一维周期方程的周期解问题

献给张芷芬教授 90 华诞

盛丽鹃, 韩茂安*

上海师范大学数理学院, 上海 200234

E-mail: shenglj@shnu.edu.cn, mahan@shnu.edu.cn

收稿日期: 2016-06-23; 接受日期: 2016-08-24; 网络出版日期: 2016-11-10; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11271261 和 11431008) 资助项目

摘要 本文给出研究一维周期微分方程周期解的若干方法, 包括利用 Poincaré 映射来判定周期解的个数、零解的稳定性及其重数、规范形方法和平均法等, 其中既有对已有结论的总结和改进, 又包含了一些新的结论.

关键词 周期解 Poincaré 映射 规范形 平均法

MSC (2010) 主题分类 37C10, 37C25, 34M35, 34C29

1 引言

众所周知, 一阶微分方程 $\dot{x} = f(t, x)$ 被广泛应用于建立物理、生物、经济和医学等多个领域的数学模型. 当 $f(t, x)$ 与 t 无关时, 该系统称为自治系统. 此时, 方程不存在非平凡周期解, 即周期解为常数. 当 $f(t, x)$ 与 t 有关时, 该系统称为非自治系统, 特别地, 当 f 关于 t 为周期函数时, 称其为一维周期方程. 此时, 其周期解的个数和分布问题就变得复杂起来. 由于非自治系统更符合实际意义, 因此长期以来一直是众多科学家的研究课题, 研究的主要问题是周期解的存在性、稳定性及其个数等 (参见文献 [1–8]). 本文的研究内容也是集中在周期解的存在性、稳定性及其个数问题, 重点是给出研究这些问题的若干理论与方法. 本文结构如下: 第 2 节主要阐述周期解个数与 Poincaré 映射的关系, 其中包含对已有结论的总结与改进; 第 3 节研究零解的稳定性及其重数; 第 4 节是规范形理论, 获得了一个适用于一般方程的规范形定理; 第 5 节是平均法理论, 阐述如何利用平均方程来得到方程的周期解个数.

2 Poincaré 映射与周期解个数

本节考虑一维周期微分方程

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (2.1)$$

英文引用格式: Sheng L J, Han M A. Periodic solutions of one dimensional T -periodic differential equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 171–186, doi: 10.1360/N012016-00121

其中 $t, x \in \mathbb{R}$, 而 f 连续且关于 t 为 T 周期函数. 为保证 (2.1) 初值问题解的存在唯一性, 设 f_x 存在且为连续函数. 用 $\varphi(t, x_0)$ 表示 (2.1) 的满足 $\varphi(0, x_0) = x_0$ 的解, 则 φ 为 C^1 函数. 引入两个函数 P 和 d 如下:

$$P(x_0) = \varphi(T, x_0), \quad d(x_0) = P(x_0) - x_0.$$

众所周知, 称 P 为 (2.1) 的 Poincaré 映射或回归映射, 而称 d 为 (2.1) 的后继函数.

首先, 由解的存在唯一性定理易证下列熟知的结果.

引理 1 解 $\varphi(t, x_0)$ 为 (2.1) 的 T 周期解当且仅当其初值 x_0 满足 $P(x_0) = x_0$ 或 $d(x_0) = 0$.

由于 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ 是微分方程初值问题

$$\dot{z} = f_x(t, \varphi)z, \quad z(0) = 1$$

的解, 因此可求出

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t, x_0) = e^{\int_0^t f_x(s, \varphi(s, x_0)) ds}. \quad (2.2)$$

进一步, 由此式知, 如果 f_{xx} 存在且为连续函数, 则有

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \int_0^t f_{xx}(s, \varphi(s, x_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(s, x_0) ds,$$

于是由 P 的定义知下述引理成立.

引理 2 当 f_x 存在且连续时, $P'(x_0) = e^{\int_0^T f_x(t, \varphi(t, x_0)) dt}$. 当 f_{xx} 存在且连续时,

$$P''(x_0) = P'(x_0) \int_0^T f_{xx}(t, \varphi(t, x_0)) e^{\int_0^t f_x(s, \varphi(s, x_0)) ds} dt.$$

上述引理中的两个公式曾在文献 [9] 中给出. 当 f_{xxx} 存在且连续时, 文献 [9] 还给出了 P''' 的公式, 即

$$P'''(x_0) = P'(x_0) \left[\frac{3}{2} \left(\frac{P''(x_0)}{P'(x_0)} \right)^2 + \int_0^T f_{xxx}(t, \varphi(t, x_0)) e^{2 \int_0^t f_x(s, \varphi(s, x_0)) ds} dt \right].$$

由 P' 的公式易见, 如果 $f_x(t, x) \neq 0$, 则方程 (2.1) 至多有一个周期解, 进一步利用 P'' 和 P''' 的公式, 文献 [9] 获得了下列定理.

定理 1 如果 f_{xx} 存在、连续且恒不为零, 则方程 (2.1) 至多有 2 个周期解. 如果 f_{xxx} 存在、连续且恒不为零, 则 (2.1) 至多有 3 个周期解.

由上述定理立即得到以下推论.

推论 1 考虑微分方程

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^3 + b(t)x^2 + c(t)x + d(t),$$

其中 $a(t)$ 、 $b(t)$ 、 $c(t)$ 和 $d(t)$ 为连续的 T 周期函数, 则当 $a(t) > 0$ 时, 该方程至多有 3 个 T 周期解.

上述推论中的结论曾在文献 [1] 中出现, 文献 [1] 还证明了, 对任给自然数 k , 都存在适当的连续函数 $a(t)$ 、 $b(t)$ 、 $c(t)$ 和 $d(t)$, 使得下列微分方程:

$$\frac{dx}{dt} = x^4 + a(t)x^3 + b(t)x^2 + c(t)x + d(t)$$

有 k 个周期解.

下面对定理 1 作一点改进, 即有下列新结果.

定理 2 如果 f_x 存在且关于 x 为严格单调的, 则方程 (2.1) 至多有 2 个周期解. 如果 f_{xx} 存在且关于 x 为严格单调的, 则方程 (2.1) 至多有 3 个周期解.

