关于 $f + a(f')^n$ 的值分布

方明亮^{①*}, Lawrence ZALCMAN^②

① 华南农业大学应用数学研究所, 广州 510642

② Department of Mathematics, Bar-Ilan University, 52900, Ramat-Gan, Israel

* E-mail: hnmlfang@hotmail.com

收稿日期: 2007-04-17; 接受日期: 2007-09-24

国家自然科学基金 (批准号: 10771076), 广东省自然科学基金 (批准号: 07006700) 和 German-Israeli Foundation for Scientific Research and Development, Grant G-809-234.6/2003 资助项目

摘要 设 f 为超越亚纯函数, a 为非零有穷复数, $n (\geq 2)$ 为正整数, 则 $f + a(f')^n$ 取每一个复数无穷多次. 当 $n = 2$ 时回答了叶亚盛的一个问题. 同时给出了相应的正规族.

关键词 亚纯函数 值分布 正规族

MSC(2000) 主题分类 30D45, 30D35

1 引言

设 f 是一个复平面上的亚纯函数. 我们使用值分布理论中的标准记号、术语及结果, 参见文献 [1, 2]. 特别地, $T(r, f)$ 是 Nevanlinna 特征函数, $S(r, f)$ 表示一个当 $r \rightarrow \infty$ 时, $S(r, f) = o(T(r, f))$ 的函数 (当 f 是无穷级时, 需去掉一个具有有穷线性测度的例外集). 于是, 对于超越亚纯函数 f , 有 $\log r = S(r, f)$.

Hayman^[3] 证明了

定理 A 设 f 为超越亚纯函数, a 为非零有穷复数, 则对于任意正整数 $n \geq 5$, $f' + af^n$ 取每一个有穷复数无穷多次.

从定理 A 的证明可知: 对于一个复平面上的亚纯函数 f 以及正整数 $n \geq 5$, 若 $f' + af^n \neq b$, 其中 b 是某一个复数, 则 f 一定是常数. 另一方面, Mues^[4] 指出, 当 $n = 3$ 或 4 时, 对于任意 $b \neq 0$, 存在一个超越亚纯函数 f , 使得 $f' + af^n \neq b$.

叶^[5] 研究一个类似的问题, 证明了

定理 B 设 f 是一个超越亚纯函数, a 是一个非零有穷复数, 则对于任意正整数 $n \geq 3$, $f + a(f')^n$ 取每一个有穷复数无穷多次.

在文献 [5] 中, 叶提问当 $n = 2$ 时, 定理 B 是否成立? 我们在本文中肯定地解决了这个问题.

定理 1 设 f 是一个超越亚纯函数, $a \neq 0$ 和 b 是两个复数, $n \geq 2$ 是正整数, 则有

- i) $(n-1)T(r, f') \leq 3\overline{N}(r, f) + 4N\left(r, \frac{1}{f+a(f')^n-b}\right) + S(r, f')$, 其中 $n \geq 3$;
 ii) $T(r, f') \leq 2\overline{N}(r, f) + 2N\left(r, \frac{1}{f+a(f')^n-b}\right) + S(r, f')$, 其中 $n = 2$.

定理 2 设 f 是一个超越亚纯函数, a 是非零无穷复数, 则对于任意正整数 $n \geq 2$, $f+a(f')^n$ 取每一个有穷复数无穷多次.

注 1. 定理 B 的证明以如下不等式为基础:

$$(n-1)T(r, f') \leq 4\overline{N}(r, f) + 9N\left(r, \frac{1}{f+a(f')^n-b}\right) + S(r, f).$$

这个不等式比上面的不等式 i) 弱, 因此当 $n \geq 3$ 时, 叶给出的证明比我们给出的证明要复杂些.

2. 当 $n = 1$ 时, 定理 2 不成立. 例如, 设 $f(z) = e^{-z/a}$, 则对于任意的复数 $b \neq 0$, 有 $f+af' \neq b$.

