综述

模糊分析中的泛函空间

献给徐利治教授 95 华诞

吴从炘^{①*}, 任雪昆^①, 吴冲^②

① 哈尔滨工业大学数学系, 哈尔滨 150001;

② 哈尔滨工业大学管理学院, 哈尔滨 150001

E-mail: wucongxin@hit.edu.cn, renxuekun@126.com, wuchong@hit.edu.cn

收稿日期: 2015-03-23; 接受日期: 2015-04-20; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10271035, 71271070 和 11401137) 资助项目

摘要 本文从四个方面简要综述了模糊分析中泛函空间的若干研究工作, 包括: (1) 在拓扑线性空间和某些模糊赋范线性空间框架下模糊泛函分析的发展; (2) 模糊数空间的各种度量及对具有线性结构的相应具体泛函空间的嵌入; (3) 模糊连续函数空间与针对不同模糊连续性的多层正则模糊神经网络的逼近; (4) 基于单调测度论的可测函数空间和 Sugeno 可积函数空间. 文中也提出今后开展研究的几点建议. 吴从炘在 1952–1955 年期间是东北人民大学数学系的一名本科生, 徐利治先生给予了吴长期指导与诸多支持.

关键词 模糊分析 泛函空间 模糊数 非可加测度

MSC (2010) 主题分类 03E27, 28E10

1 引言

1965 年, 文献 [1] 是关于模糊集 (fuzzy sets) 的开创性论文, 标志着具有广泛应用的模糊数学学科的诞生. 1972 年, Chang 和 Zadeh^[2] 称实数域 $\mathbb{R}$ 上的一族满足特殊性质的模糊集为模糊数, 首次涉及模糊分析. 于是, 以模糊数为值的函数的分析学 (如模糊连续函数、模糊导数、模糊积分、模糊微分方程等) 成为模糊分析的重要组成部分, 如专著 [3, 4] 等. 1977 年, Katsaras 和 Liu^[5] 则引入模糊拓扑线性空间, 它自然属于模糊分析范围. 再就是模糊分析通常也包括模糊测度、相应的模糊可测函数和 Sugeno 模糊积分, 参见专著 [6]. 当然, 上述著作所附的文献中包含有若干与具体应用相关的内容.

徐利治先生的研究领域十分深广, 泛函分析也是他的一个研究领域. 1956 年, 他作为中国科学院三人代表团成员 (曾远荣、田方增、徐利治) 参加了在莫斯科召开的全苏泛函分析国际会议 (参见文献 [7, 第 278 页]). 另外, 1953 年, 徐先生在东北人民大学 (即吉林大学) 讲授“分析方法” (参见文献 [8]) 课期间组织部分听课学生的课外学习小组活动时, 曾指导吴从炘阅读 Gal 的一篇泛函分析文献 [9], 吴从炘见到经典分析中某些很困难证明的结论, 利用泛函分析相当容易地就能证明. 从而, 吴从炘对泛函分析产生浓厚兴趣, 后来投身于泛函分析的研究. 1981 年, 以徐利治先生为主编的刊物《数学研究与评论》在武汉华中工学院出版社出版. 同一年, 该出版社又出版了吴从炘担任副主编之一的刊

物《模糊数学》, 徐先生在许多人都还缺乏了解情形下对这一在国内刚兴起的学科给予了热情支持, 并推动了时任华中工学院院长朱九思对该学科创建学会及创办《模糊数学》刊物所给予的大力支持. 徐先生历经磨难始终不渝地坚持高水平学术研究至今的精神, 激励学生克服种种困难持续开展研究. 今以模糊分析中的泛函空间为题, 并选取其中几个方面的若干研究工作撰写一篇综述文章来庆贺老师徐利治先生的 95 华诞.

本文第 2 节介绍模糊拓扑线性空间; 第 3 和 4 节分别介绍模糊数空间和连续模糊数值函数空间; 第 5 节介绍模糊可测函数空间、Sugeno 模糊可积函数空间和模糊测度空间; 第 6 节是小结与展望.

2 模糊拓扑线性空间

1956 年秋, 吴从炘返母校跟随大学毕业论文指导教师江泽坚先生进修两年泛函分析, 参加江先生领导的经典拓扑线性空间讨论班. 1978 年春季学期, 吴从炘又前往中国科学院数学研究所学习关肇直先生倡导的模糊数学, 在关先生支持下首先结合 1977 年蒲保明、刘应明在内部刊物——四川大学学报(自然科学版) 第 1 期第 31–50 页发表的论文《不分明拓扑学 I——不分明点的邻近构造与 Moore-Smith 式收敛》(该文于 1980 年正式发表于文献 [10], 也收集到刘应明与罗懋康的专著 [11]), 开展对模糊拓扑线性空间的研究.