证明 先证第一个结论. 设 f_x 存在且关于 x 为严格单调的. 为确定计, 设 f_x 关于 x 为严格增加的. 现用反证法证明 (2.1) 至多有 2 个周期解. 若结论不成立, 则 (2.1) 有 3 个周期解, 设其为 x_j , $j = 1, 2, 3$. 由解的存在唯一性定理, 不妨设 $x_1(t) < x_2(t) < x_3(t)$. 进一步又可设 $x_1(t) \equiv 0$ (否则可引入变换 $y = x - x_1(t)$), 于是必有 $f(t, 0) \equiv 0$, 从而由 Newton-Leibniz 公式知,

$$x_2'(t) = f(t, x_2(t)) = x_2(t) \int_0^1 f_x(t, sx_2(t)) ds, \quad (2.3)$$

$$x_3'(t) = f(t, x_3(t)) = x_3(t) \int_0^1 f_x(t, sx_3(t)) ds. \quad (2.4)$$

由于已设 f_x 为 x 的严格增函数, 故 $f_x(t, sx_3(t)) > f_x(t, sx_2(t))$, $0 < s < 1$. 从而由 (2.3) 和 (2.4) 知,

$$\frac{x_2'(t)}{x_2(t)} < \frac{x_3'(t)}{x_3(t)}.$$

对于上式在 $[0, T]$ 上积分, 并注意到 $x_j(0) = x_j(T)$, $j = 2, 3$, 可得

$$0 = \ln \frac{x_2(T)}{x_2(0)} < \ln \frac{x_3(T)}{x_3(0)} = 0,$$

该式矛盾. 第一个结论得证.

对这一结论可给出另一证明. 由于 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} > 0$, 故 φ 关于 x_0 为严格增加的, 因此, 当 f_x 关于 x 严格单调时, 复合函数 $f_x(t, \varphi(t, x_0))$ 关于 x_0 也为严格单调的, 于是, 由 $P'(x_0)$ 的公式知, 函数 $d'(x_0) = P'(x_0) - 1$ 为严格单调的, 故 $d'(x_0)$ 至多有一个根, 从而由 Rolle 定理知, $d(x_0)$ 至多有 2 个根, 即 (2.1) 至多有 2 个周期解.

再证第二个结论. 设 f_{xx} 存在连续且关于 x 为严格单调的, 不妨设它是严格增加的. 若结论不成立, 则 (2.1) 有 4 个周期解, 设其为

$$x_1(t) < x_2(t) < x_3(t) < x_4(t).$$

同上又可设 $x_1(t) = 0$, 仍由 Newton-Leibniz 公式知,

$$x_j'(t) = x_j(t) \int_0^1 f_x(t, sx_j(t)) ds, \quad j = 2, 3, 4,$$

于是,

$$\frac{x_{j+1}'}{x_{j+1}} - \frac{x_j'}{x_j} = \int_0^1 [f_x(t, sx_{j+1}(t)) - f_x(t, sx_j(t))] ds, \quad j = 2, 3. \quad (2.5)$$

再一次利用 Newton-Leibniz 公式又有

$$f_x(t, sx_{j+1}(t)) - f_x(t, sx_j(t)) = s(x_{j+1}(t) - x_j(t)) \int_0^1 f_{xx}(t, sx_j(t) + us(x_{j+1}(t) - x_j(t))) du, \quad j = 2, 3.$$

将上式代入 (2.5) 可得

$$\frac{1}{x_{j+1}(t) - x_j(t)} \left(\frac{x_{j+1}'(t)}{x_{j+1}(t)} - \frac{x_j'(t)}{x_j(t)} \right) = \int_0^1 \int_0^1 s f_{xx}(t, s(1-u)x_j(t) + usx_{j+1}(t)) du ds, \quad j = 2, 3. \quad (2.6)$$

因为 f_{xx} 关于 x 为严格单调增加的, 且当 $s, u \in (0, 1)$ 时,

$$s(1-u)x_3(t) + usx_4(t) > s(1-u)x_2(t) + usx_3(t).$$

故由 (2.6) 知,

$$\frac{1}{x_4(t) - x_3(t)} \left(\frac{x'_4(t)}{x_4(t)} - \frac{x'_3(t)}{x_3(t)} \right) > \frac{1}{x_3(t) - x_2(t)} \left(\frac{x'_3(t)}{x_3(t)} - \frac{x'_2(t)}{x_2(t)} \right),$$

即

$$\frac{(\ln(x_4(t)x_3^{-1}(t)))'}{x_3(t)(x_4(t)x_3^{-1}(t) - 1)} > \frac{(\ln(x_3(t)x_2^{-1}(t)))'}{x_3(t)(1 - x_2(t)x_3^{-1}(t))}. \quad (2.7)$$

令 $y(t) = x_3(t)x_2^{-1}(t)$, $z(t) = x_4(t)x_3^{-1}(t)$, 则 (2.7) 可写成

$$\frac{(\ln z(t))'}{z(t) - 1} > \frac{(\ln y(t))'}{1 - y^{-1}(t)},$$

即

$$\frac{z'(t)}{z(t)(z(t) - 1)} > \frac{y'(t)}{y(t) - 1}.$$

由于 $y(t)$ 和 $z(t)$ 均为 T 周期函数, 在 $[0, T]$ 上积分上式可得

$$0 = \int_0^T \frac{dz(t)}{z(t)(z(t) - 1)} > \int_0^T \frac{dy(t)}{y(t) - 1} = 0,$$

该式矛盾. 证毕. □

作为一个简单的应用例子, 由定理 2 知, 周期方程

$$\dot{x} = x|x|^\alpha - 3x + \sin t, \quad \alpha > 1 \quad (2.8)$$

至多有 3 个 2π 周期解. 又由于该方程满足

$$\dot{x}|_{x \gg 1} > 0, \quad \dot{x}|_{x=1} < 0, \quad \dot{x}|_{x=-1} > 0, \quad \dot{x}|_{x \ll -1} < 0,$$

故知存在 $x_0^* > 1$, 使得方程 (2.8) 的后继函数 $d(x_0)$ 满足

$$d(x_0^*) > 0, \quad d(1) < 0, \quad d(-1) > 0, \quad d(-x_0^*) < 0.$$

故存在 $x_1 \in (1, x_0^*)$, $x_2 \in (-1, 1)$, $x_3 \in (-x_0^*, -1)$, 使得 $d(x_j) = 0$, $j = 1, 2, 3$. 从而可知, 方程 (2.8) 恰有 3 个 2π 周期解.

易见对 $\alpha \in (1, 2)$, 定理 1 的条件不满足.

3 零解稳定性与重数

本节仍考虑一维周期方程 (2.1). 设其有初值为 x_0^* 的周期解 $\varphi(t, x_0^*)$, 此时可讨论 $x = \varphi(t, x_0^*)$ 在 Lyapunov 意义下的稳定性问题. 现设函数 f 关于 x 为 C^∞ 的, 则后继函数 $d(x_0)$ 为 C^∞ , 且 $d(x_0^*) = 0$. 于是, 当 $|x_0 - x_0^*|$ 充分小时, 下列形式展开式成立:

$$d(x_0) = \sum_{j \geq 1} d_j(x_0 - x_0^*)^j. \quad (3.1)$$

文献 [10] 曾给出下列定义.