3. 当 $n \geq 3$ 时, 若一个复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数满足 $f+a(f')^n \neq b$, 则 f 是一个常数. 显然, 由定理 2 知当 $n \geq 3$ 时, f 不是超越亚纯函数, 当 $n = 2$ 时, f 也不是超越亚纯函数. 另一方面, 对于某个复数 $b \in \mathbb{C}$, 由条件 $f+a(f')^2 \neq b$ 得不到 f 常数. 事实上, 取 $f(z) = z^2$, $a = -1/4$, 则有 $f+a(f')^2 \equiv 0$.

由 Bloch 原理^[6], 对于每一个 Liouville-Picard 型定理, 存在一个相应的亚纯函数族的正规定则. 相应于定理 A 的正规定则由 J. K. Langley、李松鹰、李先进独立获得. 事实上, 甚至当 $n = 3$ 和 4 时, 由庞学诚^[7]的方法可知: $f' + af^n$ 不取某个值时, 正规定则仍然成立, 这时不存在相应的 Liouville-Picard 型定理. 这样, Bloch 原理的逆命题在这种情形下不成立. 有关这方面研究的概述详见文献 [8].

于是很自然地提出是否存在相应于定理 B 和定理 2 的正规定则, 下面两例给出否定的回答.

例 1 设 $\mathcal{F} = \{f_n\}$, 其中 $f_n(z) = nz$, 又设 m 是一个正整数. 显然 $\mathcal{F}$ 在单位圆 Δ 内不正规. 但对于 $z \in \Delta$, 有

$$f_n(z) + [f'_n(z)]^m = nz + n^m = n(z + n^{m-1}) \neq 0.$$

例 2 设 $\mathcal{F} = \{f_n\}$, 其中

$$f_n(z) = -\frac{1}{4}z^2 + nz + \frac{1}{2}.$$

显然 $\mathcal{F}$ 在包含原点的任何区域内不正规, 但有 $f_n + (f'_n)^2 \equiv n^2 + 1/2 \neq 1$.

然而, 添加适当的条件后, 我们获得如下肯定的结果:

定理 3 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数, $n \geq 2$ 是一个正整数, $a \neq 0, b$ 是复数. 若对于每个 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点均是重级的并且在 D 内 $f+a(f')^n \neq b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

2 引理

为了证明定理 1-3, 需要如下一些结果.

引理 1(文献 [9] 中的引理 5)) 设 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上满足 $f^{(k+1)} \neq 0$ 的一个亚纯函数, k 是一个正整数, 则有

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r, f^{(k)}).$$

引理 2 设 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个亚纯函数, 则有

$$T(r, f') \leq T(r, f) + \overline{N}(r, f) + S(r, f').$$

证明 由 Nevanlinna 基础理论及引理 1 得

$$\begin{aligned} T(r, f') &= N(r, f') + m(r, f') \\ &\leq N(r, f) + \overline{N}(r, f) + m(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \\ &\leq T(r, f) + \overline{N}(r, f) + S(r, f'). \end{aligned}$$

引理 3^[10,11](参见文献 [12] 引理 2) 设 $\mathcal{F}$ 是单位圆内的一族亚纯函数, 其中每个函数的零点的重级至少是 k . 若 $\mathcal{F}$ 不正规, 则对于每个 $0 \leq \alpha < k$, 存在

- a) 一个数 $0 < r < 1$;
- b) 点列 z_n , $|z_n| < r$;
- c) 函数列 $f_n \in \mathcal{F}$;
- d) 正数列 $\rho_n \rightarrow 0$,

使得 $\rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \zeta) = g_n(\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 内按球面距离内闭一致收敛到一个非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$, 并且 g 的所有零点的重级至少是 k .

