设 Γ_ε 为系统(1.1)在 L 的某邻域内的极限环, 使得当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\Gamma_\varepsilon \rightarrow L_1, L_2$, 或 L , 在前两种情况称 Γ_ε 为小环, 在第 3 种情况称 Γ_ε 为大环. 关于大环的分支, 文献[5]证明了下述结果:

定理 A 设(1.2)式成立, 则

$$(i) \quad M_0(\delta) \equiv M(0+0, \delta) = M_1(0-0, \delta) + M_2(0-0, \delta) \equiv M_{10}(\delta) + M_{20}(\delta).$$

$$(ii) \quad L \text{ 产生大环的必要条件是存在 } \delta_0 \in D, \text{ 使得 } M_0(\delta_0) = 0.$$

$$(iii) \quad \text{若 } M_0(\delta_0) = 0, \text{ 且 (a) } \sigma_0(\delta_0) \equiv (f_{0x} + g_{0y})(0, 0, 0, \delta_0) \neq 0, \text{ 或 (b) } (f_{0x} + g_{0y})(0, 0, \varepsilon, \delta) = 0, \text{ 且}$$

$$\sigma_1(\delta_0) \equiv \sigma_{11}(\delta_0) + \sigma_{12}(\delta_0) \equiv \sum_{i=1}^2 \oint_{L_i} (f_{0x} + g_{0y})(x, y, 0, \delta_0) dt \neq 0,$$

则当 $|\varepsilon| + |\delta - \delta_0|$ 充分小时, 系统(1.1)在 L 的某邻域内至多有一个大环.

本文进一步考虑在 $L = L_1 \cup L_2$ 附近至多有两个大环的存在性. 主要结果之一是下列定理:

定理 1.1 设(1.2)式成立. 如果存在 $\delta_0 \in D$, 使得 $M_0(\delta_0) = \sigma_0(\delta_0) = 0$, $\sigma_1(\delta_0) \neq 0$, 则当 $|\varepsilon| + |\delta - \delta_0|$ 充分小时, 系统(1.1)在 L 的邻域内至多有两个大环.

将大环与小环一起考虑可得另一主要结果:

定理 1.2 设(1.2)式成立, $M_0(\delta_0) = 0$, $\sigma_0(\delta_0) = 0$, $\delta_0 \in D$.

(i) 若 $\bar{f}, \bar{g}$ 属于 C^3 , $\sigma_1(\delta_0) = \sigma_{11}(\delta_0) + \sigma_{12}(\delta_0) \neq 0$, $\sigma_{11}(\delta_0)\sigma_{12}(\delta_0) \neq 0$, 则当 $|\varepsilon| + |\delta - \delta_0|$ 充分小时, 系统(1.1)在 L 的邻域内至多有 5 个极限环. 如果再设 $\delta \in \mathbb{R}^3$, $M_{10}(\delta_0) = M_{20}(\delta_0) = 0$, $\det \frac{\partial(M_{10}, M_{20}, \sigma_0)}{\partial(\delta_1, \delta_2, \delta_3)}(\delta_0) \neq 0$, 则对 $k = 1, 2$, 系统(1.1)可以有 k 个大环及 $5 - k$ 个小环.

(ii) 若 $\bar{f}, \bar{g}$ 属于 C^∞ , 且 $\sigma_1(\delta_0) \neq 0$, $\sigma_{11}(\delta_0)\sigma_{12}(\delta_0) = 0$, $c_3(\delta_0) \neq 0$, 其中 $c_3(\delta)$ 为(1.4)式中的系数, 则当 $|\varepsilon| + |\delta - \delta_0|$ 充分小时, 系统(1.1)在 L 的邻域内至多有 6 个极限环. 如果再设 $\delta \in \mathbb{R}^4$, $M_{10}(\delta_0) = M_{20}(\delta_0) = 0$, $\det \frac{\partial(M_{10}, M_{20}, \sigma_0, \sigma_{1i})}{\partial(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)}(\delta_0) \neq 0$, 其中 $\sigma_{1i}(\delta_0) = 0$, $i = 1$ 或 2 , 则当 $k = 1, 2$ 时, 系统(1.1)可以有 k 个大环与 $6 - k$ 个小环.

用上述两个定理的证明方法可获得下列两个推论:

推论 1.1 考虑 C^3 系统(1.1). 设对 $\varepsilon = 0$, 系统(1.1)有孤立的双同宿环 $L = L_1 \cup L_2$.

(i) 若 $\sigma_0 \equiv (f_x + g_y)(0, 0) = 0$, $\sigma_1 \equiv \oint_L (f_x + g_y) dt = \sum_{i=1}^2 \oint_{L_i} (f_x + g_y) dt \equiv \sigma_{11} + \sigma_{12} \neq 0$, 则当 $\delta \in D$, ε 充分小时, 系统(1.1)在 L 的邻域内至多有两个大环.

(ii) 若 $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_{11}\sigma_{12} \neq 0$, 则当 $\delta \in D$, ε 充分小时系统(1.1)在 L 的邻域内至多有 5 个极限环.

(iii) 设 $\bar{f}, \bar{g} \in C^7$. 若 $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_{11}\sigma_{12} = 0$, $R_1 \neq 0$, 其中 R_1 为系统(1.1) ($\varepsilon = 0$) 在

原点的一阶鞍点量, 则当 $\delta \in D, \epsilon$ 充分小时, 系统(1.1)在 L 的邻域内至多有 6 个极限环.

推论 1.2 考虑 C^3 系统, 设当 $\epsilon = 0$ 时, 系统(1.1)有一同宿轨 L .

(i) 若 $\sigma_0 = 0, \sigma_1 = \oint_L (f_x + g_y) dt \neq 0$, 则当 $\delta \in D, \epsilon$ 充分小时, 系统(1.1)在 L 附近至多有两个极限环.

(ii) 设(1.2)式成立. 若 $M_0(\delta_0) = 0, \sigma_0(\delta_0) = 0, \sigma_1(\delta_0) = \oint_L (f_x + g_y)(x, y, 0, \delta_0) dt \neq 0$, 则当 $|\epsilon| + |\delta - \delta_0|$ 充分小时, 系统(1.1)在 L 附近至多有两个极限环.

注 1.1 在双同宿环的情况, 条件 $\sigma_0 \neq 0$ 蕴含 L 附近至多有一个极限环的存在性^[5].

注 1.2 在推论 1.1 (iii) 中, 要求 $\bar{f}, \bar{g} \in C^7$, 是为了能够应用文献[4]的主要结果.

注 1.3 在推论 1.2 中, 只需 $\bar{f}, \bar{g} \in C^3$. 而文献[4]和[1]分别要求 $\bar{f}, \bar{g} \in C^5$ 和 C^∞ .