定义 1 如果存在自然数 $k \geq 1$ 使得

$$d_j = 0, \quad j = 1, \dots, k-1, \quad d_k \neq 0, \quad (3.2)$$

则称 $\varphi(t, x_0^*)$ 为 (2.1) 的 k 重周期解.

由于任一周期解都可以经平移变换化为零解, 不失一般性, 下面研究零周期解的重数问题.

文献 [11, 12] 曾证明下列定理.

定理 3 设 $f \in C^1$, $f(t, 0) = 0$, 则周期方程 (2.1) 的零解为 Lyapunov 意义下渐近稳定的当且仅当存在 $\varepsilon > 0$, 使得当 $0 < |x_0| < \varepsilon$ 时, $x_0 d(x_0) < 0$.

易见, 如果 $x = 0$ 为偶数重的, 则当 $|x_0| > 0$ 充分小时, $d(x_0) \neq 0$ 恒大于 0 或恒小于 0, 此时我们称 $x = 0$ 为半稳定的. 如果 $x = 0$ 为奇数重的, 即 (3.2) 中 k 为奇数, 则当 $d_k < 0$ 时, $x = 0$ 为渐近稳定的, 此时我们简称 $x = 0$ 为 (轨道) 稳定的; 当 $d_k > 0$ 时, $x = 0$ 为完全不稳定的. 渐近稳定或完全不稳定的零解统称为是焦点型的.

如果当 $|x_0|$ 充分小时, $d(x_0) \equiv 0$, 则称零解 $x = 0$ 为中心型的. 当周期解的某邻域内没有其他周期解时, 我们称其为孤立周期解. 易见, 中心型的周期解是非孤立的, 而焦点型的周期解一定是孤立的.

文献 [10] 给出了下列公式:

$$\begin{aligned} d_1 &= P'(0) - 1 = e^{\int_0^T f_x(t,0)dt} - 1, \\ d_2 &= \frac{1}{2}P''(0) = \frac{P'(0)}{2} \int_0^T f_{xx}(t,0)e^{\int_0^t f_x(s,0)ds}dt, \end{aligned}$$

当 $d_1 = d_2 = 0$ 时,

$$d_3 = \frac{1}{6} \int_0^T f_{xxx}(t,0)e^{2\int_0^t f_x(s,0)ds}dt.$$

上述公式也可由上一节给出的 P' 、 P'' 和 P''' 的公式得到.

下面研究零解的重数.

命题 1 线性 T 周期方程 $\frac{dx}{dt} = a(t)x$ 的孤立零解的重数至多为 1. Riccati T 周期方程 $\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x$ 的孤立零解的重数至多为 2.

证明 线性周期方程 $\frac{dx}{dt} = a(t)x$ 的 Poincaré 映射为

$$P(x_0) = x_0 e^{\int_0^T a(t)dt},$$

故当 $\int_0^T a(t)dt \neq 0$ 时, $d_1 \neq 0$, 即 $x = 0$ 为单重零解; 而当 $\int_0^T a(t)dt = 0$ 时, $d(x_0) \equiv 0$, 此时 $x = 0$ 为中心型零解.

对 Riccati 方程 $\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x$, 为求其 Poincaré 映射, 令 $y = \frac{1}{x}$, 则得

$$\frac{dy}{dt} = -b(t)y - a(t),$$

其 Poincaré 映射为

$$\bar{P}(y_0) = y_0 e^{-\int_0^T b(t)dt} - B, \quad B = e^{-\int_0^T b(t)dt} \int_0^T e^{\int_0^t b(s)ds} a(t)dt.$$

于是, 原方程的 Poincaré 映射为

$$P(x_0) = \left[\bar{P}\left(\frac{1}{x_0}\right) \right]^{-1} = \frac{x_0}{e^{-\int_0^T b(t)dt} - Bx_0}.$$

于是,

$$\begin{aligned} d_1 &= P'(0) - 1 = e^{\int_0^T b(t)dt} - 1, \\ d_2 &= \frac{1}{2}P''(0) = B \quad (\text{当 } d_1 = 0 \text{ 时}). \end{aligned}$$

且当 $d_1 = d_2 = 0$ 时, $P(x_0) \equiv x_0$. 由此即得结论. 证毕. $\square$

由命题 1 知, 一般线性周期方程的任一孤立周期解只能是 1 重的, 一般 Riccati 方程的任一孤立周期解至多是 2 重的.

命题 2 设 $a(t)$ 和 $b(t)$ 为 T 周期的连续函数, 则 Bernoulli 方程为

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^n + b(t)x,$$

其中 $n > 1$ 为自然数, 且下列结果成立:

- (1) 当 $\int_0^T b(t)dt \neq 0$ 时, $x = 0$ 为单重零解;
- (2) 当 $\int_0^T b(t)dt = 0$, $\int_0^T e^{(n-1)\int_0^t b(s)ds} a(t)dt \neq 0$ 时, $x = 0$ 为 n 重零解;
- (3) 当 $\int_0^T b(t)dt = \int_0^T e^{(n-1)\int_0^t b(s)ds} a(t)dt = 0$ 时, $x = 0$ 为中心型的.

证明 令 $y = x^{1-n}$, 则原方程化为线性方程

$$\frac{dy}{dt} = (1-n)b(t)y + (1-n)a(t),$$

其 Poincaré 映射为

$$\bar{P}(y_0) = y_0 e^{(1-n)\int_0^T b(t)dt} - \bar{B}, \quad \bar{B} = (n-1)e^{(1-n)\int_0^T b(t)dt} \int_0^T e^{(n-1)\int_0^t b(s)ds} a(t)dt.$$

于是, 原方程的 Poincaré 映射为

$$P(x_0) = [\bar{P}(x_0^{1-n})]^{\frac{1}{1-n}} = x_0 [e^{(1-n)\int_0^T b(t)dt} - \bar{B}x_0^{n-1}]^{\frac{1}{1-n}}.$$

由此即知结论成立. $\square$

对于满足某种对称性的周期方程, 我们有下列结果.

定理 4 考虑 T 周期方程 (2.1), 设 $f(t, 0) = 0$, 且对充分小的 $|x|$, f 为解析函数, 则

(1) 若 f 满足

$$f\left(t + \frac{T}{2}, -x\right) = -f(t, x) \quad (3.3)$$

或

$$f(t, -x) = -f(t, x), \quad (3.4)$$

则 $x = 0$ 或是中心型的或是奇数重的.