3 定理 1–3 的证明

定理 1 的证明 令

$$g = f + a(f')^n - b, \quad \phi = \frac{g'}{g}, \quad (3.1)$$

则 $\phi \neq 0$. 事实上, 如果 $\phi \equiv 0$, 则有

$$f'[1 + na(f')^{n-2}f''] \equiv 0,$$

于是即得 $f' \equiv 0$ 或 $1 + na(f')^{n-2}f'' \equiv 0$. 因此 f 是一个常数或次数为 2 的多项式, 矛盾. 所以 $\phi \neq 0$.

由 Nevanlinna 基础理论和 (3.1) 式可得 $T(r, g') \leq O(T(r, f'))$. 于是结合引理 1 可得

$$m(r, \phi) = S(r, f'). \quad (3.2)$$

由 (3.1) 式得

$$f'[1 + na(f')^{n-2}f''] = \phi[f + a(f')^n - b]. \quad (3.3)$$

于是由 (3.3) 式和 Nevanlinna 第一基本定理得

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N\left(r, \frac{1}{(f')^{n-2}f'' + \frac{1}{na}}\right) \\ \leq N\left(r, \frac{1}{\phi}\right) + N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) \\ \leq N(r, \phi) + N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) + S(r, f') \\ \leq x\overline{N}(r, f) + 2N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) + S(r, f'). \end{aligned} \quad (3.4)$$

另一方面, 根据 Nevanlinna 第一基本定理, 文献 [1] 第 33 页的 (2.1) 式以及引理 1 和 2 可得

$$\begin{aligned}
& m\left(r, \frac{1}{(f')^{n-1}}\right) + m\left(r, \frac{1}{(f')^{n-2}f'' + 1/(na)}\right) \\
& \leq m\left(r, \frac{1}{(f')^{n-2}f''}\right) + m\left(r, \frac{f''}{f'}\right) + m\left(r, \frac{1}{(f')^{n-2}f'' + 1/(na)}\right) \\
& \leq m\left(r, \frac{1}{(f')^{n-2}f''} + \frac{1}{(f')^{n-2}f'' + 1/(na)}\right) + S(r, f') \\
& \leq m\left(r, \frac{((f')^{n-2}f'')'}{(f')^{n-2}f''} + \frac{((f')^{n-2}f'' + 1/(na))'}{(f')^{n-2}f'' + 1/(na)}\right) + m\left(r, \frac{1}{((f')^{n-2}f'')'}\right) + S(r, f') \\
& \leq T(r, ((f')^{n-2}f'')') - N\left(r, \frac{1}{((f')^{n-2}f'')'}\right) + S(r, f') \\
& \leq T(r, (f')^{n-2}f'') + \overline{N}(r, f) - N\left(r, \frac{1}{((f')^{n-2}f'')'}\right) + S(r, f'). \tag{3.5}
\end{aligned}$$

于是结合 Nevanlinna 第一基本定理得

$$\begin{aligned}
(n-1)T(r, f') & \leq \overline{N}(r, f) + (n-1)N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N\left(r, \frac{1}{(f')^{n-2}f'' + \frac{1}{na}}\right) \\
& \quad - N\left(r, \frac{1}{((f')^{n-2}f'')'}\right) + S(r, f'). \tag{3.6}
\end{aligned}$$

若 $n \geq 3$, 则由 (3.6) 式得

$$\begin{aligned}
(n-1)T(r, f') & \leq \overline{N}(r, f) + 2\overline{N}\left(r, \frac{1}{f'}\right) \\
& \quad + \overline{N}\left(r, \frac{1}{(f')^{n-2}f'' + \frac{1}{na}}\right) + S(r, f'). \tag{3.7}
\end{aligned}$$

于是由 (3.4) 和 (3.7) 式即得

$$(n-1)T(r, f') \leq 3\overline{N}(r, f) + 4N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) + S(r, f'). \tag{3.8}$$

若 $n = 2$, 则由 (3.6) 和 (3.4) 式得

$$T(r, f') \leq 2\overline{N}(r, f) + 2N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) + S(r, f'). \tag{3.9}$$

于是定理 1 得证.