注 1.4 设(1.2)式成立, 双同宿环 L 顺时针定向, 并且当 $h \rightarrow 0+0$ 时, $L_h \rightarrow L$. 又设(1.4)式对 $0 < h \ll 1$ 成立, 则由文献[2]中方法可证(1.4)式中的系数 c_1 与 c_2 满足

$$c_1(\delta) = 2r'_\epsilon(0, \delta), \quad c_2(\delta) = \oint_L (f_{0x} + g_{0y})_{\epsilon=0} dt, \quad \text{当 } c_1(\delta) = 0.$$

因此, 定理 1.1 意味着, 如果 $c_0(\delta_0) = c_1(\delta_0) = 0, c_2(\delta_0) \neq 0$, 则当 $|\epsilon| + |\delta - \delta_0|$ 充分小时, 系统(1.1)在 L 附近至多有两个极限环. 一般地有:

猜想 如果存在 $m \geq 3$, 使得

$$c_j(\delta_0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad c_m(\delta_0) \neq 0,$$

则当 $|\epsilon| + |\delta - \delta_0|$ 充分小时, 系统(1.1)在 L 附近至多有 m 个大环.

2 预备引理

为证定理 1.1, 先给出若干引理, 以下总设原点为系统(1.1)的鞍点, 且系统(1.1)为 C^3 系统. 首先, 由文献[4]知:

引理 2.1 存在 C^3 的局部变换

$$T(\lambda): \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T_1(\lambda) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(|x, y|^2), \quad (2.1)$$

把系统(1.1)变为

$$\dot{u} = \alpha_1(\lambda)u(1 + h_1(u, v, \lambda)), \quad \dot{v} = \alpha_2(\lambda)v(1 + h_2(u, v, \lambda)), \quad (2.2)$$

其中 $\lambda = (\epsilon, \delta), h_i = uv h_{i0} \in C^2, h_{i0} \in C^0, i = 1, 2$.

现在对(2.2)式来定义一 Dulac 映射. 设

$$l'_1 = \{(u, v) \mid v = p, 0 \leq u \leq p\}, \quad l'_2 = \{(u, v) \mid u = p, 0 \leq v \leq p\},$$

此处 $p > 0$ 为小常数. 记 $P_{10} = (0, p), P_{20} = (p, 0)$. 对任意 $0 < u_1 < p$, 从点 $P(u_1, p) \in l'_1$ 出发的正半轨与 l'_2 交于某点 $Q(p, q(u_1, \lambda))$. 称 $q: l'_1 \rightarrow l'_2$ 为(2.2)式的 Dulac 映射. 设

$$T_0 = T(\lambda)_{\epsilon=0}, \quad A_{i0} = T_0^{-1}(P_{i0}), \quad i = 1, 2. \quad (2.3)$$

因此 A_{10}, A_{20} 与 p 有关, 且在原点附近系统(1.1)有分界线 L_ϵ^s 和 L_ϵ^u , 使得 L_0^s 过点 A_{10}, L_0^u 过点 A_{20} , 设 l_1 与 l_2 分别是在点 A_{10}, A_{20} 处正交于 $L_\epsilon^s|_{\epsilon=0} = L_0^s$ 和 $L_\epsilon^u|_{\epsilon=0} = L_0^u$ 的截线. l_i 有方向向量

$$n_i = \frac{(-g(A_{i0}), f(A_{i0}))}{\sqrt{f^2(A_{i0}) + g^2(A_{i0})}}, \quad i = 1, 2. \quad (2.4)$$

设 A_i 为系统(1.1)过点 $T^{-1}(\lambda)(P)$ 的轨道在原点附近与 l_i 的交点, $i = 1, 2$, 则

$$A_1 = A_{10} + an_1, A_2 = A_{20} + G(a, \lambda, p)n_2. \quad (2.5)$$

由文献[6, 7]知下列引理成立:

引理 2.2 存在 C^3 函数

$$W_1(u, \lambda, p) = a_1^s(\lambda) + M_1(p, \lambda)u + O(u^2),$$

$$W_2(u, \lambda, p) = a_2^s(\lambda) + M_2(p, \lambda)u + O(u^2),$$

满足

$$a_1^s(\lambda) = O(\varepsilon), a_2^s(\lambda) = O(\varepsilon), \lim_{p \rightarrow 0} M_i(p, \lambda)|_{\varepsilon=0} = \beta_i \sin \theta, i = 1, 2,$$

$$\beta_1 = \left| T_{10}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|, \beta_2 = \left| T_{10}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|, T_{10} = T_1(\lambda)_{\varepsilon=0},$$

而 θ 为 L_0^s 与 L_0^u 在原点的交角, 使得

$$a = W_1(u_1, \lambda, p), G(a, \lambda, p) = W_2(q(u, \lambda), \lambda, p).$$

由引理 2.2 即得:

推论 2.1 (i) $A_{1\varepsilon}^s \equiv L_\varepsilon^s \cap l_1 = A_{10} + a_1^s(\lambda)n_1$, $A_{2\varepsilon}^u \equiv L_\varepsilon^u \cap l_2 = A_{20} + a_2^u(\lambda)n_2$;

(ii) $G = W_2 \circ q \circ W_1^{-1}$.

引理 2.3 设 $G(u, v, \lambda)$ 为 C^1 函数且 $G(0, 0, \lambda) = 0$, 则

(i) $\left(\int_{P_{10}O} + \int_{OP_{20}} \right) G dt = R(\lambda, p) = O(p) \in C^1$;

(ii) 对每一个 $0 < k < 1/2$, $\int_{PQ} G dt = R(\lambda, p) + o(u_1^k)$,

(iii) 若 $G = O(uv)$, 则 $\int_{PQ} G dt = o(u_1^k)$.

证 由(2.2)式知

$$\left(\int_{P_{10}O} + \int_{OP_{20}} \right) G dt = \int_p^0 \frac{G(0, v, \lambda)}{\alpha_2 v} dv + \int_0^p \frac{G(u, 0, \lambda)}{\alpha_1 u} du.$$

注意到 $G \in C^1$, $G(0, 0, \lambda) = 0$, 结论(i)得证.