(2) 若 f 满足

$$f(-t, -x) = f(t, x), \quad (3.5)$$

则 $x = 0$ 或是中心型的或是偶数重的.

(3) 若 f 满足

$$f(-t, x) = -f(t, x), \quad (3.6)$$

则 $x = 0$ 必是中心型的.

证明 如前, 设 $\varphi(t, x_0)$ 表示 (2.1) 的满足 $\varphi(0, x_0) = x_0$ 的解. 若 (3.3) 成立, 则直接验证可知,

$$x(t) = -\varphi\left(t + \frac{T}{2}, x_0\right)$$

也是 (2.1) 的解, 故有

$$-\varphi\left(t + \frac{T}{2}, x_0\right) = \varphi(t, \tilde{x}_0),$$

其中 $\tilde{x}_0 = -\varphi\left(\frac{T}{2}, x_0\right)$. 因而,

$$-\varphi\left(\frac{3}{2}T, x_0\right) = \varphi(T, \tilde{x}_0). \quad (3.7)$$

由于已设 f 为解析函数, 故函数 $d(x_0)$ 也是解析的 (对充分小的 $|x_0|$). 因此, 如果 $x = 0$ 不是中心型的, 则必存在 $d_k \neq 0$, 使得对充分小的 $|x_0|$, 有

$$d(x_0) = d_k x_0^k + O(x_0^{k+1}), \quad (3.8)$$

因此也有

$$d(\tilde{x}_0) = d_k \tilde{x}_0^k + O(\tilde{x}_0^{k+1}). \quad (3.9)$$

另一方面, 由解的存在唯一性知,

$$\varphi(t + T, x_0) = \varphi(t, \varphi(T, x_0)),$$

令 $t = \frac{T}{2}$, 可知

$$\varphi\left(\frac{3}{2}T, x_0\right) = \varphi\left(\frac{T}{2}, \varphi(T, x_0)\right). \quad (3.10)$$

于是, 由 (3.7) 和 (3.10) 知,

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}_0) &= \varphi(T, \tilde{x}_0) - \tilde{x}_0 = -\varphi\left(\frac{3}{2}T, x_0\right) + \varphi\left(\frac{T}{2}, x_0\right) \\ &= -\left[\varphi\left(\frac{T}{2}, d(x_0) + x_0\right) - \varphi\left(\frac{T}{2}, x_0\right)\right] \\ &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\left(\frac{T}{2}, x_0 + \theta d(x_0)\right)d(x_0), \end{aligned}$$

其中 $\theta \in (0, 1)$, 将 (3.8) 和 (3.9) 代入上式, 并注意到存在常数 $r_0 > 0$ 使得

$$\tilde{x}_0 = -r_0 x_0 + O(x_0^2), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\left(\frac{T}{2}, x_0 + \theta d(x_0)\right) = r_0 + O(x_0),$$

可得

$$d_k (-r_0)^k x_0^k + O(x_0^{k+1}) = (-r_0) d_k x_0^k + O(x_0^{k+1}),$$

故有 $(-r_0)^{k-1} = 1$, 因此, k 必是奇数.

若 (3.4) 成立, 则 $-\varphi(t, x_0)$ 也是解, 即 $-\varphi(t, x_0) = \varphi(t, -x_0)$. 由此即知 $d(-x_0) = -d(x_0)$, 故 $x = 0$ 或是中心型的或具有奇数重解.

若 (3.5) 成立, 则 $-\varphi(-t, x_0)$ 是解, 即有 $-\varphi(-t, x_0) = \varphi(t, -x_0)$, 故 $-\varphi(-T, -x_0) = \varphi(T, x_0)$. 注意到

$$-x_0 = \varphi(T, \varphi(-T, -x_0)),$$

由以上两式可知,

$$d(x_0) = \varphi(T, x_0) - x_0 = \varphi(T, \varphi(-T, -x_0)) - \varphi(-T, -x_0) = d(\bar{x}_0), \quad (3.11)$$

其中 $\bar{x}_0 = \varphi(-T, -x_0) = -\bar{r}x_0 + O(x_0^2)$, $\bar{r} > 0$. 故若设 $d(x_0) = d_k x_0^k + O(x_0^{k+1})$, $d_k \neq 0$, 则

$$d(\bar{x}_0) = d_k \bar{x}_0^k + O(\bar{x}_0^{k+1}) = d_k (-\bar{r})^k x_0^k + O(x_0^{k+1}),$$

于是, 由 (3.11) 可知, k 必为偶数.

最后设 (3.6) 成立, 则 $\varphi(-t, x_0)$ 是解, 从而, $\varphi(-t, x_0) = \varphi(t, x_0)$. 由此可知,

$$\begin{aligned} d(x_0) &= \varphi(T, x_0) - x_0 = \varphi(-T, x_0) - x_0 \\ &= \varphi(-T, x_0) - \varphi(-T, \varphi(T, x_0)) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(-T, x_0^*) d(x_0), \end{aligned}$$

其中 $x_0^* = x_0 + \theta d(x_0)$, $\theta \in (0, 1)$. 从而, $(1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(-T, x_0^*)) d(x_0) = 0$, 即 $d(x_0) = 0$, 这表明 $x = 0$ 是中心型的, 证毕. $\square$

4 规范形理论

本节建立一维周期方程 (2.1) 的规范形理论. 设 f 关于 x 为 C^∞ 的, $f(t, 0) = 0$. 我们要寻找一周期变换 $x = h(t, y)$, 使得 (2.1) 成为 $\dot{y} = g(t, y)$, 且 $g(t, y)$ 有比较简单或规范的形式, 例如, 消除一些项, 把非线性系统化为线性系统, 或把非自治系统化自治系统等. 本文要寻找一周期变换, 使对任何给定的自然数 $k \geq 1$, 有

$$g(t, y) = \sum_{i=1}^k g_i y^i + O(y^{k+1}),$$

其中 g_i 为常数. 易见变换 h 和 g 应满足

$$h_t(t, y) = f(t, h(t, y)) - h_y(t, y)g(t, y). \quad (4.1)$$

现设

$$f(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) x^i, \quad g(t, y) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i y^i, \quad h(t, y) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(t) y^i, \quad (4.2)$$

其中 g_i 和 h_i 为待定量. 将 (4.2) 代入 (4.1) 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} h'_i(t) y^i &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) \left(\sum_{j=1}^{\infty} h_j(t) y^j \right)^i - \left(\sum_{i=1}^{\infty} i h_i(t) y^{i-1} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} g_j y^j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) \left(\sum_{k=i}^{\infty} h_{ki}(t) y^k \right) - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j+k=i+1} j h_j(t) g_k \right) y^i, \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中

$$h_{ki}(t) = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_i=k} h_{j_1}(t) h_{j_2}(t) \cdots h_{j_i}(t). \quad (4.4)$$