定理 2 的证明 反证法. 假设 $f + a(f')^n$ 取某个值 b 只有有穷次, 于是有

$$N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) = O(\log r) = S(r, f'). \tag{3.10}$$

若 $n \geq 3$, 则由 (3.8) 和 (3.10) 式得

$$2T(r, f') \leq 3\overline{N}(r, f) + S(r, f'). \tag{3.11}$$

由于

$$2\overline{N}(r, f) \leq N(r, f) + \overline{N}(r, f) = N(r, f') \leq T(r, f'), \tag{3.12}$$

于是由 (3.11) 和 (3.12) 式得

$$2T(r, f') \leq 3N(r, f) \leq \frac{3}{2}T(r, f') + S(r, f').$$

即 $T(r, f') = S(r, f')$, 矛盾.

现在设 $n = 2$. 由 (3.9) 和 (3.10) 式得

$$m(r, f') = S(r, f'). \quad (3.13)$$

由 (3.3) 式得

$$f'(2af'' - a\phi f' + 1) = \phi(f - b). \quad (3.14)$$

令 $H = 2af'' - a\phi f' + 1$. 于是由 (3.2) 和 (3.13) 式以及引理 1 得

$$m(r, H) = S(r, f'). \quad (3.15)$$

由 (3.1) 和 (3.14) 式知, f 的极点不可能是 H 的极点, 因此 H 的极点只可能是 ϕ 的极点, 于是由 (3.1) 和 (3.10) 式得

$$N(r, H) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f + a(f')^2 - b}\right) = S(r, f'). \quad (3.16)$$

由此即得

$$T(r, H) = S(r, f'). \quad (3.17)$$

由 (3.14) 式得

$$N_1\left(r, \frac{1}{f - b}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{H}\right) \leq T(r, H) + O(1) = S(r, f'), \quad (3.18)$$

其中 N_1 是单重极点的计数函数, $N_{(2)}$ 是重极点的计数函数.

于是结合 (3.10) 式推得

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{f - b}\right) &= N_1\left(r, \frac{1}{f - b}\right) + N_{(2)}\left(r, \frac{1}{f - b}\right) \\ &\leq N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^2 - b}\right) + S(r, f') = S(r, f'). \end{aligned} \quad (3.19)$$

由 Nevanlinna 第一、第二基本定理和引理 1 得

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{1}{a(f')^2}\right) &\leq m\left(r, \frac{f - b}{a(f')^2}\right) + m\left(r, \frac{1}{f - b}\right) \\ &\leq m\left(r, \frac{f - b}{a(f')^2} + 1\right) + m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f - b}\right) + O(1) \\ &\leq m\left(r, \frac{f + a(f')^2 - b}{a(f')^2}\right) + m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f') \\ &= T\left(r, \frac{a(f')^2}{f + a(f')^2 - b}\right) - N\left(r, \frac{f + a(f')^2 - b}{a(f')^2}\right) + m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f') \\ &\leq \overline{N}\left(r, \frac{a(f')^2}{f + a(f')^2 - b}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{f + a(f')^2 - b}{a(f')^2}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{\frac{a(f')^2}{f + a(f')^2 - b} - 1}\right) \\ &\quad - N\left(r, \frac{f + a(f')^2 - b}{a(f')^2}\right) + m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f'). \end{aligned} \quad (3.20)$$

通过简单的计算得

$$\overline{N}\left(r, \frac{a(f')^2}{f + a(f')^2 - b}\right) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f + a(f')^2 - b}\right), \quad (3.21)$$

$$\overline{N}\left(r, \frac{f+a(f')^2-b}{a(f')^2}\right) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f'}\right), \quad (3.22)$$