设 $A(a, a)$ 为轨道弧 $\widehat{PQ}$ 与直线 $u = v$ 的交点. 由于 $G(u, v, \lambda) = uG_1(u) + vG_2(u, v)$, $G_i \in C^0$, $i = 1, 2$, 故

$$\left(\int_{AQ} - \int_{OP_{20}} \right) G dt = \int_a^p \frac{uG_1(u) + vG_2(u, v)}{\alpha_1 u(1 + h_1(u, v, \lambda))} du - \int_0^p \frac{uG_1(u)}{\alpha_1 u} du.$$

注意到沿 $\widehat{AQ}$ 有 $h_1 = O(uv)$, $v \leq a$, 则

$$\int_a^p \left[\frac{G_1(u)}{\alpha_1(1 + h_1(u, v, \lambda))} - \frac{G_1(u)}{\alpha_1} \right] du = \int_a^p \frac{-G_1(u)h_1(u, v, \lambda)}{\alpha_1(1 + h_1(u, v, \lambda))} du = O(ap),$$

$$\int_a^p \frac{vG_2(u, v)du}{\alpha_1 u(1 + h_1)} = O\left(\int_a^p \frac{vdu}{u}\right) = O\left(a \int_a^p \frac{du}{u}\right) = O(|a \ln a|).$$

因此,

$$\left(\int_{AQ} - \int_{OP_{20}} \right) G dt = O(|a \ln a|). \quad (2.6)$$

同理,

$$\left(\int_{PA} - \int_{P_0O} \right) G dt = O(|a \ln a|). \quad (2.7)$$

由(2.2)式知

$$\frac{dv}{du} = \frac{\alpha_2 v(1+h_2)}{\alpha_1 u(1+h_1)} = -r \frac{v}{u} (1 + (H(u, v, \lambda))), \quad (2.8)$$

其中 $H = O(uv) \in C^2$. 对任意 $0 < l < 1$, 当 p 适当小, 且 $|u| \leq p$, $|v| \leq p$ 时, 有 $1 + H > l$. 设方程 $\frac{dv}{du} = -rl \frac{v}{u}$ 过点 P 的解与直线 $u = v$ 的交点为 $B(b, b)$, 则

$$\int_p^b \frac{dv}{v} = -rl \int_{u_1}^b \frac{du}{u},$$

由此即得 $b = p^{\frac{1}{1+rl}} u_1^K$, 其中 $K = \frac{rl}{1+rl}$. 于是由比较定理知 $a \leq b = O(u_1^K)$. 由于 $K < \frac{r}{1+r} = 1/2 + O(\varepsilon)$, 故当 $|\varepsilon|$ 充分小时, $k < K$, 从而由(2.6)与(2.7)式, 有

$$\int_{PQ} G dt - \left(\int_{P_{10}O} + \int_{OP_{20}} \right) G dt = O(u_1^K \ln u_1^K) = o(u_1^k).$$

于是, 结合结论(i)即得结论(ii). 结论(iii)直接由(i)与(ii)可得. 证毕.

引理 2.4 设 $v = v(u, u_1, \lambda)$ 为 $\widehat{PQ}$ 的表达式, 且 $v(u_1, u_1, \lambda) = p$, 则

$$v(u, u_1, \lambda) = pu_1^r u^{-r} \exp\left(-r \int_{u_1}^u \frac{H}{u} du\right) = pu_1^r u^{-r} (1 + O(p)),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial u_1}(u, u_1, \lambda) &= rpu_1^{r-1} u^{-r} (1 + H(u_1, p, \lambda)) \exp\left(-r \int_{u_1}^u \frac{H + vH_v}{u} du\right) \\ &= rpu_1^{r-1} u^{-r} (1 + O(p)). \end{aligned}$$

证 对(2.8)式应用常数变易公式得

$$v(u, u_1, \lambda) = p \exp\left(-r \int_{u_1}^u \frac{1+H}{u} du\right) = pu_1^r u^{-r} \exp\left(-r \int_{u_1}^u \frac{H}{u} du\right).$$

由(2.8)式, $\frac{\partial v}{\partial u_1}$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial v}{\partial u_1} \right)'_u = -\frac{r}{u} (1 + H + vH_v) \frac{\partial v}{\partial u_1}.$$

对等式 $v(u_1, u_1, \lambda) = p$ 关于 u_1 求导, 且应用(2.8)式可得

$$\left(\frac{\partial v}{\partial u_1} \right) \Big|_{u=u_1} = -\frac{\partial v}{\partial u} \Big|_{u=u_1} = \frac{rp}{u_1} (1 + H(u_1, p, \lambda)).$$

因此可解得

$$\frac{\partial v}{\partial u_1} = \left(\frac{\partial v}{\partial u_1} \right)_{u=u_1} \exp\left(-r \int_{u_1}^u \frac{1+H+vH_v}{u} du\right)$$

$$= r p u_1^{-r} u^{-r} (1 + H(u_1, p, \lambda)) \exp \left(-r \int_{u_1}^u \frac{H + v H_v}{u} du \right).$$

最后, 注意到 $H, H + v H_v = O(uv)$, 有 $\int_{u_1}^u \frac{H}{u} du, \int_{u_1}^u \frac{H + v H_v}{u} du = O(u - u_1) = O(p)$. 证毕.

引理 2.5 Dulac 映射 q 及其导数具有下述形式:

$$q(u_1, \lambda) = p^{1-r} u_1^r (1 + \varphi_0(u_1, \lambda)),$$

$$q_{u_1}(u_1, \lambda) = r p^{1-r} u_1^{r-1} (1 + \varphi_1(u_1, \lambda)),$$

其中 $\varphi_i = o(u_1^k)$, $i=0, 1$, 且 $u_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_1} = o(u_1^k)$, $0 < k < 1/2$.

证 由 $q(u_1, \lambda) = v(p, u_1, \lambda)$ 和引理 2.4 知

$$q(u_1, \lambda) = p^{1-r} u_1^r \exp \left(-r \int_{u_1}^p \frac{H}{u} du \right), \quad (2.9)$$

$$q_{u_1}(u_1, \lambda) = r p^{1-r} u_1^{r-1} (1 + H(u_1, p, \lambda)) \exp \left(-r \int_{u_1}^p \frac{H + v H_v}{u} du \right). \quad (2.10)$$

由引理 2.3 (iii),

$$\int_{u_1}^p \frac{H du}{u} = \int_{pQ} \frac{H dt}{\alpha_1 (1 + h_1)} = o(u_1^k), \quad \int_{u_1}^p \frac{H + v H_v}{u} du = o(u_1^k).$$

将上式代入 (2.9) 与 (2.10) 式得

$$q = p^{1-r} u_1^r (1 + \varphi_0), \quad q_{u_1} = r p^{1-r} u_1^{r-1} (1 + \varphi_1),$$

且 $\varphi_i = o(u_1^k)$, $i=0, 1$. 另一方面,

$$q_{u_1} = r p^{1-r} u_1^{r-1} \left(1 + \varphi_0 + \frac{u_1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_1} \right),$$

从而 $u_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_1} = r(\varphi_1 - \varphi_0) = o(u_1^k)$. 证毕.

