最优分红策略: 正则与脉冲混合控制问题

周明^{①*}, 孟辉^①, 郭军义^②

① 中央财经大学中国精算研究院, 北京 100081;

② 南开大学数学科学学院, 天津 300071

E-mail: zhouming@cufe.edu.cn, menghuidragon@126.com, jyguo@nankai.edu.cn

收稿日期: 2014-07-01; 接受日期: 2014-12-01; * 通信作者

北京高等学校“青年英才计划”(批准号: YETP0958) 和国家自然科学基金(批准号: 11271385 和 11171164) 资助项目

摘要 本文对扩散模型下的最优分红问题作了进一步分析. 注意到, 累积分红量是一个关于时间的右连左极过程, 它的路径由连续和跳跃两部分组成. 因此, 本文在建模中同时加入了连续分红和脉冲分红两种形式, 这就构成了一个正则和脉冲分红混合的最优控制问题. 假设所有分红量存在一个比例成本, 对于每次的脉冲分红量存在一个固定成本. 此外, 对于连续分红部分, 假设存在一个有限的最大分红率. 用漂移 Brown 运动描述公司的盈余过程, 优化目标设定为最大化公司破产前分红现值的期望值, 本文给出了值函数以及最优分红策略的解析表达式. 结论表明, 最优的分红策略为阈值 (threshold) 策略和脉冲策略的组合形式.

关键词 最优分红 正则脉冲控制 交易成本

MSC (2010) 主题分类 62P05, 91B30, 93E20

1 引言

对股东而言, 公司价值为公司未来所有分红现值的期望. 所以, 公司的决策者往往致力于寻求最优分红策略, 来平衡公司当前分红量与公司未来增长, 从而达到最大化公司价值的目的. 因此, 公司的最优分红策略问题成为近几十年金融保险领域研究的热点问题. 对于保险模型的最优分红问题综述, 读者可参见文献 [1, 2] 及相关文献.

在以往的文献中, 单边界分红策略、阈值分红策略和双边界分红策略 (也称 (s, S) 策略) 三种形式被广泛研究. 常数边界分红策略是边界分红策略中最为常见的一种, 对它最早的研究可追溯到文献 [3]. 最近, 文献 [4, 5] 证明了漂移 Brown 运动模型下无限制的最优分红策略为常数边界分红策略. 随后, 该策略在各种模型下被广泛研究, 如文献 [6–9] 等. 然而, 应用常数分红策略, 公司未来将以概率 1 破产, 这对公司管理者来说是不能接受的. 为了避免这个缺陷, 文献 [10] 提出了线性增长边界分红策略; 文献 [11] 提出了非线性增长边界分红策略.

阈值策略是常数边界分红策略的一种推广. 假设累积分红量是关于时间的绝对连续函数, 且存在有界的分红率, 文献 [4, 5] 证明了在漂移 Brown 运动模型下的最优分红策略为阈值策略. 当分红率的界趋于无穷时, 阈值策略就转变为常数边界分红策略. 应用阈值策略, 公司盈余以一个正概率趋于无穷而不发生破产, 但是, 该策略的缺陷是, 无论公司盈余有多大, 未来分红现值的期望值是有界的. 关于阈值策略的更多详细研究, 读者可参见文献 [12–16] 等.

英文引用格式: Zhou M, Meng H, Guo J Y. Optimal dividend policy: A regular-impulse stochastic control problem (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1705–1724, doi: 10.1360/012015-31

常数边界策略的另外一种推广是脉冲分红策略. 在实务中, 分红往往是逐次支付, 而且每次支付会伴随成本的发生. 假设每次分红支付都会产生一个固定成本, 文献 [4, 17] 在漂移 Brown 运动模型下证明了最优分红策略为双边界策略. 应用此分红策略, 当公司盈余达到一个上边界水平时, 公司就会支出一笔分红, 使得公司盈余回落到一个下边界的水平. 对脉冲分红问题的更多研究, 纯扩散模型下可参见文献 [18–25], 含跳跃模型下可参见文献 [26–28].

在过去几年中, 以上三种分红策略被广泛研究, 但在模型中往往假设分红策略是其中的某一种形式. 本文期望能够找到一个正则和脉冲组合的最优分红策略, 原因如下. 注意到, 累积分红量关于时间是一个右连左极过程, 它的路径由连续和跳跃两部分组成. 对于连续部分的路径, 分红为连续支付, 有一个有限的分红率 (正则路径) 或者一个无穷大的分红率 (奇异路径), 而跳跃部分的路径对应的是脉冲分红. 此外, 奇异路径可以视为正则路径在分红率趋于无穷的极限情形. 因此, 本文假设连续分红部分有一个有界的分红率, 所有分红都有一个比例成本, 脉冲分红还存在一个固定成本. 在这些假设下, 我们寻找可使得公司破产前分红现值期望最大的最优分红策略. 可以证明, 当公司盈余用漂移 Brown 运动描述时, 最优的分红策略为阈值和脉冲策略的组合形式. 该策略的运作机理是, 当公司盈余低于一个固定的下边界水平时, 公司不进行分红; 当公司盈余超过此下边界后, 按最大分红率进行连续分红; 一旦公司盈余达到或者超过一个上边界水平, 公司进行脉冲分红, 使得公司盈余回到下边界水平上. 图 1 给出了公司采用该组合分红策略后盈余过程的一个路径.

本文的结构如下: 第 2 节建立数学模型, 构建一个正则和脉冲混合的最优分红问题; 第 3 节将证明值函数的一些性质, 给出值函数满足的 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程, 并证明验证定理; 值函数和最优分红策略的解析表达将在第 4 节给出; 最后, 第 5 节给出本文的总结.

图 1 组合分红策略下盈余过程的路径

2 建立模型

我们从一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ 开始, 其中域流 $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ 满足通常条件, 即 $\{\mathcal{F}_t\}$ 是右连续和 $\mathbb{P}$ 完备的. 假设后文中的所有随机过程和随机变量都定义在该概率空间上.

现在考虑一个大型公司 (如保险公司), 其盈余过程用一个跳扩散过程 $\{X_t\}$ 描述, X_t 满足随机微分方程

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t - d\bar{D}_t, \quad X_{0-} = x, \quad (2.1)$$

其中 $x \geq 0$ 为初始盈余; $\mu > 0$ 为公司期望净利润率; $\sigma > 0$ 为公司盈余过程的波动率; $\{B_t\}$ 是概率 $\mathbb{P}$ 下关于 $\{\mathcal{F}_t\}$ 的标准 Brown 运动; $\bar{D}_t$ 表示 t 时刻前包含交易成本的总分红量, 满足

$$\bar{D}_t = \sum_{s \leq t} K I_{\{\Delta D_s > 0\}} + (1+p)D_t, \quad (2.2)$$

这里 D_t 是 t 时刻前的总分红量, 且 $\Delta D_s = D_s - D_{s-}$. 通常, 累积分红过程 $\{D_t\}$ 是一个单调递增的右连左极过程. 观察到, 它的路径可划分为连续部分 $\{D_t^c\}$ 和非连续部分 $\{D_t - D_t^c\}$. 对于连续部分, 存在一个分红率满足 $dD_t^c = l_t dt$ (注意, 奇异分红可视为分红率 l_t 趋于无穷的情形); 对非连续部分, $\Delta D_s > 0$ 为 s 时刻分红量. 假设对于连续分红部分, 存在分红率界 $m > 0$, 对脉冲分红存在一个固定成本 $K > 0$, 对所有分红存在一个比例成本 $p \geq 0$. 因此, 包含成本的总分红量可表示为 (2.2). 注意到, 结合 (2.1) 和 (2.2), 对模型应用一个常数乘子, 优化问题不会发生本质的变化. 所以, 不失一般性, 我们假设 $p = 0$.

用 $\pi = (l; \tau, \xi)$ 描述一个分红策略, 其中 $l = \{l_t, t \geq 0\}$ 是一个 $\mathcal{F}_t$ -适应过程, l_t 为 t 时刻的分红率; $\tau = \{\tau_n, n \geq 1\}$ 为进行脉冲分红的随机时间序列; $\xi = \{\xi_n, n \geq 1\}$ 为脉冲分红的随机序列. 那么, (2.2) 中的 $\bar{D}_t$ 在 $p = 0$ 时可重新写为

$$\bar{D}_t = \int_0^t l_s ds + \sum_{\tau_n \leq t} (\xi_n + K).$$

相应地, 公司在 t 时刻的盈余可重新表达为

$$X_t^\pi = x + \mu t + \sigma B_t - \int_0^t l_s ds - \sum_{\tau_n \leq t} (\xi_n + K), \quad t \geq 0, \quad x \geq 0. \quad (2.3)$$

我们称一个分红策略 $\pi = (l; \tau, \xi)$ 为可容许的, 如果它满足

(1) $l = \{l_t, t \geq 0\}$ 是一个关于 $\{\mathcal{F}_t\}$ 的可料过程, 对所有 $t \geq 0$ 满足 $0 \leq l_t \leq m$, 其中 m 为最大分红率, 由公司决策者的风险偏好决定;

(2) $\tau = \{\tau_n, n \geq 1\}$ 是一列关于 $\{\mathcal{F}_t\}$ 的停止时间, 满足 $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \infty$;

(3) 对任意的 $n \geq 1$, ξ_n 是一个 $\mathcal{F}_{\tau_n-}$ 可测的随机变量, 满足 $0 \leq \xi_n \leq X^\pi(\tau_n-) - K$ (该条件表示公司不能在出现赤字的时候进行分红, 且分红不能导致公司赤字. 显然, 当 $X^\pi(t-) \leq K$ 时, 由于固定成本的存在, 在时刻 t 进行脉冲分红是不可取的).