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{\frac{a(f')^2}{f+a(f')^2-b}-1}\right) \leq \overline{N}(r, f) + N_1\left(r, \frac{1}{f-b}\right), \quad (3.23)$$

$$N\left(r, \frac{f+a(f')^2-b}{a(f')^2}\right) \geq N\left(r, \frac{1}{(f')^2}\right) - N\left(r, \frac{1}{f+a(f')^2-b}\right). \quad (3.24)$$

这样由 (3.10) 和 (3.19)–(3.24) 式以及 Nevanlinna 第一基本定理得

$$\begin{aligned} 2T(r, f') &\leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \overline{N}(r, f) + m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f') \\ &\leq T(r, f') + \overline{N}(r, f) + S(r, f') \leq \frac{3}{2}T(r, f') + S(r, f'). \end{aligned}$$

于是即得 $T(r, f') = S(r, f')$, 矛盾. 因此, $f+a(f')^2$ 取每一个复数无穷多次. 定理 2 得证.

定理 3 的证明 设 D 是单位圆 Δ . 假设 $\mathcal{F}$ 在 Δ 内不正规. 我们考虑两种情形.

情形 1 $b = 0$. 取 $f \in \mathcal{F}$. 由于 $f+a(f')^n \neq 0$ 且 f 的零点重级至少是 2, 于是即得 $f \neq 0$. 这样我们可以对任何正值 α 使用引理 3. 取 $\alpha = n/(n-1)$, 则由引理 3 知, 存在 $f_m \in \mathcal{F}$, $z_m \in \Delta$, 以及 $\rho_m \rightarrow 0^+$, 使得 $g_m(\zeta) = \rho_m^{-\frac{n}{n-1}} f_m(z_m + \rho_m \zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 内按球面距离内闭一致收敛到一个非常数的亚纯函数 g . 由 Hurwitz 定理可知, $g \neq 0$. 由于 $g_m + a(g'_m)^n = \rho_m^{-\frac{n}{n-1}} [f_m + a(f'_m)^n] \neq 0$, 在复平面 $\mathbb{C}$ 上去掉 g 的极点后的区域内内闭一致收敛于 $g+a(g')^n$, 于是有或者 $g+a(g')^n \neq 0$, 或者 $g+a(g')^n \equiv 0$.

若 $g+a(g')^n \neq 0$, 则由定理 2 知 g 是一个有理函数. 因为 $g \neq 0$, 所以 $g(\xi) = \frac{1}{P(\xi)}$, 其中 P 是一个多项式, 于是有

$$g(\xi) + a(g'(\xi))^n = \frac{1}{P(\xi)} + a\left(-\frac{P'(\xi)}{P^2(\xi)}\right)^n.$$

由于 $g+a(g')^n \neq 0$, 于是即得 P 是常数, 因此 g 是常数, 矛盾.

所以 $g+a(g')^n \equiv 0$. 显然 g 没有极点. 因为 $g \neq 0$, 于是 $g = e^h$, 其中 h 是非常数整函数. 这样就得 $e^h + a(h')^n e^{nh} \equiv 0$, 于是得知 $(h')^n e^{(n-1)h}$ 是常数. 由于 $n \neq 1$, 这是不可能的.

情形 2 $b \neq 0$. 由引理 3 知, 存在 $f_m \in \mathcal{F}$, $z_m \in \Delta$, 以及 $\rho_m \rightarrow 0^+$, 使得 $g_m(\zeta) = \rho_m^{-1} f_m(z_m + \rho_m \zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球面距离内闭一致收敛到一个非常数的亚纯函数 g , 且 g 的所有零点都是重级零点.

于是

$$0 \neq f_m(z_m + \rho_m \xi) + a[f'_m(z_m + \rho_m \xi)]^n - b = \rho_m g_m(\xi) + a[g'_m(\xi)]^n - b$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上去掉 g 的极点后的区域内内闭一致收敛于 $a[g'(\xi)]^n - b$. 这样由 Hurwitz 定理可知, 或者 $a(g')^n - b \equiv 0$ 或者 $a(g')^n - b \neq 0$. 若 $a(g')^n \equiv b$, 则 g 是一个次数为 1 的多项式. 又由于 g 的零点都是重级零点, 所以 g 一定是常数, 矛盾.