对 $x > 0$ 充分小, 设

$$\omega_1(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{1-x^\alpha}{\alpha}, & \alpha \neq 0, \\ -\ln x, & \alpha = 0, \end{cases} \quad \omega_2(x, \alpha) = x^{-\alpha} \omega_1(x, \alpha).$$

引理 2.6 设 $\bar{G}(u, v, \lambda) = G_0(\lambda) + G(u, v, \lambda) \in C^1$, 且 $G(0, 0, \lambda) = 0$, 则

(i)

$$\int_{pQ} \bar{G} dt = -\frac{G_0}{\alpha_1} \ln \frac{u_1}{p} + R(\lambda, p) + \varphi(u_1, \lambda);$$

(ii)

$$\left(\int_{pQ} \bar{G} dt \right)'_{u_1} = -\frac{G_0}{\alpha_1 u_1} + \phi(u_1, \lambda),$$

其中 $R = O(p) \in C^1$, $\varphi = o(u_1^k)$, $|\phi| \leq M[1 + (p + |r-1|)\omega_1^*]$, $\omega_1^* = \omega_1^*(u_1) = \omega_1(u_1/p, r-1)$.

证 我们有

$$\int_{PQ} G_0 dt = G_0 \int_{u_1}^p \frac{du}{\alpha_1 u(1+h_1)} = -\frac{G_0}{\alpha_1} \ln \frac{u_1}{p} - G_0 \int_{PQ} h_1 dt.$$

由引理 2.3,

$$\int_{PQ} G dt = R(\lambda, p) + o(u_1^k), \quad \int_{PQ} h_1 dt = o(u_1^k).$$

因此

$$\int_{PQ} \bar{G} dt = -\frac{G_0}{\alpha_1} \ln \frac{u_1}{p} + R(\lambda, p) + \varphi(u_1, \lambda), \quad \varphi = o(u_1^k).$$

结论 (i) 得证. 由上述讨论知

$$\int_{PQ} \bar{G} dt = -\frac{G_0}{\alpha_1} \ln \frac{u_1}{p} + \int_{u_1}^p \frac{G - G_0 h_1}{\alpha_1 u(1+h_1)} du.$$

设

$$\frac{G - G_0 h_1}{1+h_1} = uG_1(u, v) + vG_2(v),$$

则有

$$\int_{PQ} \bar{G} dt = -\frac{G_0}{\alpha_1} \ln \frac{u_1}{p} + I_1(u_1) + I_2(u_1), \quad (2.11)$$

其中

$$I_1(u_1) = \int_{u_1}^p \frac{G_1(u, v)}{\alpha_1} du, \quad I_2(u_1) = \int_{u_1}^p \frac{vG_2(v)}{\alpha_1} u du,$$

易见

$$I'_1(u_1) = -\frac{1}{\alpha_1} G_1(u_1, p) + \int_{u_1}^p \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial G_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u_1} du.$$

由引理 2.4 知 $\frac{\partial v}{\partial u_1} = rpu_1^{-1}u^{-r}(1+O(p))$, 故存在 $M > 0$, 使得

$$|I'_1(u_1)| \leq M \left(1 + pr \int_{u_1}^p u_1^{-1} u^{-r} du \right) = M(1 + rpx_1^*). \quad (2.12)$$

设 $u = u(v, u_1)$ 为 $v = v(u, u_1, \lambda)$ 的反函数, 且 $u(p, u_1) = u_1$. 由 (2.8) 式,

$$\frac{du}{dv} = -\frac{u}{rv}(1 + \tilde{H}), \quad \tilde{H} = O(uv) \in C^2.$$

因此, $\frac{\partial u}{\partial u_1}$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial u}{\partial u_1} \right)'_v = -\frac{1 + \tilde{H} + u\tilde{H}_u}{rv} \frac{\partial u}{\partial u_1},$$

且 $\frac{\partial u}{\partial u_1} \Big|_{v=p} = 1$, 于是可解得

$$\frac{\partial u}{\partial u_1} = \exp \left(- \int_p^v \frac{1 + \tilde{H} + u\tilde{H}_u}{rv} dv \right) = \left(\frac{v}{p} \right)^{-\frac{1}{r}} (1 + O(p)).$$

注意到

$$I_2(u_1) = \int_{u_1}^p \frac{vG_2(v)}{\alpha_1 u} du = \int_p^q \frac{G_2(v)}{\alpha_1 r(1+H)} dv,$$

则有

$$I'_2 = -\frac{G_2(q)q'u_1}{\alpha_1 r[1+H(p,q,\lambda)]} - \int_p^q O(v)\left(\frac{v}{p}\right)^{-\frac{1}{r}} dv.$$

由于

$$\left| \int_p^q v\left(\frac{v}{p}\right)^{-\frac{1}{r}} dv \right| = \left| \frac{rp^2}{2r-1} \left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{2r-1}{r}} - 1 \right] \right| \leq \frac{rp^2}{2r-1},$$

利用引理 2.5 可得

$$|I'_2(u_1)| \leq \bar{M} \left[\left(\frac{u_1}{p}\right)^{r-1} + p^2 \right] = \bar{M}(1 + (1-r)\omega_1^* + p^2), \quad (2.13)$$

其中 $\bar{M} > 0$. 于是由(2.11) ~ (2.13)式即得结论(III). 证毕.

引理 2.7 存在常数 $N > 0$, 使得

$$\left| \frac{\partial v}{\partial \epsilon} \right| \leq pN \left(\frac{u_1}{u} \right)^r \left| \ln \frac{u_1}{u} \right|, \quad 0 < u_1 \leq u \leq p.$$

证 由(2.8)式知

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \epsilon} \right)'_u = -\frac{1}{u} \left[r(1+H+vH_v) \frac{\partial v}{\partial \epsilon} + r'_\epsilon v(1+H) + rvH'_\epsilon \right].$$

又从 $v(u_1, u_1, \lambda) = p$ 知 $\left. \frac{\partial v}{\partial \epsilon} \right|_{u=u_1} = 0$, 因此可解得

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \epsilon} &= -\int_{u_1}^u \exp\left(-r \int_s^u \frac{1+H+vH_v}{t} dt\right) \frac{v(r'_\epsilon(1+H) + rH'_\epsilon)}{s} ds \\ &= -\int_{u_1}^u \frac{v}{s} \left(\frac{s}{u}\right)^r (r'_\epsilon(1+H) + rH'_\epsilon) \exp\left(-\int_s^u O(v) dt\right) ds. \end{aligned}$$

因此, 由引理 2.4 知存在 $N > 0$, 使得

$$\left| \frac{\partial v}{\partial \epsilon} \right| \leq pN \left| \int_{u_1}^u \frac{1}{s} \left(\frac{u_1}{s}\right)^r \left(\frac{s}{u}\right)^r ds \right| = pN \left(\frac{u_1}{u}\right)^r \left| \ln \frac{u_1}{u} \right|.$$