我们用 Π 表示所有可容许策略组成的集合. 对任意 $\pi \in \Pi$, 公司的破产时间 (记为 τ^π) 可被定义为盈余首次到达 0 的时刻, 即

$$\tau^\pi = \begin{cases} \inf\{t \geq 0; X_t^\pi = 0\}, \\ \infty, \quad \text{如果上面集合为空.} \end{cases} \quad (2.4)$$

考虑最优分红问题的目标为最大化公司价值, 即最大化破产前所有分红现值的期望. 对应一个可容许策略 π , 定义

$$V^\pi(x) = \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau^\pi} e^{-\delta s} l_s ds + \sum_{\tau_n \leq \tau^\pi} e^{-\delta \tau_n} \xi_n \right], \quad x \geq 0, \quad (2.5)$$

其中 $\delta > 0$ 是预先给定的贴现率, 用来计算未来分红的现值. 相应地, 值函数定义为

$$V(x) = \sup_{\pi \in \Pi} V^\pi(x), \quad x \geq 0. \quad (2.6)$$

本文的目标是, 求解值函数 $V(x)$ 的明确表达式, 寻找最优的可容许策略 $\pi^* \in \Pi$ 满足 $V(x) = V^{\pi^*}(x)$. 这就构成了一个正则和脉冲混合的动态规划问题.

3 HJB 方程和验证定理

本节将导出正则与脉冲混合控制问题对应的 HJB 方程, 并证明验证定理. 下面首先分析值函数的几个性质.

命题 3.1 由 (2.6) 定义的值函数 $V(x)$ 存在线性界. 具体地, 对任意 $x \in [0, \infty)$ 有

$$(x - K)_+ \leq V(x) \leq x + \frac{\mu}{\delta}. \quad (3.1)$$

证明 左边不等式的证明是平凡的. 我们只需取一个特殊的可容许策略 π , 满足对任意 $t \geq 0$ 有 $l_t = 0$, 且在 $t = 0$ 时将所有盈余进行脉冲分红.

下面证明右边不等式. 证明思路与文献 [19] 中的证明类似. 给定任意一个可容许策略 $\pi \in \Pi$ 和 $t > 0$, 结合 (2.3), 有

$$\mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau^\pi \wedge t} e^{-\delta s} dX_s^\pi \right] = \frac{\mu}{\delta} (1 - \mathbb{E}^x [e^{-\delta(\tau^\pi \wedge t)}]) - \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau^\pi \wedge t} e^{-\delta s} l_s ds + \sum_{\tau_n \leq \tau^\pi \wedge t} e^{-\delta \tau_n} (\xi_n + K) \right]. \quad (3.2)$$

另一方面, 利用 Itô 公式, 可得

$$e^{-\delta(\tau^\pi \wedge t)} X_{\tau^\pi \wedge t}^\pi = x - \delta \int_0^{\tau^\pi \wedge t} e^{-\delta s} X_s^\pi ds + \int_0^{\tau^\pi \wedge t} e^{-\delta s} dX_s^\pi.$$

注意到, 当 $\tau^\pi < \infty$ 时, 有 $X_{\tau^\pi}^\pi = 0$, 因此,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [e^{-\delta(\tau^\pi \wedge t)} X_{\tau^\pi \wedge t}^\pi] = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [e^{-\delta t} X_t^\pi I_{\{\tau^\pi > t\}}] \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [e^{-\delta t} (x + \mu t + \sigma |B_t|)] \\ &< \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} (x + \mu t + \sigma \sqrt{t}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

此外, 注意到在集合 $\{0 \leq s \leq \tau^\pi\}$ 上有 $X_s^\pi \geq 0$ 成立, 因此, 由上面结果可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau^\pi \wedge t} e^{-\delta s} dX_s^\pi \right] \geq -x. \quad (3.3)$$

结合 (3.2) 和 (3.3), 利用单调收敛定理可得

$$V^\pi(x) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau^\pi \wedge t} e^{-\delta s} l_s ds + \sum_{\tau_n \leq \tau^\pi \wedge t} e^{-\delta \tau_n} (\xi_n + K) \right] \leq \frac{\mu}{\delta} + x.$$

在可容许集合 Π 上取上确界, 命题得证. $\square$

命题 3.2 值函数 $V(x)$ 是一个连续的严格递增函数, 满足

$$V(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} V(x) = 0. \quad (3.4)$$

证明 我们首先证明值函数的严格递增性. 对于任意 $y > x > 0$, 如果 $y - x > K$, 显然有 $V(y) > V(x)$. 这是因为, 给定初始盈余 y , 我们可以选择马上进行分红, 使得盈余由 y 减少到 x , 因此, 我们有 $V(y) \geq y - x - K + V(x) > V(x)$ 成立.

接下来, 我们证明对 $0 < y - x \leq K$ 仍有 $V(y) > V(x)$ 成立. 给定初始盈余 x , 我们选取任意一个可容许策略 $\pi \in \Pi$. 此外, 对初始盈余 $y - x$, 选取一个可容许策略 $\pi^0 = (l^0; \tau^0, \xi^0) \in \Pi$, 满足对任意 $t \geq 0$ 有 $l_t^0 = 0$; $\tau^0 = \{\tau_1^0\}$, 其中对某个 $\varepsilon > 0$, $\tau_1^0 = \inf\{t \geq 0; X_t^{\pi^0} = K + \varepsilon\}$, 且 $\xi^0 = \{\varepsilon\}$. 那么, 我们有

$$V^{\pi^0}(y - x) = \varepsilon \mathbb{E}^{y-x} [e^{-\delta \tau_1^0} I_{\{\tau_1^0 \leq \tau^\pi\}}] > 0.$$

现在, 对于初始盈余 y , 我们定义一个可容许策略 $\tilde{\pi}$, 满足

$$\tilde{\pi}_t = \begin{cases} \pi_t, & t < \tau^\pi, \\ \pi_{t-\tau^\pi}^0, & t \geq \tau^\pi, \end{cases}$$

其中 τ^π 是初始盈余 x 时根据 (2.4) 定义给出. 利用强 Markov 性, 我们有

$$V^{\tilde{\pi}}(y) = V^\pi(x) + \mathbb{E}^{y-x} [e^{-\delta \tau^\pi} V^{\pi^0}(y - x)].$$

在上面不等式中, 对所有可容许策略 π 取上确界, 可得

$$V(y) \geq \sup_{\pi \in \Pi} V^{\tilde{\pi}}(y) = V(x) + \mathbb{E}^{y-x} [e^{-\delta \tau^\pi} V^{\pi^0}(y - x)] > V(x).$$

因此, 我们得知值函数是严格递增的.

此外, 根据值函数的定义, 易知 $V(0) = 0$, 但 (3.4) 的第二个等式则不是显然的. 为了证明它, 我们定义 $Y_t = x + \mu t + \sigma B_t$ 以及首达时间

$$\zeta_y = \inf\{t \geq 0 : Y_t = y\}, \quad \text{对任意 } y \geq 0. \quad (3.5)$$

给定任意 $h > 0$ 和 $t > 0$, 利用文献 [29, 引理 1], 我们有, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_{\varepsilon, h, t}$, 对任意 $0 \leq x < x_{\varepsilon, h, t} < h$, 有

$$\mathbb{P}^x \{\zeta_0 < \zeta_h \wedge t\} > 1 - \varepsilon \quad \text{和} \quad \mathbb{E}^x \left[\sup_{0 \leq s \leq \zeta_0 \wedge t} Y_s \right] < \varepsilon \quad (3.6)$$

成立. 因为对所有 $t \geq 0$ 有 $X_t^\pi \leq Y_t$ 成立, 所以, $\tau^\pi \leq \zeta_0$. 再结合 (3.6) 可得

$$\mathbb{P}^x \{\tau^\pi < \zeta_h \wedge t\} > 1 - \varepsilon. \quad (3.7)$$

进一步, 定义停时 $\rho = \tau^\pi \wedge \zeta_h \wedge t$, 我们有

$$\begin{aligned} V^\pi(x) &= \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau^\pi} e^{-\delta t} l_t dt + \sum_{\tau_n \leq \tau^\pi} e^{-\delta \tau_n} \xi_n \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[\int_0^\rho e^{-\delta t} l_t dt + \sum_{\tau_n \leq \rho} e^{-\delta \tau_n} \xi_n \right] + \mathbb{E}^x \left[\int_\rho^{\tau^\pi} e^{-\delta t} l_t dt + \sum_{\rho < \tau_n \leq \tau^\pi} e^{-\delta \tau_n} \xi_n \right]. \end{aligned}$$