对 (4.3) 进一步化简可得

$$\sum_{i=1}^{\infty} h'_i(t) y^i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^i f_k(t) h_{ik}(t) \right) y^i - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j+k=i+1} j h_j(t) g_k \right) y^i.$$

由此式可知, 要使得 (4.1) 成立, 当且仅当对于任给的 $n \geq 1$, 存在常数 $g_1, \dots, g_n$, 使得下列微分方程组有周期为 T 的解 $h_1(t), \dots, h_n(t)$,

$$\begin{cases} h'_1(t) = f_1(t)h_{11}(t) - h_1(t)g_1, \\ h'_2(t) = f_1(t)h_{21}(t) + f_2(t)h_{22}(t) - h_1(t)g_2 - 2h_2(t)g_1, \\ \vdots \\ h'_n(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)h_{nk}(t) - \sum_{\substack{j+k=n+1 \\ j, k \geq 1}} j h_j(t)g_k. \end{cases} \quad (4.5)$$

对于上述系统, 我们利用数学归纳法来证明以下定理.

定理 5 对于任给的 $n \geq 1$, 存在常数 $g_1, g_2, \dots, g_n$, 使得 (4.5) 有 T 周期解 $h_1(t), \dots, h_n(t)$, 且 $h_1(0) = 1, h_i(0) = 0, i = 2, \dots, n$.

证明 易知方程组 (4.5) 可写成 n 维方程的向量形式

$$\frac{dH_n(t)}{dt} = H_n^1(t)F_n(t) - H_n^2(t)G_n, \quad (4.6)$$

其中

$$\begin{cases} H_n(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))^T, \\ F_n(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))^T, \\ G_n = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T, \\ H_n^1(t) = \begin{pmatrix} h_{11}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1}(t) & h_{n2}(t) & \cdots & h_{nn}(t) \end{pmatrix}, \\ H_n^2(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 2h_2(t) & h_1(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ nh_n(t) & (n-1)h_{n-1}(t) & \cdots & h_1(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

首先, 我们证明当 $n = 1$ 时, 定理成立. 此时, (4.6) 成为一维微分方程

$$h'_1(t) = f_1(t)h_{11}(t) - h_1(t)g_1.$$

由 h_{11} 的定义可知, $h_{11} = h_1$, 则上式化为一维线性微分方程

$$h'_1(t) = (f_1(t) - g_1)h_1(t).$$

该方程满足 $h_1(0) = 1$ 的解为

$$h_1(t) = e^{\int_0^t (f_1(s) - g_1) ds}.$$

为使 $h_1(t)$ 是周期解, 只需 $\int_0^T (f_1(s) - g_1) ds = 0$, 即 $g_1 = \frac{1}{T} \int_0^T f_1(s) ds$. 故 $n = 1$ 时结论成立.

再证当 $n = 2$ 时结论成立. 此时, 由 $h_{11}(t)$ 、 $h_{21}(t)$ 和 $h_{22}(t)$ 定义知, (4.6) 成为二维微分方程组

$$h_1'(t) = (f_1(t) - g_1)h_1(t), \quad h_2'(t) = (f_1(t) - 2g_1)h_2(t) + (f_2(t)h_1^2(t) - g_2h_1(t)).$$

易知, 该方程组满足 $h_1(0) = 1, h_2(0) = 0$ 的解为

$$h_1(t) = e^{\int_0^t (f_1(s) - g_1) ds}, \quad h_2(t) = e^{\int_0^t (f_1(s) - 2g_1) ds} \int_0^t e^{-\int_0^s (f_1(u) - 2g_1) du} (f_2(s)h_1^2(s) - g_2h_1(s)) ds.$$

由 $n = 1$ 的情形, 我们知道当 $g_1 = \frac{1}{T} \int_0^T f_1(s) ds$ 时, $h_1(t)$ 是 T 周期的. 为使 $h_2(t)$ 是 T 周期的, 只需

$$\int_0^T e^{-\int_0^s (f_1(u) - 2g_1) du} (f_2(s)h_1^2(s) - g_2h_1(s)) ds = 0,$$

即

$$g_2 = \left(\int_0^T e^{g_1 s} ds \right)^{-1} \int_0^T e^{g_1 s} f_2(s) h_1(s) ds.$$

故当 $n = 2$ 时结论成立.

现设定理 5 对 $n = m$ 时成立. 下证 $n = m + 1$ 时也成立, 即证微分方程

$$\frac{dH_{m+1}(t)}{dt} = H_{m+1}^1(t)F_{m+1}(t) - H_{m+1}^2(t)G_{m+1}$$

有满足 $H_{m+1}(0) = (1, 0, \dots, 0)$ 的 T 周期解.

易知, 上式可写成

$$\frac{dH_m(t)}{dt} = H_m^1(t)F_m(t) - H_m^2(t)G_m, \quad (4.7)$$

$$\frac{dh_{m+1}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{m+1} f_k(t)h_{(m+1)k}(t) - \sum_{\substack{j+k=m+2 \\ j, k \geq 1}} jh_j(t)g_k. \quad (4.8)$$

由归纳假设可知, 存在常数 $g_1, \dots, g_m$, 使得 (4.7) 有满足 $H_m(0) = (1, 0, \dots, 0)$ 的 T 周期解 $H_m(t) = (h_1(t), \dots, h_m(t))$, 且从之前证明知,

$$g_1 = \frac{1}{T} \int_0^T f_1(s) ds, \quad h_1(t) = e^{\int_0^t (f_1(s) - g_1) ds}.$$

由 (4.4) 知, $h_{(m+1)1} = h_{m+1}$, 而 $h_{(m+1)k} (2 \leq k \leq m+1)$ 为只包含 $h_1, \dots, h_m$ 的多项式, 且均含 h_1 , 故有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} f_k(t)h_{(m+1)k}(t) &= h_1(t)\Phi(h_1, \dots, h_m; f_2, \dots, f_{m+1}) + f_1(t)h_{m+1}(t), \\ \sum_{\substack{j+k=m+2 \\ j, k \geq 1}} jh_j(t)g_k &= g_{m+1}h_1(t) + (m+1)g_1h_{m+1}(t) + \Psi(h_2, \dots, h_m; g_2, \dots, g_m), \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中 Φ 和 Ψ 为多项式. 将 (4.9) 代入 (4.8) 可得

$$\frac{dh_{m+1}(t)}{dt} = (f_1(t) - (m+1)g_1)h_{m+1}(t) + h_1(t)(\tilde{\Phi}_m(t) - g_{m+1}) - \tilde{\Psi}_m(t), \quad (4.10)$$