3 定理的证明

定理 1.1 的证 如前, 取点 P_{i0} , $i = 1, 2$, 设 $P_{30} = -P_{10}$, $P_{40} = -P_{20}$. 又设 A_{i0} 满足(2.3)式, I_i 为过 A_i 的截线, 且其方向向量 n_i 由(2.4)式给出, $i = 1, 2, 3, 4$. 又如前定义 Dulac 映射 $q_i(\cdot, \lambda)$, $i = 1, 2$, 在 A_{10} 附近取 $A_1 \in I_1$. 设系统(1.1)过 A_1 的正半轨交 I_i 于点 A_i , $i = 1, \dots, 5$, 其中 $I_5 = I_1$, 则有

$$A_i = A_{i0} + a_i n_i, \quad i = 1, \dots, 5,$$

这里给出 4 个映射如下:

$$G_1(\cdot, \lambda): I_1 \rightarrow I_2, \quad a_2 = G_1(a_1, \lambda),$$

$$\begin{aligned} G_2(\cdot, \lambda): I_3 &\rightarrow I_4, \quad a_4 = G_2(a_3, \lambda), \\ R_1(\cdot, \lambda): I_2 &\rightarrow I_3, \quad a_3 = R_1(a_2, \lambda), \\ R_2(\cdot, \lambda): I_4 &\rightarrow I_1, \quad a_5 = R_2(a_4, \lambda). \end{aligned} \quad (3.1)$$

前两个映射称为系统(1.1)的 Dulac 映射, 后两个称为正则映射. 于是得到下列后继函数:

$$\begin{aligned} F(\cdot, \lambda) &= R_2 \circ G_2 \circ R_1 \circ G_1 - Id, \\ F(a_1, \lambda) &= a_5 - a_1 = (A_5 - A_1)n_1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

由引理 2.1, 推论 2.1 及(3.1)式知, 存在 C^3 函数

$$\begin{aligned} W_i(u, \lambda) &= a_i^s(\lambda) + M_i(\lambda, p)u + O(u^2), \quad i = 1, 3, \\ W_j(u, \lambda) &= a_j^u(\lambda) + M_j(\lambda, p)u + O(u^2), \quad j = 2, 4, \end{aligned}$$

使得当 $a_1 = W_1(u_1, \lambda)$ 时, 成立

$$\begin{aligned} a_3 &= (R_1 \circ G_1)(a_1, \lambda) = W_3(u_3, \lambda), \\ a_2 &= G_1(a_1, \lambda) = W_2(q_1(u_1, \lambda), \lambda), \\ a_4 &= G_2(a_3, \lambda) = W_4(q_2(u_3, \lambda), \lambda). \end{aligned} \quad (3.3)$$

令

$$\bar{R}_2 = W_1^{-1} \circ R_2 \circ W_4, \quad \bar{R}_1 = W_3^{-1} \circ R_1 \circ W_2, \quad (3.4)$$

则从(3.3)式知

$$u_3 = W_3^{-1}(a_3, \lambda) = (W_3^{-1} \circ R_1 \circ G_1 \circ W_1)(u_1, \lambda) = (\bar{R}_1 \circ q_1)(u_1, \lambda). \quad (3.5)$$

利用(3.3)~(3.5)式, 从(3.2)式可得

$$F(a_1, \lambda) = W_1(F_0 + u_1, \lambda) - W_1(u_1, \lambda) = W_1'(\xi, \lambda)F_0(u_1, \lambda), \quad (3.6)$$

其中 $\xi = u_1 + \theta F_0(u_1, \lambda)$, $0 < \theta < 1$, 而

$$F_0(u_1, \lambda) = (\bar{R}_2 \circ q_2 \circ \bar{R}_1 \circ q_1)(u_1, \lambda) - u_1. \quad (3.7)$$

由(3.4)式, $\bar{R}_1, \bar{R}_2$ 可写成

$$\bar{R}_i(u, \lambda) = b_i(\lambda) + N_i(\lambda, p)u + O(u^2), \quad i = 1, 2, \quad (3.8)$$

其中 $b_i = O(\epsilon)$, $N_i = N_{i0}(p) + O(\epsilon)$, $\lim_{p \rightarrow 0} N_{i0}(p) = N_{i0}^+ > 0$, $i = 1, 2$.

现设(1.2)式成立, 则有 $F_0(u_1, 0, \delta) \equiv 0$. 从而, $F_0 = (\bar{R}_2 \circ q_2 \circ \bar{R}_1 \circ q_1 - \bar{R}_{20} \circ q_{20} \circ \bar{R}_{10} \circ q_{10}) + (\bar{R}_{20} \circ q_{20} \circ \bar{R}_{10} \circ q_{10} - \bar{R}_{20} \circ q_{20} \circ \bar{R}_{20} \circ q_{10}) \equiv F_1 + F_2$, 其中 $\bar{R}_{i0} = \bar{R}_i|_{\epsilon=0}$, $q_{i0} = q_i|_{\epsilon=0}$, $i = 1, 2$. 由(3.5)式及中值定理, 存在 $\theta_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, 3$, 使得

$$\begin{aligned} F_1 &= (\bar{R}_2 \circ q_2)'_{\epsilon}(u_3, \theta_1 \epsilon, \delta) \epsilon, \\ F_2 &= (R_{20} \circ q_{20})'_{u_3}(u_{30} + \theta_3(u_3 - u_{30}))(\bar{R}_1 \circ q_1)'_{\epsilon}(u_1, \theta_2 \epsilon, \delta) \epsilon, \end{aligned}$$

其中 $u_{30} = \bar{R}_{10} \circ q_{10}$. 由引理 2.7, 有

$$|q'_{1\epsilon}| = \left| \frac{\partial v}{\partial \epsilon} \right|_{u=p} \leq pN\left(\frac{u_1}{p}\right)^r \left| \ln \frac{u_1}{p} \right|.$$

同理,

$$|q'_{2\epsilon}| \leq pN\left(\frac{u_3}{p}\right)^r \left| \ln \frac{u_3}{p} \right|.$$

又由引理 2.5, 有

$$q_1 = O(u'_1), q_2 = O(u'_3), (q_{20})'_{u_3} = [u_3(1 + \varphi_0(u_3, 0, \delta))]'_{u_3} = O(1).$$

因此,由(3.8)式知

$$F_1 = \varepsilon \left[\frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon} + O\left(\left(\frac{u_3}{p}\right)^r \ln \frac{u_3}{p}\right) \right],$$

$$F_2 = \varepsilon \left[\frac{\partial b_1}{\partial \varepsilon} + O\left(\left(\frac{u_1}{p}\right)^r \ln \frac{u_1}{p}\right) \right].$$

因此,由(3.6)式知

$$F(a_1, \lambda) = \varepsilon F^*(u_1, \lambda), u_1 = W_1^{-1}(a_1, \lambda),$$

$$F^*(u_1, \lambda) = \frac{\partial b_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon} + O\left(\left(\frac{u_1}{p}\right)^r \ln \frac{u_1}{p} + \left(\frac{u_3}{p}\right)^r \ln \frac{u_3}{p}\right). \quad (3.9)$$

若取 $A_1 \in L_h \cap I_1$, $h > 0$, 则 $a_1 = a_1(h)$, $a_1(0+0) = 0$. 此时有

$$H(A_5) - H(A_1) = \int_{A_1 A_5} dH = \varepsilon M(h, \delta) + O(\varepsilon^2).$$