一方面,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \left[\int_0^\rho e^{-\delta t} l_t dt + \sum_{\tau_n \leq \rho} e^{-\delta \tau_n} \xi_n \right] &\leq \mathbb{E}^x \left[\int_0^\rho l_t dt + \sum_{\tau_n \leq \rho} \xi_n \right] \leq \mathbb{E}^x [Y_\rho] \\ &\leq \mathbb{E}^x \left[\max_{0 \leq s \leq \rho} Y_s \right] \leq \mathbb{E}^x \left[\max_{0 \leq s \leq \zeta_0 \wedge t} Y_s \right] < \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中上面不等式的成立是根据 $V(x)$ 的递增性和 (3.7). 另一方面, 利用强 Markov 性, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \left[\int_\rho^{\tau^\pi} e^{-\delta t} l_t dt + \sum_{\rho < \tau_n \leq \tau^\pi} e^{-\delta \tau_n} \xi_n \right] &= \mathbb{E}^x \left[I_{\{\tau^\pi > \rho\}} \mathbb{E}^x \left[\int_\rho^{\tau^\pi} e^{-\delta t} l_t dt + \sum_{\rho < \tau_n \leq \tau^\pi} e^{-\delta \tau_n} \xi_n \mid \mathcal{F}_\rho \right] \right] \\ &\leq \mathbb{E}^x [I_{\{\tau^\pi > \rho\}} e^{-\delta \rho} V(Y_\rho)] \\ &\leq \mathbb{E}^x [I_{\{\tau^\pi > \rho\}} e^{-\delta \rho} V(h)] \\ &\leq V(h) \mathbb{P}^x \{\tau^\pi > \rho\} \\ &\leq V(h) \varepsilon, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式成立是根据 (3.6). 因此有 $V^\pi(x) \leq (1 + V(h))\varepsilon$. 对 π 取上确界可知, 对所有 $0 \leq x < x_{\varepsilon, h, t}$, 有 $V(x) \leq (1 + V(h))\varepsilon$, 这表明 (3.4) 成立.

最后, 我们证明值函数的连续性. 对任意 $\varepsilon > 0$, 取与上面相同的 $x_{\varepsilon, h, t}$. 那么, 给定任意初始盈余 $y > 0$ 和任何 x 满足 $0 < x < \min\{y, \varepsilon, x_{\varepsilon, h, t}\}$, 我们定义停时 $\tau_x^\pi = \inf\{t : t \geq 0 : X_t^\pi \leq x\}$. 然后, 利用强 Markov 性, 可得

$$\begin{aligned} V^\pi(y) &= \mathbb{E}^y \left[\int_0^{\tau_x^\pi} e^{-\delta t} l_t dt + \sum_{\tau_n \leq \tau_x^\pi} e^{-\delta \tau_n} \xi_n \right] + \mathbb{E}^y \left[\int_{\tau_x^\pi}^{\tau^\pi} e^{-\delta t} l_t dt + \sum_{\tau_x^\pi < \tau_n \leq \tau^\pi} e^{-\delta \tau_n} \xi_n \right] \\ &< \mathbb{E}^{y-x} \left[\int_0^{\tau^\pi} e^{-\delta t} l_t dt + \sum_{\tau_n \leq \tau^\pi} e^{-\delta \tau_n} \xi_n \right] + \varepsilon + \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau^\pi} e^{-\delta t} l_t dt + \sum_{\tau_n \leq \tau^\pi} e^{-\delta \tau_n} \xi_n \right] \\ &\leq V(y-x) + (2 + V(h))\varepsilon, \end{aligned}$$

其中最后一步成立类似于 (3.4) 中第二个等式的证明. 进一步, 给定 $y > 0$, $h > 0$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_{\varepsilon, h, t} > 0$, 满足

$$0 \leq V(y) - V(y-x) \leq (2 + V(h))\varepsilon, \quad \text{对任意 } 0 < x < \min\{y, \varepsilon, x_{\varepsilon, h, t}\}, \quad (3.9)$$

这就证明了 $V(x)$ 的左连续性. 利用同样的方法, 我们也可以证明 $V(x)$ 的右连续性. 因此, 值函数 $V(x)$ 在 $x \geq 0$ 上是连续的. $\square$

命题 3.2 得到了值函数连续性. 根据连续性可知, 值函数满足的动态规划准则, 即对任意停时 $\varsigma > 0$, 有

$$V(x) = \max_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau^\pi \wedge \varsigma} e^{-\delta s} l_s ds + \sum_{\tau_n \leq \tau^\pi \wedge \varsigma} e^{-\delta \tau_n} \xi_n + e^{-\delta(\tau^\pi \wedge \varsigma)} V(X_{\tau^\pi \wedge \varsigma}) \right]. \quad (3.10)$$

为了给出此正则脉冲混合控制问题对应的 HJB 方程, 我们还需要给出下面两个定义.

定义 3.1 对受控制的盈余过程 (2.3), 定义算子 $\mathcal{A}^l$, 满足对任意的二次连续可微函数 $v(x)$, 有

$$\mathcal{A}^l v(x) = \frac{\sigma^2}{2} v''(x) + (\mu - l) v'(x). \quad (3.11)$$

定义 3.2 对受控制的盈余过程 (2.3), 定义算子 $\mathcal{M}$, 满足对任意的连续函数 $v(x)$, 有

$$\mathcal{M}v(x) = \begin{cases} \sup_{\xi} \{v(x - \xi - K) + \xi; 0 < \xi \leq x - K\}, & x > K, \\ v(0), & 0 \leq x \leq K. \end{cases} \quad (3.12)$$

利用干预算子 $\mathcal{M}$, 对任意的连续函数 $v(x)$, 定义延续区域 (continuation region) $\mathcal{C}_v$ 和行动区域 (action region) $\mathcal{A}_v$ 分别如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_v &= \{x \geq 0 : \mathcal{M}v(x) < v(x)\}, \\ \mathcal{A}_v &= \{x \geq 0 : \mathcal{M}v(x) = v(x)\}. \end{aligned}$$

定义 3.3 假设函数 $v(x)$ 在 $[0, \infty) \setminus \mathcal{O}$ 上二次连续可微, 其中 $\mathcal{O}$ 包含至多可数点. 函数 $v(x)$ 称为正则脉冲混合控制问题 (2.6) 对应 HJB 方程的古典解, 如果它满足

$$\max \left\{ \max_{0 \leq l \leq m} \{\mathcal{A}^l v(x) - \delta v(x) + l\}, \mathcal{M}v(x) - v(x) \right\} = 0, \quad x \in [0, \infty) \setminus \mathcal{O}, \quad (3.13)$$

以及边界条件 $v(0+) = 0$. 等价地, HJB 方程 (3.13) 可拆分为

$$\max_{0 \leq l \leq m} \{\mathcal{A}^l v(x) - \delta v(x) + l\} < 0, \quad \mathcal{M}v(x) - v(x) = 0, \quad x \in \mathcal{A}_v \setminus \mathcal{O}, \quad (3.14)$$

$$\max_{0 \leq l \leq m} \{\mathcal{A}^l v(x) - \delta v(x) + l\} = 0, \quad \mathcal{M}v(x) - v(x) < 0, \quad x \in \mathcal{C}_v \setminus \mathcal{O}. \quad (3.15)$$

下面的定理会告诉我们, 如果我们可以找到 HJB 方程 (3.13) 的一个解, 那么该解就是值函数, 且最优分红策略可以通过该解给出.

定理 3.1 (验证定理) 给定常数 $b > 0$. 如果在 $[0, \infty) \setminus \{b\}$ 上的一个二次连续可微函数 $v(x)$ 是 HJB 方程 (3.13) 的解, 满足对某个常数 c , 有 $0 \leq v(x) \leq x + c$, 且 $v'(x)$ 有界, 那么,

$$v(x) = V(x), \quad x \in [0, \infty). \quad (3.16)$$

证明 给定任一可容许策略 $\pi = (l, \tau, \xi)$. 注意到, 除了 $x = b$ 点外, $v(x)$ 为二次连续可微的. 因此, 利用广义 Itô 公式, 我们有 a.s. $\mathbb{P}^\pi$ (即除了零概率集 $\{X_t^\pi = b \text{ 至多可数个 } t \geq 0\}$)

$$\begin{aligned} e^{-\delta(t \wedge \tau^\pi)} v(X_{t \wedge \tau^\pi}^\pi) &= v(x) + \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-\delta s} (\mathcal{A}^l v(X_{s-}^\pi) - \delta v(X_{s-}^\pi)) ds \\ &\quad + \sigma \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-\delta s} v'(X_{s-}^\pi) dB_s + \sum_{\tau_n \leq t \wedge \tau^\pi} e^{-\delta \tau_n} [v(X_{\tau_n}^\pi) - v(X_{\tau_n-}^\pi)] \\ &\leq v(x) + \sigma \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-\delta s} v'(X_{s-}^\pi) dB_s \\ &\quad - \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-\delta s} l_s ds - \sum_{\tau_n \leq t \wedge \tau^\pi} e^{-\delta \tau_n} \xi_n, \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中最后一个不等式成立的根据是, 对任意 $0 \leq l \leq m$ 和 $x \in [0, \infty)/\{b\}$, 有 $\mathcal{A}^l v(x) - \delta v(x) + l \leq 0$,

$$v(X_{\tau_n}^\pi) \geq \mathcal{M}v(X_{\tau_n}^\pi) \geq v(X_{\tau_n}^\pi) + (X_{\tau_n}^\pi - X_{\tau_n}^\pi - K) = v(X_{\tau_n}^\pi) + \xi_n.$$

对 (3.17) 两端取期望, 可得

$$\mathbb{E}^x \left[\int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-\delta s} l_s ds + \sum_{\tau_n^\pi \leq t \wedge \tau^\pi} e^{-\delta \tau_n^\pi} \xi_n \right] \leq v(x) - \mathbb{E}^x [e^{-\delta(t \wedge \tau^\pi)} v(X_{t \wedge \tau^\pi}^\pi)]. \quad (3.18)$$