其中

$$\tilde{\Phi}_m(t) = \Phi(h_1, \dots, h_m; f_2, \dots, f_{m+1}),$$

$$\tilde{\Psi}_m(t) = \Psi(h_2, \dots, h_m; g_2, \dots, g_m).$$

对 (4.10) 利用常数变易公式可得其满足 $h_{m+1}(0) = 0$ 的解如下:

$$\begin{aligned} h_{m+1}(t) &= e^{\int_0^t (f_1(u) - g_1(m+1)) du} \int_0^t e^{-\int_0^s (f_1(u) - g_1(m+1)) du} (h_1(s)(\tilde{\Phi}_m(s) - g_{m+1}) - \tilde{\Psi}_m(s)) ds \\ &= h_1(t) e^{-mg_1 t} \int_0^t e^{mg_1 s} \left(\tilde{\Phi}_m(s) - \frac{\tilde{\Psi}_m(s)}{h_1(s)} - g_{m+1} \right) ds. \end{aligned}$$

为确定 g_{m+1} , 使得 $h_{m+1}(t)$ 为 T 周期解, 令 $h_{m+1}(T) = 0$, 则

$$\int_0^T e^{mg_1 s} \left(\tilde{\Phi}_m(s) - \frac{\tilde{\Psi}_m(s)}{h_1(s)} - g_{m+1} \right) ds = 0. \quad (4.11)$$

易见 (4.11) 关于 g_{m+1} 有唯一解. 根据归纳假设可知, 定理得证. $\square$

由定理 5 可知, 下面的定理成立.

定理 6 设 $f(t, 0) = 0$, 则对任意自然数 $k \geq 1$, 一维 C^∞ 周期方程 (2.1) 可以通过某 T 周期变换

$$x = h(t, y) = \sum_{i=1}^k h_i(t) y^i$$

变为规范形式

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^k g_i y^i + O(y^{k+1}) \equiv g(t, y), \quad (4.12)$$

其中 g_i 为常数, $h_1(0) = 1$, $h_j(0) = 0$ ($j \geq 2$).

注 1 从定理 5 的证明过程我们可以得到, h_i 和 g_i 的递推公式为

$$\begin{aligned} h_1(t) &= e^{\int_0^t (f_1(s) - g_1) ds}, \quad g_1 = \frac{1}{T} \int_0^T f_1(s) ds, \\ \begin{cases} h_2(t) = h_1(t) e^{-g_1 t} \int_0^t e^{g_1 s} (f_2(s) h_1(s) - g_2) ds, \\ g_2 = \left(\int_0^T e^{g_1 s} ds \right)^{-1} \int_0^T e^{g_1 s} f_2(s) h_1(s) ds, \end{cases} \\ \vdots \\ \begin{cases} h_k(t) = h_1(t) e^{(1-k)g_1 t} \int_0^t e^{(k-1)g_1 s} (\tilde{\Phi}_{k-1}(s) - h_1^{-1}(s) \tilde{\Psi}_{k-1}(s) - g_k) ds, \\ g_k = \left(\int_0^T e^{(k-1)g_1 s} ds \right)^{-1} \int_0^T e^{(k-1)g_1 s} (\tilde{\Phi}_{k-1}(s) - h_1^{-1}(s) \tilde{\Psi}_{k-1}(s)) ds, \end{cases} \end{aligned}$$

其中 h_{ki} 定义见 (4.4), 以及

$$\tilde{\Phi}_{k-1}(s) = h_1^{-1}(s) \sum_{i=2}^k f_i(s) h_{ki}(s), \quad \tilde{\Psi}_{k-1}(s) = \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ 2 \leq i, j \leq k-1}} i h_i(s) g_j.$$

注 2 从定理 5 的证明过程我们还可以看出, 变换 h 不唯一. 例如, 当假设 $h_i(0) = 1$ ($i \geq 1$) 时, 通过类似的证明, 能得到另一个 T 周期变换 $\tilde{h}$, 使得周期方程 (2.1) 也能变为形如 (4.12) 的规范形. 又由后面的引理 5 知, 如果 $x = 0$ 为中心型的零解, 则 (2.1) 的标准形是 $\dot{y} = 0$.

设在 (4.12) 中,

$$g_1 = \cdots = g_{k-1} = 0, \quad g_k \neq 0, \quad k \geq 1. \quad (4.13)$$

设 $y(t, y_0)$ 为 (4.12) 的满足 $y(0, y_0) = y_0$ 的解, 则易知

$$y(t, y_0) = y_0 + g_k t y_0^k + O(y_0^{k+1}),$$

故 (4.12) 的 Poincaré 映射为

$$\bar{P}(y_0) = y_0 + g_k T y_0^k + O(y_0^{k+1}).$$

由此知, 如果 (4.13) 成立, 则 $y = 0$ 为 (4.12) 的 k 重零解. 设 $P(x_0)$ 为 (2.1) 的 Poincaré 映射, 则由

$$x(t, x_0) = h(t, y(t, y_0)), \quad x_0 = h(0, y_0)$$

可知,

$$P(x_0) = h(T, \bar{P}(y_0)) = h(0, \bar{P}(y_0)) = \bar{P}(y_0)[1 + O(\bar{P}(y_0))],$$

故 $x = 0$ 为 (2.1) 的 k 重零解当且仅当 (4.13) 成立, 也就是 $x = 0$ 为 (2.1) 的 k 重零解当且仅当 $y = 0$ 为 (4.12) 的 k 重零解.

现考虑含参数的 C^∞ 周期方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \varepsilon), \quad (4.14)$$

其中 $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $f(t, 0, 0) = 0$. 易见成立以下定理.

定理 7 设 $x = 0$ 为方程 $\frac{dx}{dt} = f(t, x, 0)$ 的 k 重零解, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $|\varepsilon| < \delta$ 时, 方程 (4.14) 在 $x = 0$ 的小邻域内至多有 k 个周期解.

5 平均方法

本节考虑含参数的一维周期方程. 首先考虑下列形式的方程:

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, \varepsilon), \quad (5.1)$$

其中 F 为 C^∞ 函数, 且关于 t 为 T 周期函数, 又满足 $F(t, x, 0) = 0$. 于是可设形式上成立

$$F(t, x, \varepsilon) = \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k F_k(t, x). \quad (5.2)$$

有关方程 (5.1) 的平均方法的主要结果是下述定理 (参见文献 [13, 14]).