另一方面,由中值定理及(3.2)式知

$$H(A_5) - H(A_1) = [|\operatorname{grad} H(A_1)| + O(|a_5 - a_1|)](a_5 - a_1)$$

$$= (|\operatorname{grad} H(A_{10})| + O(|\varepsilon| + |h|))\varepsilon F^*(u_1, \lambda).$$

因此,

$$F^*(0+0, 0, \delta) = \left(\frac{\partial b_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \frac{M(0+0, \delta)}{|\operatorname{grad} H(A_{10})|}. \quad (3.10)$$

设 $\tau = \tau(a_1, \lambda)$ 表示系统(1.1)从 $A_1 \in I_1$ 出发的解到达 $A_5 \in I_1$ 所需的时间,则由文献[7, 8]知有公式

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = -1 + \frac{1}{1 + \mu(F)} \exp \int_0^\tau [f_x + g_y + \varepsilon(f_{0x} + g_{0y})] dt$$

$$= -1 + \frac{1}{1 + \mu(F)} \exp \left[\varepsilon \left(\Delta(\varepsilon, \delta) \tau + \int_0^\tau G dt \right) \right], \quad (3.11)$$

其中 $\mu(F) = O(F) \in C^1$, $\Delta(\varepsilon, \delta) = (f_{0x} + g_{0y})(0, \varepsilon, \delta)$, $G(x, y, \lambda) = f_{0x} + g_{0y} - \Delta = O(|x, y|)$. 显然

$$\int_0^\tau G dt = \left(\int_{A_1 A_2} + \int_{A_2 A_3} + \int_{A_3 A_4} + \int_{A_4 A_5} \right) G dt. \quad (3.12)$$

设 $P = (u_1, p)$, $Q = (p, q_1)$, 且 (u, v) , (x, y) 满足(2.1)式, 则有

$$\int_{A_1 A_2} G dt = c_{11}(a_1, \lambda) + c_{12}(a_2, \lambda) + \int_{PQ} \bar{G}(u, v, \lambda) dt,$$

其中 $\bar{G} = O(|u, v|)$, $c_{11} = O(|a_1, \varepsilon|)$, $c_{12} = O(|a_2, \varepsilon|) \in C^2$. 由引理 2.6, 又有

$$\int_{PQ} \bar{G} dt = R_1(\lambda, p) + \varphi_1,$$

且 $R_1 = O(p) \in C^1$, $\varphi_1 = o(u_1^k)$, $\varphi'_{1u_1} = O(\omega_1^*(u_1))$. 因此可得

$$\int_{A_1 A_2} G dt = c_{11}(a_1, \lambda) + c_{12}(a_2, \lambda) + R_1(\lambda, p) + \varphi_1. \quad (3.13)$$

同理有

$$\int_{A_3 A_4} G dt = c_{31}(a_3, \lambda) + c_{32}(a_4, \lambda) + R_2(\lambda, p) + \varphi_3, \quad (3.14)$$

其中 $c_{31} = O(|a_3, \varepsilon|)$, $c_{32} = O(|a_4, \varepsilon|) \in C^2$, $R_2 = O(p) \in C^1$, $\varphi_3 = o(u_3^k)$, $\varphi'_{3u_3} = O(\omega_1^*(u_3))$. 沿正则弧 $\widehat{A_2 A_3}$ 与 $\widehat{A_4 A_5}$, 有

$$\int_{A_2 A_3} G dt = c_{21}(a_2, \lambda) \in C^2, \int_{A_4 A_5} G dt = c_{41}(a_4, \lambda) \in C^2. \quad (3.15)$$

将(3.13)~(3.15)式代入(3.12)式可得

$$\int_0^\tau G dt = R(\lambda, p) + \sum_{i=1}^4 c_i(a_i, \lambda) + \varphi_1(u_1, \lambda) + \varphi_3(u_3, \lambda), \quad (3.16)$$

其中 $R = O(p)$, $c_i \in C^2$, $i = 1, \dots, 4$, $\varphi_j = o(u_j^k)$, $\varphi'_{ju_j} = O(\omega_1^*(u_j))$, $j = 1, 3$. 于是从(3.16)式推知

$$\lim_{(\varepsilon, u_1) \rightarrow (0, 0)} \int_0^\tau G dt = \lim_{u_1 \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\tau G dt = \oint_L G|_{\varepsilon=0} dt \in \mathbb{R}.$$

设 $\delta_0 \in D$, 使得 $M_0(\delta_0) = \Delta(0, \delta_0) = 0$, 则存在连续函数 $\varphi(u_1, \lambda)$, $\varphi(0, 0, \delta_0) = 0$, 使得

$$\int_0^\tau G dt = \sigma_1(\delta_0) + \varphi(u_1, \lambda). \quad (3.17)$$

由(3.8)、(3.3)和(3.5)式及引理 2.5 知

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial u_1} &= M_1 + O(u_1), \\ \frac{\partial a_2}{\partial u_1} &= [M_2 + O(q_1)] r p^{1-r} u_1^{r-1} (1 + o(u_1^k)), \\ \frac{\partial a_3}{\partial u_3} &= [M_3 + O(u_3)], \\ \frac{\partial u_3}{\partial u_1} &= N_1 r p^{1-r} u_1^{r-1} (1 + o(u_1^k)), \\ \frac{\partial a_4}{\partial u_3} &= (M_4 + O(q_2)) r p^{1-r} u_3^{r-1} (1 + o(u_3^k)). \end{aligned} \quad (3.18)$$

因此, 由(3.16)式并注意到 $u_j^{r-1} = o(\omega_1^*(u_j))$, $j = 1, 3$, 得

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \int_0^\tau G dt = O(\omega_1^*(u_1) + \omega_1^*(u_3) u_1^{r-1}). \quad (3.19)$$

注意到

$$\tau = \left(\int_{A_1 A_2} + \int_{A_2 A_3} + \int_{A_3 A_4} + \int_{A_4 A_5} \right) dt,$$

由引理 2.6 与(3.16)式, 类似地有

$$\tau = -\frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{u_1}{p} - \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{u_3}{p} + \sum_{i=1}^4 \bar{c}_i(a_i, \lambda) + \bar{R}(\lambda) + \bar{\varphi}_1(u_1, \lambda) + \bar{\varphi}_3(u_3, \lambda),$$

其中 $\bar{R} = O(p)$, $\bar{c}_i \in C^2$, $i = 1, \dots, 4$, $\bar{\varphi}_j = o(u_j^k)$, $\bar{\varphi}'_{ju_j} = O(\omega_1^*(u_j))$, $j = 1, 3$. 于是利用