注意到边界条件 $v(0+) = 0$, 以及对 $\tau^\pi < \infty$ 有 $X_{\tau^\pi}^\pi = 0$, 由此可得

$$\mathbb{E}^x [e^{-\delta(t \wedge \tau^\pi)} v(X_{t \wedge \tau^\pi}^\pi)] = \mathbb{E}^x [e^{-\delta t} v(X_t^\pi) I_{\{\tau^\pi \geq t\}}].$$

根据命题 3.1, 我们假设对 $x \geq 0$ 有 $0 \leq v(x) \leq x + c$. 此外, 在集合 $\{\tau^\pi \geq t\}$ 上有 $0 \leq X_t^\pi \leq x + \mu t + \sigma B_t$. 因此, 易知

$$0 \leq \mathbb{E}^x [e^{-\delta(t \wedge \tau^\pi)} v(X_{t \wedge \tau^\pi}^\pi)] \leq \mathbb{E}^x [e^{-\delta t} (x + c + \mu t + \sigma |B_t|)] \leq e^{-\delta t} [x + c + \mu t + \sigma \sqrt{t}],$$

这表明,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [e^{-\delta(t \wedge \tau^\pi)} v(X_{t \wedge \tau^\pi}^\pi)] = 0.$$

然后, 在 (3.18) 两端取极限, 利用单调收敛定理, 我们有 $v(x) \geq V^\pi(x)$. 在可容许策略集 Π 上取上确界可得到 $v(x) \geq V(x)$.

另外, 我们可以按下述方法利用 $v(x)$ 构造一个可容许策略 $\pi = (l; \tau, \xi)$. 令 $a = \max\{0, \inf\{x \geq 0; v'(x) \leq 1\}\}$. 对任意 $t \geq 0$, 定义

$$l_t = \begin{cases} m, & X_{t-}^\pi \geq a, \\ 0, & 0 \leq X_{t-}^\pi < a. \end{cases}$$

然后, $\tau = \{\tau_n, n \geq 1\}$ 和 $\xi = \{\xi_n, n \geq 1\}$ 分别由 $\tau_n = \inf\{t \geq \tau_{n-1}; X_t^\pi \in \mathcal{A}_v\}$ 且 $\tau_0 = 0$ 和 $\xi_n = \arg \mathcal{M}v(X_{\tau_n}^\pi)$ 来定义. 采用此可容许策略, (3.17) 中的不等式就变为等式. 通过类似的推导, 我们有 $v(x) = V^\pi(x) \leq V(x)$. (3.16) 得证. $\square$

4 最优分红策略和值函数

本节致力于求解最优的分红策略以及导出值函数的解析表达式. 求解该最优分红问题的基本想法是, 首先寻找 HJB 方程 (3.13) 的一个光滑解, 然后根据这个解构造分红策略. 然后, 在一定条件下, 验证定理就保证了这个光滑的解就是值函数, 得到的分红策略就是最优策略.

为了求得 (3.13) 的一个光滑解, 我们首先猜测

$$\mathcal{C}_V = (0, b), \quad \mathcal{A}_V = [b, \infty).$$

那么, 由 (3.13) 可得

$$\max_{0 \leq l \leq m} \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 v''(x) + \mu v'(x) - \delta v(x) + l(1 - v'(x)) \right\} = 0, \quad x \in (0, b). \quad (4.1)$$

注意到, 上方程的最大值点依赖于函数 $1 - v'(x)$ 的符号. 定义 $a \in (0, b)$ 满足

$$a = \inf\{x \geq 0; v'(x) \leq 1\}.$$

那么, 对 $0 < x < a$ 有 $v'(x) > 1$. 因此, 对 $0 < x < a$, 我们知 (4.1) 的最大值点为 $l^* = 0$, 且 $v(x)$ 满足

$$\frac{1}{2}\sigma^2 v''(x) + \mu v'(x) - \delta v(x) = 0. \quad (4.2)$$

结合边界条件 (3.4), 可得

$$v(x) = c(e^{\eta_+(0)x} - e^{\eta_-(0)x}), \quad x \in (0, a), \quad (4.3)$$

其中 c 是一个待定的参数, $\eta_+(l) > 0$ 和 $\eta_-(l) < 0$ 是下方方程的两个根,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 + (\mu - l)s - \delta = 0, \quad (4.4)$$

即

$$\begin{aligned} \eta_+(l) &= -\frac{\mu - l}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{(\mu - l)^2 + 2\delta\sigma^2}}{\sigma^2}, \\ \eta_-(l) &= -\frac{\mu - l}{\sigma^2} - \frac{\sqrt{(\mu - l)^2 + 2\delta\sigma^2}}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

对 $a \leq x < b$, 假设有 $v'(x) \leq 1$ (后面将验证), 则我们知 (4.1) 的最大值点为 $l^* = m$, 且 $v(x)$ 满足

$$\frac{1}{2}\sigma^2 v''(x) + (\mu - m)v'(x) - \delta f(x) + m = 0. \quad (4.5)$$

该常微分方程的通解可写为

$$v(x) = \frac{m}{\delta} + c_1 e^{\eta_+(m)(x-a)} + c_2 e^{\eta_-(m)(x-a)}, \quad x \in [a, b], \quad (4.6)$$

其中 c_1 和 c_2 是两个待定的参数.

我们猜测 $\mathcal{A}_V = [b, \infty)$, 这表明, 当 $x \geq b$ 时进行脉冲分红. 显然, 应该有 $b \geq K$. 否则, 当 $x < K$ 时进行脉冲分红, 盈余不够支付固定交易成本. 对 $x \geq b$, 我们有

$$v(x) = \mathcal{M}v(x) = \sup_{\xi > 0} \{v(x - \xi - K) + \xi\}. \quad (4.7)$$

在上面方程中关于 ξ 求导可知, 最大值点 ξ^* 应该满足

$$v'(x - \xi^* - K) = 1 \quad \text{且} \quad v''(x - \xi^* - K) \leq 0.$$

注意到 $v'(a) = 1$. 如果还有 $v''(a) \leq 0$ 成立 (后面将给出证明), 那么有 $\xi^* = x - a - K$. 将最大值点代入 (4.7) 中可得

$$v(x) = v(a) + x - a - K, \quad x \in [b, \infty). \quad (4.8)$$

到目前为止, 我们已经给出了 (3.13) 的解的具体形式. 为了明确求得待定参数 c, c_1, c_2, a 和 b , 且验证函数 $v(x)$ 满足前面所有的猜测, 我们利用“光滑拟合条件”, 即

$$\begin{aligned} v(a-) &= v(a+), \quad v'(a-) = v'(a+) = 1, \quad v''(a-) = v''(a+), \\ v(b-) &= v(b+), \quad v'(b-) = v'(b+) = 1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

在上面, 我们要求 $v''(a-) = v''(a+)$, 但没有要求 $v''(b-) = v''(b+)$ 成立, 这是因为 a 是 C_V 中的一个内点, 而 b 是 A_V 的边界点. 另外, 我们没有要求有 $V(a-) = V(a+)$ 成立, 但在后文中我们可以证明, 由 (4.9) 确定的解的确也满足该条件 (见定理 4.1).

首先, 根据 (4.8) 和光滑拟合条件可得

$$\int_0^{b-a} [1 - v'(x+a)]dx = K. \quad (4.10)$$

根据 (4.6), 有

$$v'(x+a) = c_1\eta_+(m)e^{\eta_+(m)x} + c_2\eta_-(m)e^{\eta_-(m)x}, \quad x \in (0, b-a).$$

另外, 根据 $v'(a+) = 1$ 和 $v'(b-) = 1$, 我们有

$$c_1\eta_+(m) + c_2\eta_-(m) = 1, \quad (4.11)$$

$$c_1\eta_+(m)e^{\eta_+(m)(b-a)} + c_2\eta_-(m)e^{\eta_-(m)(b-a)} = 1. \quad (4.12)$$

求解方程 (4.11) 和 (4.12) 可得

$$c_1\eta_+(m) = \frac{1 - e^{\eta_-(m)(b-a)}}{e^{\eta_+(m)(b-a)} - e^{\eta_-(m)(b-a)}}. \quad (4.13)$$

参考 (4.13) 的形式, 我们定义一个辅助函数 $A(x)$ 如下:

$$A(x) = \frac{1 - e^{\eta_-(m)x}}{e^{\eta_+(m)x} - e^{\eta_-(m)x}}, \quad x > 0. \quad (4.14)$$

根据 L'Hospital 法则, 有 $A(0+) = -\eta_-(m)/(\eta_+(m) - \eta_-(m)) > 0$, $A(+\infty) = 0$, 且经过直接计算, 可得

$$A'(x) = \frac{(\eta_+(m) - \eta_-(m))e^{(\eta_+(m) + \eta_-(m))x} - (\eta_+(m)e^{\eta_+(m)x} - \eta_-(m)e^{\eta_-(m)x})}{[e^{\eta_+(m)x} - e^{\eta_-(m)x}]^2}.$$

不难验证, $A'(x)$ 的分子恒为负数, 这表明 $A'(x) < 0$, $A(x)$ 是一个严格递减函数, 且满足对所有 $x > 0$ 有 $A(x) > 0$. 然后, 结合 (4.11)–(4.14), $v'(x+a)$ 可重新表达为

$$g(b-a; x) := v'(x+a) = A(b-a)(e^{\eta_+(m)x} - e^{\eta_-(m)x}) + e^{\eta_-(m)x}, \quad x \in (0, b-a). \quad (4.15)$$

基于 $A(x)$ 的递减性和 $A(x) > 0$ 易知, 对所有 $x \in (0, b-a)$ 有 $0 < g(b-a; x) < g(x; x) = 1$. 将 (4.15) 代入 (4.10) 中, 根据下面引理, 我们可以确定唯一的解 $(b-a)$.