于是设 $a(g')^n - b \neq 0$, 并设 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 是方程 $w^n = b/a$ 的判别的解. 由 Nevanlinna 第二基本定理得

$$\begin{aligned} T(r, g') &\leq \overline{N}(r, g') + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g' - c_1}\right) + \dots + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g' - c_n}\right) + S(r, g') \\ &\leq \overline{N}(r, g') + S(r, g') \leq \frac{1}{2}N(r, g') + S(r, g') \leq \frac{1}{2}T(r, g') + S(r, g'). \end{aligned}$$

于是即得 $T(r, g') = S(r, g')$, 矛盾.
所以 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规. 定理 3 得证.

4 与 Bloch 原理的联系

设 $P = P(X, Y)$ 是一个复系数的二变量多项式. 如果对于复平面 $\mathbb{C}$ 上的任意亚纯函数 f , 只要满足 $P(f, f') \neq b$ (即, 对于任何 $z \in \mathbb{C}$, 有 $P(f(z), f'(z)) \neq b$), 其中 $b \in \mathbb{C}$ 是某个复数就可得到 f 是一个常数, 则称 P 是 Picard 型. 如果对于平面区域 D 内的任意一族亚纯函数, 只要该族中的任何函数 f 在 D 内满足 $P(f, f') \neq b$ 就可得到该族是正规族, 则称 P 是 Montel 型. 如果对于任何超越亚纯函数 f , $P(f, f')$ 取每一个有穷复数无穷多次, 则称 P 是弱 Picard 型.

下表列出了引言及引言中提到的参考文献中给出的有关这 3 种类型多项式的信息, 其中 $a \neq 0$.

$P(f, f')$	弱 Picard 型	Picard 型	Montel 型
$f' + af^n$ $n \geq 5$	是	是	是
$f + a(f')^n$ $n \geq 3$	是	是	不是
$f + a(f')^2$ 重级零点	是	不是	是
$f + a(f')^2$	是	不是	不是
$f' + af^n$ $n=3,4$	不是	不是	是
$f' + af^n$ $n=1,2$	不是	不是	不是

参考文献

1 Hayman W K. Meromorphic Functions. Oxford: Clarendon Press, 1964
2 Yang L. Value Distribution Theory. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag; Beijing: Science Press, 1993
3 Hayman W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives. *Ann of Math*, **70**(2): 9–42 (1959)
4 Mues E. Über ein Problem von Hayman. *Math Z*, **164**: 239–259 (1979)
5 Ye Y S. A Picard type theorem and Bloch law. *Chinese Ann Math Ser B*, **15**: 75–80 (1994)
6 Bergweiler W. Bloch’s Principle. *Comput Methods Funct Theory*, **6**: 77–108 (2006)
7 Pang X C. On normal criterion of meromorphic functions. *Sci China Ser A-Math*, **33**: 521–527 (1990)
8 Zalcman L. New light on normal families. In: Zalcman L, ed., Proceedings of the Ashkelon Workshop on Complex Function Theory, (May, 1996) Bar-Ilan University, 1997, 237–245
9 Yang L. Precise fundamental inequalities and sum of deficiencies. *Sci China Ser A-Math*, **34**: 157–165 (1991)
10 Chen H H, Gu Y X. Improvement of Marty’s criterion and its application. *Sci China Ser A-Math*, **36**: 674–681 (1993)
11 Pang X C, Zalcman L. Normal families and shared values. *Bull London Math Soc*, **32**: 325–331 (2000)
12 Zalcman L. Normal families: New perspectives. *Bull Amer Math Soc*, **35**: 215–230 (1998)