定理 8 设 (5.2) 成立, 则对任意给定的自然数 $k \geq 1$, 都存在 $C^\infty T$ 周期变换 $y = x + \varepsilon \phi_k(t, x, \varepsilon)$, 把 (5.1) 化为下述 $C^\infty T$ 周期方程:

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \bar{F}_i(y) + \varepsilon^{k+1} F_{k+1}(t, y, \varepsilon), \quad (5.3)$$

其中

$$\bar{F}_1(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(t, y) dt.$$

现设 $k \geq 1$ 使下列条件成立:

$$\bar{F}_k(y) \neq 0, \quad \bar{F}_j(y) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, k-1. \quad (5.4)$$

设 $y(t, y_0, \varepsilon)$ 为 (5.3) 的满足 $y(0, y_0, \varepsilon) = y_0$ 的解, 则该解可写成

$$y(t, y_0, \varepsilon) = y_0 + \sum_{j \geq 1} \varepsilon^j y_j(t, y_0).$$

将上式代入 (5.3), 并利用 (5.4) 可得

$$y_k(t, y_0) = t \bar{F}_k(y_0), \quad y_j(t, y_0) = 0, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

故在 (5.4) 之下, (5.3) 的 Poincaré 映射为

$$\bar{P}(y_0, \varepsilon) = y_0 + \varepsilon^k T \bar{F}_k(y_0) + O(\varepsilon^{k+1}). \quad (5.5)$$

由于 (5.1) 和 (5.3) 的周期解与映射 $\bar{P}$ 关于 y_0 的不动点一一对应, 由 (5.1)、Rolle 定理和隐函数定理可得下述推论.

推论 2 设 (5.2) 和 (5.4) 成立.

(1) 如果函数 $\bar{F}_k(y)$ 有 m 个单根, 则当 $|\varepsilon|$ 充分小时, 方程 (5.1) 和 (5.3) 必有 m 个周期解.

(2) 如果函数 $\bar{F}_k(y)$ 至多有 m 个根 (包括重数在内), 则当 $|\varepsilon|$ 充分小时, 方程 (5.1) 和 (5.3) 至多有 m 个关于 ε 为一致有界的周期解.

现设 $x(t, x_0, \varepsilon)$ 为 (5.1) 的满足 $x(0, x_0, \varepsilon) = x_0$ 的解, 则

$$x(t, x_0, \varepsilon) = x_0 + \sum_{j \geq 1} \varepsilon^j \bar{x}_j(t, x_0), \quad (5.6)$$

从而, (5.1) 的 Poincaré 映射为

$$P(x_0, \varepsilon) = x(T, x_0, \varepsilon) = x_0 + \sum_{j \geq 1} \varepsilon^j P_j(x_0). \quad (5.7)$$

文献 [15] 证明了下述结果.

引理 3 设 (5.2) 和 (5.6) 成立, 则

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(t, x_0) &= \int_0^t F_1(u, x_0) du, \\ \bar{x}_2(t, x_0) &= \int_0^t \left[F_2(u, x_0) + \frac{\partial F_1}{\partial x}(u, x_0) \bar{x}_1(u, x_0) \right] du, \\ \bar{x}_n(t, x_0) &= \int_0^t \left[F_n(u, x_0) + \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=1}^l \frac{1}{i!} \frac{\partial^i F_{n-l}}{\partial x^i}(u, x_0) K_{li}(u, x_0) \right] du, \end{aligned}$$

其中

$$K_{li}(u, x_0) = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_i=l} \bar{x}_{j_1}(u, x_0) \bar{x}_{j_2}(u, x_0) \cdots \bar{x}_{j_i}(u, x_0).$$

由 (5.7) 和上述引理可得

$$P_1(x_0) = \int_0^T F_1(t, x_0) dt, \quad P_2(x_0) = \int_0^T \left[F_2(t, x_0) + \frac{\partial F_1}{\partial x}(t, x_0) \int_0^t F_1(u, x_0) du \right] dt. \quad (5.8)$$

由 (5.3) 和 (5.8) 易见 $P_1(x) = T\bar{F}_1(x)$. 文献 [16] 证明了下述结果.

引理 4 设 (5.2) 成立, 则 (5.4) 成立当且仅当 (5.7) 中 P 满足

$$P_k(x) \neq 0, \quad P_j(x) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

当 (5.4) 成立时, 必有 $T\bar{F}_k(x) = P_k(x)$. 于是在推论 2 中 $\bar{F}_k(y)$ 换为 $P_k(x)$, 其结论仍成立.

原则上, 利用引理 3 可计算每个 $P_j(x_0) = \bar{x}_j(T, x_0)$. 但在实际问题中常利用 (5.8) 来求 P_1 和 P_2 .

下面考虑 T 周期系统

$$\frac{dx}{dt} = F_0(t, x) + F(t, x, \varepsilon), \quad (5.9)$$

其中 F 满足 (5.2). 直接可证下面的引理.

引理 5 设存在非空区间 J , 使得方程

$$\frac{dx}{dt} = F_0(t, x) \quad (5.10)$$

有一族 T 周期解 $u(t, x_0)$, 其中 $u(0, x_0) = x_0 \in J$, 则 T 周期变换 $x = u(t, y)$ 把 (5.9) 化为

$$\frac{dy}{dt} = \tilde{F}(t, y, \varepsilon), \quad (5.11)$$

其中

$$\tilde{F}(t, y, \varepsilon) = [u_y(t, y)]^{-1} F(t, u(t, y), \varepsilon) = \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k \tilde{F}_k(t, y),$$

$$\tilde{F}_k(t, y) = [u_y(t, y)]^{-1} F_k(t, u(t, y)).$$

事实上, 由 $x = u(t, y)$ 知,

$$\frac{dx}{dt} = u_t(t, y) + u_y(t, y) \frac{dy}{dt} = F_0(t, u(t, y)) + u_y(t, y) \frac{dy}{dt}.$$

由此和 (5.9) 即得 (5.11).

由于 (5.11) 具有 (5.1) 的形式, 因此就可利用前面的结果和方程. 特别地, 令

$$\bar{F}_1(y) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{F}_1(t, y) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{F_1(t, u(t, y))}{u_y(t, y)} dt, \quad (5.12)$$

则利用 $\bar{F}_1$ 的根就可以讨论 (5.11) 的周期解分支了.