引理 4.1 给定任意 $K > 0$, 存在唯一的解 η^* 满足 $\eta^* > K$ 且

$$\int_0^{\eta^*} [1 - g(\eta^*; x)]dx = K. \quad (4.16)$$

证明 首先, 如果 η^* 确实存在, 那么, 根据对所有 $0 \leq x \leq y$ 有 $g(y; x) > 0$ 可知, $\eta^* > K$. 为了证明对任意 $K > 0$, 解 η^* 的存在性, 我们定义函数

$$G(y) = \int_0^y [1 - g(y; x)]dx, \quad y \geq 0.$$

注意到, $A(+\infty) = 0$ 和 $g(y; x) < g(x; x) = 1$. 我们容易验证, $G(0) = 0$ 且

$$\lim_{y \rightarrow \infty} G(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} y - A(y) \frac{e^{\eta_+(m)y}}{\eta_+(m)} + \frac{1}{\eta_-(m)} = \lim_{y \rightarrow \infty} y - \left(\frac{1}{\eta_+(m)} - \frac{1}{\eta_-(m)} \right) = +\infty.$$

此外, 对任意 $0 \leq y_1 < y_2 < \infty$, 我们有

$$G(y_2) = \int_0^{y_2} [1 - g(y_2; x)] dx > \int_0^{y_1} [1 - g(y_2; x)] dx > \int_0^{y_1} [1 - g(y_1; x)] dx = G(y_1),$$

其中 $0 < g(y; x) < 1$ 保证第一个不等式成立, (4.15) 和 $A(x)$ 的递减性保证了第二个不等式成立. 因此, 我们知道, $G(x)$ 是从零递增到无穷. η^* 的存在性和唯一性得证. $\square$

一旦 $b - a = \eta^*$ 确定, 则 c_1 和 c_2 就可以通过求解 (4.13) 和 (4.11) 得到,

$$c_1 \eta_+(m) = \frac{1 - e^{\eta_-(m)\eta^*}}{e^{\eta_+(m)\eta^*} - e^{\eta_-(m)\eta^*}}, \quad (4.17)$$

$$c_2 \eta_-(m) = \frac{e^{\eta_+(m)\eta^*} - 1}{e^{\eta_+(m)\eta^*} - e^{\eta_-(m)\eta^*}}. \quad (4.18)$$

利用条件 $v'(a-) = 1$ 和 $v''(a-) = v''(a+)$, 我们有

$$c(\eta_+(0)e^{\eta_+(0)a} - \eta_-(0)e^{\eta_-(0)a}) = 1, \quad (4.19)$$

$$c(\eta_+^2(0)e^{\eta_+(0)a} - \eta_-^2(0)e^{\eta_-(0)a}) = c_1 \eta_+^2(m) + c_2 \eta_-^2(m), \quad (4.20)$$

可求得

$$a = \frac{1}{\eta_+(0) - \eta_-(0)} \ln \frac{\eta_-(0)[\eta_-(0) - (c_1 \eta_+^2(m) + c_2 \eta_-^2(m))]}{\eta_+(0)[\eta_+(0) - (c_1 \eta_+^2(m) + c_2 \eta_-^2(m))]}, \quad (4.21)$$

$$c = [\eta_+(0)e^{\eta_+(0)a} - \eta_-(0)e^{\eta_-(0)a}]^{-1}. \quad (4.22)$$

以上所有的结果都是基于 $a > 0$ 的假设得到的. 下面引理给出了 $a > 0$ 的充分必要条件.

引理 4.2 对任意给定的 $K > 0$ 和 $m > 0$, 则 $a > 0$ 的充分必要条件是下面其中一个不等式成立, (1)

$$c_1 + c_2 + \frac{m}{\delta} > 0, \quad (4.23)$$

(2)

$$c_1 \eta_+^2(m) + c_2 \eta_-^2(m) > -\frac{2\mu}{\sigma^2}. \quad (4.24)$$

证明 根据 (4.17) 和 (4.18), 我们有

$$c_1 \eta_+^2(m) + c_2 \eta_-^2(m) = \frac{\eta_+(m)(1 - e^{\eta_-(m)\eta^*}) - \eta_-(m)(1 - e^{\eta_+(m)\eta^*})}{e^{\eta_+(m)\eta^*} - e^{\eta_-(m)\eta^*}}.$$

定义一个新的函数

$$H(x) = \frac{\eta_+(m)(1 - e^{\eta_-(m)x}) - \eta_-(m)(1 - e^{\eta_+(m)x})}{e^{\eta_+(m)x} - e^{\eta_-(m)x}}, \quad x > 0. \quad (4.25)$$

对 $H(x)$ 求导, 经过一些基本运算, 可得

$$H'(x) = \frac{\eta_+(m) - \eta_-(m)}{[e^{\eta_+(m)x} - e^{\eta_-(m)x}]^2} h(x),$$

其中

$$h(x) = \eta_-(m)e^{\eta_-(m)x} - \eta_+(m)e^{\eta_+(m)x} + (\eta_+(m) - \eta_-(m))e^{-\frac{2(\mu-m)}{\sigma^2}x}.$$

注意到,

$$h(0) = 0, \quad h'(x) = \eta_+^2(m)e^{\eta_+(m)x}(e^{\eta_-(m)x} - 1) + \eta_-^2(m)e^{\eta_-(m)x}(1 - e^{\eta_+(m)x}) < 0,$$

这表明, 对 $x > 0$ 有 $H'(x) < 0$. 所以, $H(x)$ 是一个严格递减函数. 然后, 根据 L'Hospital 法则, 有 $H(0+) = 0$ 和 $H(+\infty) = \eta_-(m)$. 因此, 我们可得

$$\eta_-(0) < \eta_-(m) < c_1\eta_+^2(m) + c_2\eta_-^2(m) < 0. \quad (4.26)$$

结合 (4.21), 我们知道, $a > 0$ 的充要条件是

$$\eta_-(0)[\eta_-(0) - (c_1\eta_+^2(m) + c_2\eta_-^2(m))] > \eta_+(0)[\eta_+(0) - (c_1\eta_+^2(m) + c_2\eta_-^2(m))],$$

或等价地,

$$c_1\eta_+^2(m) + c_2\eta_-^2(m) > \eta_+(0) + \eta_-(0) = -\frac{2\mu}{\sigma^2}.$$

此外, 利用 (4.4), 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2}(c_1\eta_+^2(m) + c_2\eta_-^2(m)) &= (c_1 + c_2)\delta - (\mu - m)(c_1\eta_+(m) + c_2\eta_-(m)) \\ &= (c_1 + c_2)\delta - (\mu - m), \end{aligned} \quad (4.27)$$

这表明, 条件 (1) 与 (2) 是等价的. 结论得证. $\square$

利用 (4.15) 和 (4.25) 分别定义的两个函数 $G(\cdot)$ 和 $H(\cdot)$. 当 $\eta_-(m) < -2\mu/\sigma^2$ 成立时, 我们定义一个临界水平

$$k_0 = G\left(H^{-1}\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}\right)\right). \quad (4.28)$$

引理 4.3 $a > 0$ 的充分必要条件是 $m \geq \sigma^2\delta/2\mu$, 或者 $m < \sigma^2\delta/2\mu$ 且 $K < k_0$.

证明 如果 $m \geq \sigma^2\delta/2\mu$, 我们有

$$\frac{\sigma^2}{2}\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}\right)^2 + (\mu - m)\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}\right) - \delta = m\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}\right) - \delta \geq 0,$$

这表明, $\eta_-(m) \geq -2\mu/\sigma^2$, 那么, 由 (4.26) 可知, (4.24) 成立. 另一方面, 如果 $m < \sigma^2\delta/2\mu$, 有 $\eta_-(m) < -2\mu/\sigma^2$, 且 (4.28) 有定义, 那么, (4.24) 等价于

$$c_1\eta_+^2(m) + c_2\eta_-^2(m) = H(\eta^*) > -\frac{2\mu}{\sigma^2}.$$

因为 $H(x)$ 是一个严格递减函数, 所以, $G^{-1}(K) = \eta^* < H^{-1}(-2\mu/\sigma^2)$ 成立. 根据 $G(x)$ 的严格递增性, 它等价于 $K < k_0$ 成立. 结论得证. $\square$

定理 4.1 如果 $m \geq \sigma^2\delta/2\mu$, 或者 $m < \sigma^2\delta/2\mu$ 且 $K < k_0$, 那么, 值函数

$$V(x) = \begin{cases} c(e^{\eta_+(0)x} - e^{\eta_-(0)x}), & x \in (0, a), \\ c_1e^{\eta_+(m)(x-a)} + c_2e^{\eta_-(m)(x-a)} + \frac{m}{\delta}, & x \in [a, b), \\ V(a) + x - a - K, & x \in [b, \infty), \end{cases} \quad (4.29)$$

其中 $b = a + \eta^*$. 参数 η^*, c_1, c_2, a 和 c 分别由 (4.16)–(4.22) 给出.