(3.18)式,类似于(3.17)与(3.19)式可得

$$\begin{aligned}\tau &= -\frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{u_1}{p} (1 + K_1(u_1, \lambda)) - \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{u_3}{p} (1 + K_3(u_3, \lambda)), \\ \frac{\partial \tau}{\partial u_1} &= -\frac{1}{\alpha_1 u_1} (1 + J_1(u_1, \lambda)) - \frac{1}{\alpha_1 u_3} (1 + J_3(u_3, \lambda)) \frac{\partial u_3}{\partial u_1},\end{aligned}\quad (3.20)$$

其中 $K_j(u_j, \lambda) = O(|\ln u_j|^{-1})$, $J_i(u_j, \lambda) = O(u_j \omega_j^*(u_j))$, $j = 1, 3$. 由(3.11)式又知

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial a_1} &= -1 + \exp(\varepsilon \tau \bar{F}(u_1, \lambda)), \\ \bar{F}(u_1, \lambda) &= \Delta + \frac{1}{\tau} \left[\int_0^\tau G dt - \bar{\mu}(F^*, \varepsilon) \right],\end{aligned}\quad (3.21)$$

其中,由(3.9)式知, $\bar{\mu}(F^*, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \mu(F)) = O(F^*) \in C^1$. 为证系统(1.1)在 L 附近至多有两个大环,需证 $\frac{\partial F}{\partial a_1}$ 关于 a_1 至多有 1 个根. 而由(3.21)式,只需证函数 $\bar{F}(u_1, \lambda)$ 关于 u_1 至多有 1 个根. 由于 $\frac{\partial F}{\partial a_1} = \varepsilon \frac{\partial F^*}{\partial u_1} (M_1^{-1} + O(u_1))$, 由(3.21)式有 $\bar{F}(u_1, \lambda) = 0$ 当且仅当 $\frac{\partial F^*}{\partial u_1} = 0$. 因此,只需证

$$\sigma_1(\delta_0) \frac{\partial \bar{F}}{\partial u_1} \Big|_{\bar{F}=0} = \sigma_1(\delta_0) \frac{\partial \bar{F}}{\partial u_1} \Big|_{\frac{\partial F^*}{\partial u_1}=0} > 0. \quad (3.22)$$

由(3.21)式中 $\bar{F}$ 之定义知

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial u_1} \Big|_{\frac{\partial F^*}{\partial u_1}=0} = \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial u_1} \left[\tau \left(\frac{\partial \tau}{\partial u_1} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial u_1} \int_0^\tau G dt - \int_0^\tau G dt + \bar{\mu}(F^*, \varepsilon) \right]. \quad (3.23)$$

由(3.9)、(3.10)和(3.17)式知

$$\int_0^\tau G dt - \bar{\mu}(F^*, \varepsilon) = \sigma_1(\delta_0) + \bar{\varphi}(u_1, \lambda), \quad (3.24)$$

其中 $\bar{\varphi}$ 连续且 $\bar{\varphi}(0+0, 0, \delta_0) = 0$. 由(3.19)与(3.20)式知

$$\tau \left(\frac{\partial \tau}{\partial u_1} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial u_1} \int_0^\tau G dt = \frac{u_1 u_3 \left[\ln \frac{u_1}{p} (1 + K_1) + \ln \frac{u_3}{p} (1 + K_3) \right]}{u_3 (1 + J_1) + u_1 (1 + J_3) \frac{\partial u_3}{\partial u_1}} \cdot O(K^*(u_1)),$$

其中 $K^*(u_1) = \omega_1^*(u_1) + \omega_1^*(u_3) u_1^{r-1}$. 由于 $K_j = o(1)$, $J_j = o(1)$, $j = 1, 3$, 及 $\frac{\partial u_3}{\partial u_1} = N_1 u_1^{r-1} (r p^{1-r} + o(u_1^k))$, 可知对固定的 $p > 0$, 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 与 $K_0 > 0$, 当 $u_1 + \varepsilon + |\delta - \delta_0| \leq \varepsilon_0$ 时,有

$$\begin{aligned}\left| \tau \left(\frac{\partial \tau}{\partial u_1} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial u_1} \int_0^\tau G dt \right| &\leq \frac{K_0 (u_1 u_3 (\ln u_1 + \ln u_3))}{u_3 + u_1^r N_1} K^*(u_1) \\ &\leq \frac{K_0 u_1 u_3 \ln(u_1 u_3) K^*(u_1)}{2 \sqrt{u_1^r u_3 N_1}} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } u_1 \rightarrow 0+).\end{aligned}$$

从而由(3.23)与(3.24)式知,当 $u_1 + \varepsilon + |\delta - \delta_0|$ 充分小时

$$\sigma_1(\delta_0) \tau^2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial u_1} \right)^{-1} \frac{\partial \bar{F}}{\partial u_1} \bigg|_{\frac{\partial F}{\partial u_1} = 0} = -\sigma_1^2(\delta_0) + o(1) < -\frac{1}{2} \sigma_1^2(\delta_0). \quad (3.25)$$

又由(3.20)与(3.22)式知 $\frac{\partial \tau}{\partial u_1} < 0$, 即得定理 1.1 的证明.

定理 1.2 的证 设

$$\sigma_1(\delta_0) \neq 0, \sigma_{11}(\delta_0) \sigma_{12}(\delta_0) \neq 0.$$

由推论 1.2, 在每个 L_i 附近系统(1.1)至多有两个小环, $i = 1, 2$. 因此由定理 1.1, 对 $\epsilon + |\delta - \delta_0|$ 充分小, 系统(1.1)在 L 的邻域内至多有 6 个极限环. 我们断言 6 个极限环不能出现. 为此, 设在 $(0, \delta_0)$ 附近存在 (ϵ, δ) , 使系统(1.1)有 6 个环, 记为 Γ_1, Γ_2 (大环)与 L_i, L_{i2} (小环, 且在 L_i 附近, $i = 1, 2$). 可设

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2, L_{i1} \subset L_{i2}, i = 1, 2.$$

为确定计, 可设 $\sigma_1(\delta_0) > 0$. 若 $\Delta(\epsilon, \delta) \geq 0$, 则由(3.11)与(3.24)式有

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a_1} &\geq -1 + \frac{1}{1 + \mu(F)} \exp\left(\epsilon \int_0^\tau G dt\right) \\ &= \frac{\epsilon}{1 + \mu(F)} [\sigma_1(\delta_0) + o(1)] > 0, \end{aligned}$$

这说明 F 关于 a_1 至多有 1 个根, 与两个大环的存在性矛盾. 因此 $\Delta(\epsilon, \delta) < 0$. 由(3.11)式有

$$\lim_{a_1 \rightarrow 0^+} \frac{\partial F}{\partial a_1} = -1.$$

由(3.21)与(3.22)式, 对 u_1 充分小, 又有

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_1^2} \frac{\partial a_1}{\partial u_1} \bigg|_{\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0} = \epsilon \tau \frac{\partial \bar{F}}{\partial u_1} \bigg|_{\bar{F} = 0} > 0.$$