在应用 (5.12) 时首先需要知道 $u(t, y)$, 而这往往是不容易做到的. 为了能够利用 (5.12), 我们引入下述含双参数的周期方程:

$$\frac{dx}{dt} = G(t, x, \lambda) + \varepsilon F(t, x, \lambda), \quad (5.13)$$

其中 $|\varepsilon| \ll |\lambda| \ll 1$, $G(t, x, 0) = 0$, 则可设

$$G(t, x, \lambda) = \sum_{j \geq 1} \lambda^j G_j(t, x), \quad F(t, x, \lambda) = \sum_{j \geq 0} \lambda^j F_j(t, x). \quad (5.14)$$

现假设存在区间 J 使方程

$$\frac{dx}{dt} = G(t, x, \lambda) \quad (5.15)$$

有一族周期解 $u(t, x_0, \lambda)$, 且 $u(0, x_0, \lambda) = x_0 \in J$, 对方程 (5.13) 应用 (5.12), 引入下述函数:

$$M(y, \lambda) = \int_0^T \frac{F(t, u(t, y, \lambda), \lambda)}{u_y(t, y, \lambda)} dt. \quad (5.16)$$

由上面的讨论知, 若对固定的 $\lambda \neq 0$, 函数 $M(y, \lambda)$ 关于 y 有 k 个单根, 则当 $0 < |\varepsilon| \ll |\lambda| \ll 1$ 时, 方程 (5.13) 就有 k 个周期解. 为获得 M 的根, 现假设 λ 充分小, 于是,

$$M(y, \lambda) = M_0(y) + \lambda M_1(y) + \lambda^2 M_2(y) + \cdots.$$

又设

$$u(t, x_0, \lambda) = x_0 + \lambda u_1(t, x_0) + \lambda^2 u_2(t, x_0) + \cdots,$$

则由 (5.14) 的第一式易求出

$$u_1(t, x_0) = \int_0^t G_1(u, x_0) du,$$

从而,

$$u_y(t, y, \lambda) = 1 + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial y}(t, y) + O(\lambda^2).$$

将以上诸式代入 (5.16), 并利用 (5.14) 第二式可得

$$M_0(y) = \int_0^T F_0(t, y) dt, \quad M_1(y) = \int_0^T [F_1(t, y) + F_{0y}(t, y) \bar{G}_1(t, y) - F_0(t, y) \bar{G}_{1y}(t, y)] dt, \quad (5.17)$$

其中

$$\bar{G}_1(t, y) = \int_0^t G_1(u, y) du.$$

于是成立下述定理.

定理 9 考虑 T 周期方程 (5.13). 设 (5.14) 成立, 且存在区间 J , 使得对任意 $x_0 \in J$, 方程 (5.15) 满足 $x(0) = x_0$ 的解都是周期的. 又设 (5.17) 中的函数 M_0 和 M_1 满足

$$M_0(y) \equiv 0, \quad M_1(y) \neq 0, \quad y \in J.$$

如果 $M_1(y)$ 在 J 中有 k 个单根, 则当 $0 < |\varepsilon| \ll |\lambda| \ll 1$ 时, 方程 (5.13) 必有 k 个周期解.

事实上, 在所述假设下, 有 $M(y, \lambda) = \lambda[M_1(y) + O(\lambda)]$. 因此, 当 $0 < |\lambda| \ll 1$ 时, $M(y, \lambda)$ 关于 y 有 k 个单根 (一般与 λ 有关). 进一步由平均法知, 当 $0 < |\varepsilon| \ll |\lambda| \ll 1$ 时, (5.13) 有 k 个周期解.

上述定理要求 (5.15) 有周期解族, 例如, $x = 0$ 为中心型零解, 这可利用定理 4(3) 来判定.

致谢 作者向提供宝贵建议和意见的审稿人表示感谢.

参考文献

- 1 Neto L A. On the number of solutions of the equation $\frac{dx}{dt} = \sum_{j=0}^n a_j(t)x^j$, $0 \leq t \leq 1$, for which $x(0) = x(1)$. Invent Math, 1980, 59: 67-76

- 2 Lloyd N G. The number of periodic solutions of the equation $\dot{z} = z^N + p_1(t)z^{N-1} + \cdots + p_N(t)$. Proc Lond Math Soc (3), 1973, 27: 667–700
- 3 Shahshahani S. Periodic solutions of polynomial first order differential equations. Nonlinear Anal, 1981, 5: 157–165
- 4 Xiao D M. Dynamics and bifurcation on a class of population model with seasonal constant-yield harvesting. Discrete Contin Dyn Syst, 2016, 21: 699–719
- 5 Sandqvist A, Andersen K M. On the number of closed solutions to an equation $\dot{x} = f(t, x)$, where $f_{x^n}(t, x) \geq 0$ ($n = 1, 2$, or 3). J Math Anal Appl, 1991, 159: 127–146
- 6 Andersen K M, Sandqvist A. On the number of periodic (or closed) solutions of a scalar differential equation with convexity. J Math Anal Appl, 2007, 331: 206–219
- 7 Cabada A, Pouso R L. On first order discontinuous scalar differential equations. Nonlinear Stud, 1999, 6: 161–170
- 8 韩茂安. 牛顿 - 莱布尼兹公式与泰勒公式的拓展与应用. 大学数学, 2015, 31: 6–11
- 9 Lloyd N G. A note on the number of limit cycles in certain two-dimensional systems. J Lond Math Soc (2), 1979, 20: 277–286
- 10 韩茂安, 顾圣土. 非线性系统的理论和方法. 北京: 科学出版社, 2001
- 11 韩茂安, 周盛凡, 邢业鹏, 等. 常微分方程. 北京: 高等教育出版社, 2011
- 12 赵爱民, 李美丽, 韩茂安. 微分方程基本理论. 北京: 科学出版社, 2011
- 13 Sanders J A, Verhulst F. Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. New York: Springer, 1985
- 14 Verhulst F. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems. New York: Springer-Verlag, 1991
- 15 Gine J, Grau M, Llibre J. Averaging theory at any order for computing periodic orbits. Phys D, 2013, 250: 58–65
- 16 Han M A, Romanovski V G, Zhang X. Equivalence of the Melnikov function method and the averaging method. Qual Theory Dyn Syst, 2015, 15: 471–479

Periodic solutions of one dimensional T -periodic differential equations

SHENG LiJuan & HAN MaoAn

Abstract In this paper, we give several methods to study periodic solutions of one dimensional T -periodic differential equations, including Poincaré map, the stability of zero and its multiplicity, normal form and averaging method. Here, we summarize and improve some existing results, and state our new conclusion as well.

Keywords periodic solution, Poincaré map, normal form, averaging method

MSC(2010) 37C10, 37C25, 34M35, 34C29

doi: 10.1360/N012016-00121