证明 首先, 我们证明 $V(x)$ 在 $x = a$ 点连续, 或等价地,

$$c(e^{\eta_+(0)a} - e^{\eta_-(0)a}) = c_1 + c_2 + \frac{m}{\delta}.$$

结合 (4.19) 和 (4.20), 可得

$$\begin{aligned} c(e^{\eta_+(0)a} - e^{\eta_-(0)a}) &= -\frac{c_1\eta_+^2(m) + c_2\eta_-^2(m)}{\eta_+(0)\eta_-(0)} + \frac{\eta_+(0) + \eta_-(0)}{\eta_+(0)\eta_-(0)} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\delta}(c_1\eta_+^2(m) + c_2\eta_-^2(m)) + \frac{\mu}{\delta} \\ &= c_1 + c_2 + \frac{m}{\delta}, \end{aligned}$$

其中最后一步由 (4.27) 可得. 因此, 由 (4.29) 定义的值函数 $V(x)$ 在 $x = a$ 处连续.

其次, 由 (4.26) 可知, $V''(a) = c_1\eta_+^2(m) + c_2\eta_-^2(m) < 0$. 为了证明 (4.29) 给出的 $V(x)$ 是 (3.13) 的一个解, 可验证充分条件

$$\max_{0 \leq l \leq m} \{\mathcal{A}^l V(x) - \delta V(x) + l\} \leq 0, \quad x \geq b, \quad (4.30)$$

$$\mathcal{M}V(x) - V(x) < 0, \quad 0 \leq x < b. \quad (4.31)$$

注意到,

$$\begin{aligned} (e^{\eta_+(m)\eta^*} - e^{\eta_-(m)\eta^*})V''(b-) &= (e^{\eta_+(m)\eta^*} - e^{\eta_-(m)\eta^*})(c_1\eta_+^2(m)e^{\eta_+(m)\eta^*} + c_2\eta_-^2(m)e^{\eta_-(m)\eta^*}) \\ &= \eta_+(m)e^{\eta_+(m)\eta^*}(1 - e^{\eta_-(m)\eta^*}) + \eta_-(m)e^{\eta_-(m)\eta^*}(e^{\eta_+(m)\eta^*} - 1), \end{aligned}$$

其中最后一个等式由 (4.17) 和 (4.18) 可得. 容易验证,

$$\eta_+(m)e^{\eta_+(m)x}(1 - e^{\eta_-(m)x}) + \eta_-(m)e^{\eta_-(m)x}(e^{\eta_+(m)x} - 1)$$

是严格递增的, 且对 $x > 0$ 是正的. 因此, 我们有 $V''(b-) > 0$.

对 $x \geq b$, 有

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq l \leq m} \{\mathcal{A}^l V(x) - \delta V(x) + l\} &= \mu - \delta V(x) \leq \mu - \delta V(b) \\ &= \mu V'(b-) - \delta V(b-) \\ &< \frac{1}{2}\sigma^2 V''(b-) + \mu V'(b-) - \delta V(b-) \\ &= \max_{0 \leq l \leq m} \{\mathcal{A}^l V(b-) - \delta V(b-) + l\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

此外, 对 $0 \leq x < a + K$, 我们有 $V'(x - K) > 1$, 进一步有

$$\mathcal{M}V(x) = \begin{cases} 0, & x \leq K, \\ V(x - K), & K < x < a + K. \end{cases}$$

因此,

$$\mathcal{M}V(x) - V(x) \leq V(x - K) - V(x) < 0.$$

对 $a + K \leq x < b$, 我们有 $V'(x - K) < 1$, $V'(a) = 1$ 和 $V''(a) < 0$, 进一步可得

$$\mathcal{M}V(x) = V(a) + x - a - K.$$

因此, 根据 (4.10) 和 $G(x)$ 的严格递增性, 有

$$\mathcal{M}V(x) - V(x) = x - a - (V(x) - V(a)) = G(x - a) - K < G(b - a) - K = 0.$$

最后, 注意到由 (4.29) 给出的 $V(x)$ 在 $(0, b)$ 是二次可微的, 当 $x \geq b$ 时为线性函数. 因此, 验证定理的条件得到满足. 利用验证定理, 结论得证. $\square$

接下来, 我们考虑另外一种情形. 如果 $m < \sigma^2 \delta / 2\mu$ 且 $K \geq k_0$, 我们有 $a \leq 0$, 这表明, 对所有 $x \in (0, b)$ 有 $v'(x) < 1$. 因此, $\mathcal{M}v(x)$ 的最大值在边界点取得, 即 $\xi^* = x - K$ 且 $a = 0$. 利用光滑性条件 $v(b-) = v(b+) = b - K$ 和边界条件 $v(0) = 0$, 我们有

$$\int_0^b [1 - v'(x)] dx = K. \quad (4.32)$$

此外, 从 HJB 方程 (4.1) 可知, 最大值点 $l^* = m$, 且

$$\frac{1}{2} \sigma^2 v''(x) + (\mu - m)v'(x) - \delta v(x) + m = 0, \quad x \in (0, b). \quad (4.33)$$

结合边界条件 $v(0) = 0$ 有

$$v(x) = \frac{m}{\delta} (1 - e^{\eta_-(m)x}) + \tilde{c} (e^{\eta_+(m)x} - e^{\eta_-(m)x}), \quad x \in (0, b). \quad (4.34)$$

再利用光滑拟合条件 $v'(b-) = 1$, 我们有

$$\tilde{c} = \frac{1 + \frac{m}{\delta} \eta_-(m) e^{\eta_-(m)b}}{\eta_+(m) e^{\eta_+(m)b} - \eta_-(m) e^{\eta_-(m)b}}.$$

根据下面的引理, 我们易知 $\tilde{c} > 0$.

引理 4.4 如果 $m < \sigma^2 \delta / 2\mu$, 那么有 $1 + m\eta_-(m)/\delta > 0$.

证明 当 $m < \sigma^2 \delta / 2\mu$ 时有 $\eta_-(m) < -2\mu/\sigma^2$. 再结合 (4.4), 我们有

$$1 + \frac{m}{\delta} \eta_-(m) = \frac{\sigma^2}{2\delta} \eta_-(m) \left(\eta_-(m) + \frac{2\mu}{\sigma^2} \right) > 0, \quad (4.35)$$

结论得证. $\square$

接下来, 我们定义

$$B(x) = \frac{1 + \frac{m}{\delta} \eta_-(m) e^{\eta_-(m)x}}{\eta_+(m) e^{\eta_+(m)x} - \eta_-(m) e^{\eta_-(m)x}}, \quad x \geq 0.$$

通过直接运算, 容易得到

$$B'(x) = \frac{h(x)}{(\eta_+(m) e^{\eta_+(m)x} - \eta_-(m) e^{\eta_-(m)x})^2},$$

其中

$$h(x) = -\frac{2m}{\sigma^2} (\eta_-(m) - \eta_+(m)) e^{-\frac{2(\mu-m)}{\sigma^2}x} - \eta_+^2(m) e^{\eta_+(m)x} + \eta_-^2(m) e^{\eta_-(m)x}.$$

注意到, $h(0) = (\eta_+(m) - \eta_-(m))2\mu/\sigma^2 > 0$, $h(+\infty) = -\infty$, 且根据引理 4.4 有

$$h'(b) = -\frac{2m}{\sigma^2}\eta_-^2(m)e^{-\frac{2(\mu-m)}{\sigma^2}x} - \left(1 + \frac{m}{\delta}\eta_-(m)\right)\eta_+^3(m)e^{\eta_+(m)x} + \eta_-^3(m)e^{\eta_-(m)x} < 0.$$

这表明, 函数 $B(x)$ 从 $h(0) = (\eta_+(m) - \eta_-(m))2\mu/\sigma^2$ 先严格递增, 然后严格递减至 $-\infty$. 图 2 给出了 $m < \sigma^2\delta/2\mu$ 时函数 $B(x)$ 的图像.

下面引理是关于函数 $B(x)$ 的另一个结果.