因而, 若 $a_1^* < a_2^*$ 为 F 的两个根, 则

$$(-1)^i \frac{\partial F}{\partial a_1}(a_i^*, \lambda) > 0, i = 1, 2,$$

这表示 Γ_1 稳定, Γ_2 不稳定. 同理可证 L_{12}, L_{22} 稳定, 而 L_{11}, L_{21} 不稳定. 设 R 为以 $|L_{12}, L_{22}, \Gamma_1|$ 为边界的多连通区域. 由于 L_{12}, L_{22}, Γ_1 为稳定的, 原点是系统(1.1)在 R 中仅有的奇点, 由 Poincaré-Bendixson 理论, 系统(1.1)必有一不稳定环或同宿环. 由定理 1.1 与推论 1.2, 极限环的情况不能发生; 又有 $\Delta(\epsilon, \delta) < 0$, 同宿环若存在必是稳定的, 这也不可能, 矛盾, 于是得证系统(1.1)在 L 附近至多有 5 个环. 为证 5 个环可以出现, 设

$$\sigma_0(\delta_0) = 0, M_{10}(\delta_0) = M_{20}(\delta_0) = 0, \delta \in \mathbb{R}^3, \det \frac{\partial(M_{10}, M_{20}, \sigma_0)}{\partial(\delta_1, \delta_2, \delta_3)}(\delta_0) \neq 0. \quad (3.26)$$

除了(3.2)式中的函数 $F(\cdot, \lambda)$ 以外, 还可定义后继函数 $F_1(\cdot, \lambda): I_1 \rightarrow I_1$ (在 L_1 附近)及 $F_2(\cdot, \lambda): I_3 \rightarrow I_3$ (在 L_2 附近). 与(3.9)式类似, 对 $0 \leq -u_1, u_3 \leq 1$, 有

$$F_1(a_1, \lambda) = \epsilon F_1^*(u_1, \lambda), F_2(a_3, \lambda) = \epsilon F_2^*(u_3, \lambda).$$

又与(3.10)式类似可证

$$\mu_1 = F_1^*(0 - 0, \lambda) = \frac{M_{10}(\delta)}{|\text{grad} H(A_{10})|} + O(\epsilon),$$

$$\mu_2 = F_2^*(0 - 0, \lambda) = \frac{M_{20}(\delta)}{|\operatorname{grad} H(A_{30})|} + O(\varepsilon).$$

又令 $\mu_3 = \Delta(\varepsilon, \delta) = \sigma_0(\delta) + O(\varepsilon)$, 则由 (3.26) 式, 可取 μ_1, μ_2 与 μ_3 为自由参数, 如前, 设 $\sigma_1(\delta_0) > 0$. 当 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ 时系统 (1.1) 有不稳定双同宿环 $\tilde{L}$. 先令 $\mu_1 = \mu_2 = 0, 0 < -\mu_3 \ll 1$, 则 $\tilde{L}$ 从不稳定变为稳定, 因此产生一个不稳定大环 Γ_2 与两个不稳定小环 L_{11} 与 L_{21} . 若令 (μ_1, μ_2) 变化, 使得 $0 < -\mu_i \ll -\mu_3, i = 1, 2$, 则 $\tilde{L}$ 已破裂, 且产生另两个小环 L_{12} 与 L_{22} , 这样获得 4 个小环与 1 个大环. 若令 $\mu_2 = 0, 0 < \mu_1 \ll -\mu_3$, 则 $\tilde{L}$ 的左同宿环破裂, 且 $\tilde{L}$ 产生另一个大环 Γ_1 . 最后令 $0 < -\mu_2 \ll \mu_1$, 则 $\tilde{L}$ 的右支产生 1 个小环, 这样可获得两个大环与 3 个小环, 于是结论 (i) 得证. 对于结论 (ii), 不失一般性可设

$$\sigma_{11}(\delta_0) = 0, \sigma_1(\delta_0) = \sigma_{12}(\delta_0) > 0, c_3(\delta_0) \neq 0.$$

由文献 [1] 对 $\varepsilon + |\delta - \delta_0|$ 充分小 L 的环 L_1 至多产生 3 个极限环, 因此, 同上可证系统 (1.1) 在 L 的邻域内至多有 6 个环. 为证 6 个环可以出现, 取 μ_1, μ_2, μ_3 如前, 而 μ_4 为

$$\mu_4 = \oint_{L_1^*} (f_{0x} + g_{0y}) dt$$

(当 $\mu_1 = \mu_3 = 0$ 时), 其中 L_1^* 表示当 $\mu_1 = 0$ 时 L_1 附近的同宿环. 先设 $\mu_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$, 则系统 (1.1) 在原点的一阶鞍量满足

$$R_1 = \varepsilon(Nc_3(\delta_0) + o(1)), N \neq 0,$$

可设 $R_1 < 0$, 这表示 L_1^* 稳定. 现设 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0, 0 < \mu_4 \ll 1$, 则 L_1^* 变为不稳定且产生 1 个小环. 由于 $\mu_2 = 0$, 故系统 (1.1) 在 L_2 附近有同宿环 L_2^* . 注意到

$$\sum_{i=1}^2 \oint_{L_i^*} (f_{0x} + g_{0y}) dt = \mu_4 + \sigma_{12}(\delta_0) + o(1) > 0,$$

同前可证, 经适当变动 μ_1, μ_2 和 μ_3 , $L_1^* \cup L_2^*$ 可以产生 k 个大环和 $5 - k$ 个小环, $k = 1, 2$. 注意到当 $0 < |\mu_i| \ll \mu_4, i = 1, 2, 3$. 在 L_1^* 附近的小环仍存在, 故结论 (ii) 得证.

参 考 文 献

- 1 Roussarie R. On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar fields. Bol Soc Brasil Mat, 1986, 17: 67 ~ 101
- 2 Han Maoan, Ye Yanqian. On the coefficients appearing in the expansion of Melnikov functions in homoclinic bifurcations. Ann of Diff Equs, 1998, 14(2): 156 ~ 162
- 3 Han Maoan. Cyclicity of planar homoclinic loops and quadratic integrable systems. Science in China, Ser A, 1997, 40(12): 1 247 ~ 1 258
- 4 Joyal P. Generalized Hopf bifurcation and its dual generalized homoclinic bifurcation. SIAM J Math, 1988, 48: 481 ~ 496
- 5 韩茂安, 罗定军, 朱德明. 奇闭轨分支出极限环的唯一性 (II). 数学学报, 1992, 4: 541 ~ 548
- 6 Han Maoan. Bifurcations of limit cycles from a heteroclinic cycle of Hamiltonian systems. Chin Ann of Math, 1998, 19B(2): 189 ~ 196
- 7 韩茂安, 朱德明. 微分方程分支理论. 北京: 北京煤炭工业出版社, 1994