引理 4.5 当 $m < \sigma^2\delta/2\mu$ 时, 有

$$B\left(H^{-1}\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}\right)\right) = B(0) = \frac{1 + \frac{m}{\delta}\eta_-(m)}{\eta_+(m) - \eta_-(m)}. \quad (4.36)$$

证明 回忆函数 $H(x)$ 的定义 (4.25). 令 $x_0 = H^{-1}(-2\mu/\sigma^2)$, 我们只需证明

$$(\eta_+(m) - \eta_-(m))\left(1 + \frac{m}{\delta}\eta_-(m)e^{\eta_-(m)x_0}\right) = (\eta_+(m)e^{\eta_+(m)x_0} - \eta_-(m)e^{\eta_-(m)x_0})\left(1 + \frac{m}{\delta}\eta_-(m)\right),$$

或等价地,

$$\eta_+(m) - \eta_-(m) - \eta_+(m)\left(1 + \frac{m}{\delta}\eta_-(m)\right)e^{\eta_+(m)x_0} + \eta_-(m)\left(1 + \frac{m}{\delta}\eta_+(m)\right)e^{\eta_-(m)x_0} = 0.$$

注意到, 对 $s = \eta_+(m)$ 和 $s = \eta_-(m)$, 有

$$1 + \frac{m}{\delta}s = \frac{s}{\delta}\left(\frac{1}{2}\sigma^2s + \mu\right),$$

且 $\eta_+(m)\eta_-(m) = -2\delta/\sigma^2$, 则

$$-\eta_+(m)\left(1 + \frac{m}{\delta}\eta_-(m)\right) = \eta_-(m) + \frac{2\mu}{\sigma^2} \quad \text{且} \quad -\eta_-(m)\left(1 + \frac{m}{\delta}\eta_+(m)\right) = \eta_+(m) + \frac{2\mu}{\sigma^2}.$$

结合 $H(x_0) = -2\mu/\sigma^2$, 结论得证. $\square$

图 2 函数 $B(x)$ 的图形, 其中 $\mu = 0.2$, $\sigma = 0.5$, $\delta = 0.1$, $m = 0.05$

为了确定未知参数 b , 我们还需定义一个新函数

$$\tilde{g}(b; x) := -\frac{m}{\delta} \eta_-(m) e^{\eta_-(m)x} + B(b)(\eta_+(m) e^{\eta_+(m)x} - \eta_-(m) e^{\eta_-(m)x}), \quad x \in (0, b).$$

结合 (4.32), 我们需求解下面方程的解,

$$\int_0^b [1 - \tilde{g}(b; x)] dx = K.$$

引理 4.6 当 $m < \sigma^2 \delta / 2\mu$ 时, 对任意给定的 $K \geq k_0$, 存在唯一的解 $\tilde{\eta}^* > K$, 满足

$$\int_0^{\tilde{\eta}^*} [1 - \tilde{g}(\tilde{\eta}^*; x)] dx = K. \quad (4.37)$$

证明 定义 $\tilde{G}(b) = \int_0^b [1 - \tilde{g}(b; y)] dy$. 根据 (4.28), 有

$$x_0 = G^{-1}(k_0) = H^{-1}\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}\right),$$

其中函数 $G(x)$ 的定义在引理 4.1 的证明中已给出. 根据引理 4.5 和 $B(x)$ 的性质, 我们知道, 当 $b \geq x_0$ 时, $B(b)$ 是严格递增的. 因此, 对任意的 $b \geq x_0$ 和 $x \in (0, b)$, 有 $B(b) < B(x)$, 进一步有 $\tilde{g}(b; x) < \tilde{g}(x; x) = 1$, 这表明, (4.37) 中的被积函数恒为正.

此外, 对任意的 $b_2 > b_1 > x_0$, 我们有

$$\tilde{G}(b_2) = \int_0^{b_2} [1 - \tilde{g}(b_2; y)] dy > \int_0^{b_1} [1 - \tilde{g}(b_2; y)] dy > \int_0^{b_1} [1 - \tilde{g}(b_1; y)] dy = \tilde{G}(b_1),$$

其中第一个不等式成立是因为被积函数恒为正, 第二个不等式成立是因为 $B(b)$ 的严格递减性. 因此, 对 $b \geq x_0$, 函数 $\tilde{G}(b)$ 是严格递增的.

结合 (4.28), 对 $b = x_0$, 有 $H(x_0) = -2\mu/\sigma^2$, 即

$$\eta_+(m)A(x_0) + \eta_-(m)(1 - A(x_0)) = -\frac{2\mu}{\sigma^2},$$

由此可求得

$$A(x_0) = -\frac{\eta_-(m) + 2\mu/\sigma^2}{\eta_+(m) - \eta_-(m)}, \quad 1 - A(x_0) = \frac{\eta_+(m) + 2\mu/\sigma^2}{\eta_+(m) - \eta_-(m)}.$$

此外, 结合 (4.16), 我们还有

$$\begin{aligned} x_0 - k_0 &= x_0 - G(x_0) \\ &= \frac{A(x_0)}{\eta_+(m)}(e^{\eta_+(m)x_0} - 1) - \frac{1 - A(x_0)}{\eta_-(m)}(1 - e^{\eta_-(m)x_0}) \\ &= -\frac{\eta_+(m) - \eta_-(m)}{\eta_+(m)\eta_-(m)} A(x_0)(1 - A(x_0))(e^{\eta_+(m)x_0} - e^{\eta_-(m)x_0}) \\ &= -\frac{\sigma^2/2\delta}{\eta_+(m) - \eta_-(m)} \left(\eta_-(m) + \frac{2\mu}{\sigma^2} \right) \left(\eta_+(m) + \frac{2\mu}{\sigma^2} \right) (e^{\eta_+(m)x_0} - e^{\eta_-(m)x_0}) \\ &= \frac{1 - 2\mu m/\sigma^2 \delta}{\eta_+(m) - \eta_-(m)} (e^{\eta_+(m)x_0} - e^{\eta_-(m)x_0}). \end{aligned}$$

另一方面, 结合 (4.37), 我们有

$$\begin{aligned} x_0 - \tilde{G}(x_0) &= \frac{m}{\delta}(1 - e^{\eta_-(m)x_0}) - B(x_0)(e^{\eta_+(m)x_0} - e^{\eta_-(m)x_0}) \\ &= \left(\frac{m}{\delta}A(x_0) + \frac{1 + \frac{m}{\delta}\eta_-(m)}{\eta_+(m) - \eta_-(m)} \right)(e^{\eta_+(m)x_0} - e^{\eta_-(m)x_0}) \\ &= \frac{1 - 2\mu m/\sigma^2\delta}{\eta_+(m) - \eta_-(m)}(e^{\eta_+(m)x_0} - e^{\eta_-(m)x_0}) \\ &= x_0 - k_0, \end{aligned}$$

这表明 $\tilde{G}(x_0) = k_0$. 更进一步, 对 $b \rightarrow \infty$, 有

$$\tilde{G}(\infty) = \lim_{b \rightarrow \infty} b - \frac{m}{\delta}(1 - e^{\eta_-(m)b}) - B(b)(e^{\eta_+(m)b} - e^{\eta_-(m)b}) = \infty - \eta_+^{-1}(m) = \infty.$$

因此, 对 $K \geq k_0$, 存在唯一的 $\eta^* \in [x_0, \infty)$, 满足 $\tilde{G}(\eta^*) = K$. 最后, 由 $\tilde{g}(b; x) > 0$ 可知 $\eta^* > K$ 成立. 结论得证. $\square$

定理 4.2 如果 $m < \sigma^2\delta/2\mu$ 且 $K \geq k_0$, 那么, 值函数

$$V(x) = \begin{cases} \frac{m}{\delta}(1 - e^{\eta_-(m)x}) - B(b)(e^{\eta_+(m)x} - e^{\eta_-(m)x}), & x \in [0, \tilde{\eta}^*), \\ x - K, & x \in [\tilde{\eta}^*, \infty), \end{cases}$$

其中 $\tilde{\eta}^*$ 由 (4.37) 给出.

证明 这里的证明与定理 4.1 的证明类似, 故省略之. $\square$

对于两种不同的情形, 定理 4.1 和 4.2 分别给出了值函数的形式. 结合验证定理的证明, 我们可以根据值函数给出最优分红策略.

当 $m \geq \sigma^2\delta/2\mu$, 或者 $m < \sigma^2\delta/2\mu$ 且 $K < k_0$ 时, 我们定义

$$l^*(x) = \begin{cases} m, & x \geq a, \\ 0, & 0 \leq x < a. \end{cases}$$

最优分红策略 $\pi^* = (l^*; \tau^*, \xi^*)$ 为下面的形式, 其中, 最优分红率 $l_t^* = l^*(X_t^{\pi^*})$; 最优脉冲分红的时间 $\tau^* = (\tau_1^*, \tau_2^*, \tau_3^*, \dots)$ 定义为 $\tau_0^* = 0$,

$$\tau_{n+1}^* = \inf\{t \geq \tau_n^*; X_t^{\pi^*} = b\}, \quad n \geq 1,$$

这里

$$dX_t^{\pi^*} = (u - l(X_t^{\pi^*}))dt + \sigma dB_t, \quad t \geq \tau_n^*, \quad n \geq 0,$$

且有 $X_0^{\pi^*} = x$ 和 $X_{\tau_n^*}^{\pi^*} = a, n \geq 1$; 最优脉冲分红量为, 对 $n \geq 1$ 都有

$$\xi_n^* = b - a - K = \eta^* - K.$$

当 $m < \sigma^2\delta/2\mu$ 且 $K \geq k_0$ 时, 最优分红率对所有 $t \geq 0$ 有 $l_t^* = m$; 最优脉冲分红时间 $\tau^* = \{\tau_1^*\}$ 定义为 $\tau_1^* = \inf\{t \geq 0; X_t^{\pi^*} = \tilde{b}\}$, 其中

$$X_t^{\pi^*} = x + (\mu - m)t + \sigma B_t, \quad t \geq 0.$$

最优的分红量为 $\xi_1^* = \tilde{b} - K = \tilde{\eta}^* - K$.

接下来, 我们给出两个注释, 分别讨论 $K \rightarrow 0$ 和 $m \rightarrow \infty$ 的特殊情形. 在这两种情形下, 最优分红策略均退化为经典的常数边界策略.

注 4.1 ($K \rightarrow 0$ 的情形) 当 $K \rightarrow 0$ 时, 由定理 4.1 和 (4.16) 可知, $\lim_{K \rightarrow 0} \eta^* = 0$. 那么, 基于 (4.17) 和 (4.18), 有

$$c_1 \eta_+^2(m) \rightarrow -\frac{\eta_+(m)\eta_-(m)}{\eta_+(m) - \eta_-(m)}, \quad c_2 \eta_-^2(m) \rightarrow \frac{\eta_+(m)\eta_-(m)}{\eta_+(m) - \eta_-(m)}.$$

结合 (4.21) 可得

$$\lim_{K \rightarrow 0} b = \lim_{K \rightarrow 0} a + \eta^* = \lim_{K \rightarrow 0} a = \frac{1}{\eta_+(0) - \eta_-(0)} \ln \frac{\eta_-^2(0)}{\eta_+^2(0)}.$$

这意味着, 该情形下最优分红策略为文献 [4, 5] 中给出经典边界分红策略. 也就是说, 当脉冲分红的固定成本消失时, 最优分红策略退化为经典的边界分红策略, 而以不超过 m 的分红率进行连续分红的策略将不会被选择.

注 4.2 ($m \rightarrow \infty$ 的情形) 首先, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 易知 $\eta_+(m) \rightarrow \infty$ 和 $\eta_-(m) \rightarrow 0$ 成立. 基于 (4.14) 和 (4.15), 我们还有 $A(x) \rightarrow 0$ 和 $g(b-a; x) \rightarrow 1$. 因此, 从 (4.16) 可知, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, η^* 不存在. 所以, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 我们任意取 b 满足 $a < b < \infty$.

其次, 基于 (4.17) 和 (4.18), 我们还有

$$c_1 \eta_+(m) + c_2 \eta_-(m) = 1, \quad c_1 \eta_+^2(m) + c_2 \eta_-^2(m) \rightarrow 0.$$

利用文献 [16] 中的相同技术, 我们对 $V(x)$ 在 $x = a$ 进行 Taylor 展开. 那么, 对 $a < x < b$, 存在常数 $x_a \in (a, x)$ 满足

$$V(x) = V(a) + (c_1 \eta_+(m) + c_2 \eta_-(m))(x - a) + (c_1 \eta_+^2(m) + c_2 \eta_-^2(m))(x_a - a)^2.$$

在上式两端取 $m \rightarrow \infty$, 得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V(x) = V(a) + x - a, \quad x \in [a, b].$$

将之与 (4.29) 中 $x > b$ 的情形进行比较, 我们知道, $m \rightarrow \infty$ 时 $b = \infty$ 为最优的. 此外, 从 (4.21) 知,

$$\lim_{m \rightarrow 0} a = \frac{1}{\eta_+(0) - \eta_-(0)} \ln \frac{\eta_-^2(0)}{\eta_+^2(0)}.$$

这意味着, 该情形下最优分红策略也退化为文献 [4, 5] 中给出的经典常数边界策略. 也就是说, 如果分红率没有有界的限制, 最优分红策略退化为经典边界策略, 脉冲分红的形式将不会被选择.

5 总结

本文通过分析一般情形下累积分红路径的分类, 研究了正则和脉冲组合分红策略可容许集中的最优分红策略. 假设对连续分红存在一个有界的分红率, 对脉冲分红存在一个固定交易成本, 对所有分红存在一个比例交易成本. 通过最大化公司破产前分红现值的期望值, 我们构建了一个正则和脉冲混合的最优控制问题. 在公司盈余用漂移 Brown 运动描述的模型下, 我们利用动态规划技术, 通过求解该

控制问题对应的 HJB 方程, 得到了值函数的解析表达式, 并给出了最优分红策略为阈值策略和脉冲策略混合的形式.

对更进一步的研究, 一个自然的推广是将公司的盈余过程用一般的扩散过程或者跳扩散模型替代. 再有, 还可以研究该组合分红策略在金融领域中最优投资和消费问题中的应用.

致谢 对两名匿名审稿人的宝贵意见给予衷心感谢!

参考文献

- 1 Albrecher H, Thonhauser S. Optimality results for dividend problems in insurance. *RACSAM Rev R Acad Cienc Exactas Fis Nat Ser A Mat*, 2009, 103: 295–320
- 2 Avanzi B. Strategies for dividend distribution: A review. *N Am Actuar J*, 2009, 13: 217–251
- 3 de Finetti B. Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio. In: *Transactions XVth International Congress of Actuaries, II*. New York, 1957, 433–443
- 4 Jeanblanc-Picqué M, Shiryaev A N. Optimization of the flow of dividends. *Russian Math Surveys*, 1995, 50: 257–277
- 5 Asmussen S, Taksar M. Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out. *Insurance Math Econom*, 1997, 20: 1–15
- 6 Paulsen J, Gjessing K. Optimal choice of dividend barriers for a risk process with stochastic return on investments. *Insurance Math Econom*, 1997, 20: 215–223
- 7 Gerber H U, Shiu E S W. Optimal dividends: Analysis with Brownian motion. *N Am Actuar J*, 2004, 8: 1–20
- 8 Cai J, Gerber H U, Yang H. Optimal dividend in an Ornstein-Uhlenbeck type model with credit and debit interest. *N Am Actuar J*, 2006, 10: 94–119
- 9 Loeffen R L. On optimality of the barrier strategy in de Finetti's dividend problem for spectrally negative Lévy processes. *Ann Appl Probab*, 2008, 18: 1669–1680
- 10 Gerber H U. On the probability of ruin in the presence of a linear dividend barrier. *Scand Actuar J*, 1981, 1981: 105–115
- 11 Albrecher H, Kainhofer R. Risk theory with a nonlinear dividend barrier. *Computing*, 2002, 68: 289–311
- 12 Gerber H U, Shiu E S W. On optimal dividends: From reflection to refraction. *J Comput Appl Math*, 2006, 186: 4–22
- 13 Zhou M, Guo J. Classical risk model with threshold dividend strategy. *Acta Math Sci Ser B Engl Ed*, 2008, 28: 355–362
- 14 Lin X S, Sendova K P. The compound Poisson risk model with multiple thresholds. *Insurance Math Econom*, 2008, 42: 617–627
- 15 Ng Andrew C Y. On a dual model with a dividend threshold. *Insurance Math Econom*, 2009, 44: 315–324
- 16 Zhou M, Yuen K C. Optimal reinsurance and dividend for a diffusion model with capital injection: Variance premium principle. *Econom Model*, 2012, 29: 198–207
- 17 Harrison J, Sellke M, Taylor J. Impulse control of Brownian motion. *Math Oper Res*, 1983, 8: 454–466
- 18 Shreve S E, Lehoczky J P, Gaver D P. Optimal consumption for general diffusions with absorbing and reflecting barriers. *SIAM J Control Optim*, 1984, 22: 55–75
- 19 Cadenillas A, Choulli T, Taksar M, et al. Classical and impulse stochastic control for the optimization of the dividend and risk policies of an insurance firm. *Math Finance*, 2006, 16: 181–202
- 20 Cadenillas A, Sarkar S, Zapatero F. Optimal dividend policy with mean-reverting cash reservoir. *Math Finance*, 2007, 17: 81–109
- 21 Paulsen J. Optimal dividend payments until ruin of diffusion processes when payments are subject to both fixed and proportional costs. *Adv Appl Probab*, 2007, 39: 669–689
- 22 Bai L, Paulsen J. Optimal dividend policies with transaction costs for a class of diffusion processes. *SIAM J Control Optim*, 2010, 48: 4987–5008
- 23 Meng H, Siu T K. Optimal mixed impulse-equity insurance control problem with reinsurance. *SIAM J Control Optim*, 2011, 49: 254–279
- 24 Bai L, Paulsen J. On non-trivial barrier solutions of the dividend problem for a diffusion under constant and proportional transaction costs. *Stochastic Process Appl*, 2012, 122: 4005–4027
- 25 Meng H. Optimal impulse control with variance premium principle (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2013, 43: 925–939
- 26 Loeffen R L. An optimal dividends problem with transaction costs for spectrally negative Lévy processes. *Insurance*

- Math Econom, 2009, 45: 41–48
- 27 Bai L, Guo J. Optimal dividend payments in the classical risk model when payments are subject to both transaction costs and taxes. Scand Actuar J, 2010, 2010: 36–55
- 28 Zhou M, Yiu K F C. Optimal dividend strategy with transaction costs for an upward jump model. Quant Financ, 2014, 14: 1097–1106
- 29 Choulli T, Taksar M, Zhou X Y. A diffusion model for optimal dividend distribution for a company with constraints on risk control. SIAM J Control Optim, 2003, 41: 1946–1979

Optimal dividend policy: A regular-impulse stochastic control problem

ZHOU Ming, MENG Hui & GUO JunYi

Abstract In this paper, we revisit the classic optimal dividend problem in a diffusion model. Note that, the aggregated dividend payments process is a càdlàg process, whose path can be partitioned into two parts: Continuous part and discontinuous part. Therefore, we incorporate both the continuous dividend form and the impulse dividend form in our model, which leads to a regular-impulse combined stochastic control problem. We assume that there exist a maximum rate for continuous dividend payments and both proportional and fixed costs for impulse dividend payments. When the company's surplus is described by a drifted Brownian motion, and the objective is to maximize the expectation of total discounted dividend payments up to the time of ruin, we obtain the explicit closed-form expressions for the value function and the optimal dividend policy. The optimal dividend policy is shown to be a combinational form of the threshold policy and the impulse policy.

Keywords optimal dividend, regular-impulse control, transaction costs

MSC(2010) 62P05, 91B30, 93E20

doi: 10.1360/012015-31