2.1 模糊拓扑线性空间的定义

本小节简要综述模糊拓扑线性空间的定义. 1979 年, 吴从炘^[12] 将 Katsaras 和 Liu 1977 年的模糊拓扑线性空间定义中的模糊拓扑, 由 1968 年 Chang^[13] 的定义加强为 1976 年 Lowen^[14] 的满层模糊拓扑, 并利用蒲保明和刘应明定义的模糊点及其邻域系进行了讨论. 随后, 吴从炘和方锦暄又分别于 1981、1982 年给出了模糊拓扑线性空间各自的另外定义. 1982 年, 吴从炘和方锦暄^[15] 改用 P_u 和 Liu ^[10] 所引入的模糊点的重域系, 对模糊拓扑线性空间进行了再定义, 它与经典拓扑线性空间在形式上接近, 具有平移不变性, 得到了这种模糊拓扑线性空间借助零点的重域基的刻画, 以及分离性的有关性质.

1981 年, Katsaras^[16] 同样采用 Lowen 的满层模糊拓扑来重新定义模糊拓扑线性空间, 并以 1978 年 Warren 提出的邻域基为工具进行探讨. 事实上, 这两种定义的差别仅在于, 数乘运算中实数域拓扑的选取, 吴从炘和方锦暄的定义使用的是通常拓扑; Katsaras 的定义则选用通常拓扑的诱导拓扑. 1984 年, 王戈平^[17] 指出两个定义等价. 有关工作参见文献 [18, 19] 及其中所附的文献, 如局部有界性与局部凸性的引入可分别参见文献 [20, 21].

2.2 Quasi Lasalle (QL) 型模糊拓扑线性空间

本小节简要综述 QL 型模糊拓扑线性空间. 1985 年, 吴从炘和方锦暄^[22] 引入了 QL 型模糊拓扑线性空间, 构造出非 QL 型的模糊拓扑线性空间, 并且证得 QL 型模糊拓扑线性空间可以由一族 Lasalle 伪模糊范数所刻画, 从而得到了模糊拓扑线性空间与经典拓扑线性空间的一个不同点. 2005 年, Fang 和 Yan^[23] 指出了上述工作略有缺陷, 重新定义了 Lasalle 伪模糊范数族, 并且证明了 QL 型模糊拓扑线性空间可以由重新定义的 Lasalle 伪模糊范数族所刻画. QL 型模糊拓扑线性空间的研究成果被收入到当年的中国数学年鉴, 推动了模糊拓扑线性空间的空间理论的发展. 另外, 吴从炘和马明^[24] 还讨论过 QL 型模糊拓扑线性空间与 Lowen 的模糊一致空间.

2.3 模糊赋范空间

本小节简要综述模糊赋范空间的早期工作. 1984 年, 吴从炘、方锦暄^[25] 和 Katsaras^[26] 分别提出了各自的模糊赋范空间定义. 吴从炘和方锦暄的定义利用了模糊点. 1985 年, 马明^[27] 比较了这两种形式上不同的定义, 说明了在某种意义上, 吴从炘和方锦暄定义的模糊赋范空间是 Katsaras 定义的模糊赋范空间, 反之不真. 其区别就体现在, 吴从炘和方锦暄的定义蕴涵相应模糊拓扑的分离性, 而 Katsaras 定义无此性质. 关于吴从炘和方锦暄定义的模糊赋范空间的有关讨论, 可参见文献 [18, 19] 及所附文献.

1988 年, Wu 和 Ma^[28] 给出了两个模糊赋范空间之间模糊线性算子 F 的直接定义, 即 $F(ax_\lambda + by_\mu) = aF(x_\lambda) + bF(y_\mu)$ (x_λ 和 y_μ 为模糊点). 该文献进而讨论了这种模糊线性算子意义下的模糊赋范空间的代数对偶及关于网收敛的连续性意义下形成的对偶空间. 这时, 代数对偶呈现出的是一个线性空间与另一个具有某种性质的格的乘积的结构形式. 1990 年, 吴从炘、马明和包玉娥在北京召开的中日模糊集与系统双边会议上所作的报告^[29] 中, 尝试引进一种 L-模糊赋范空间概念.

1991 年, 吴从炘和方锦暄^[30] 修改文献 [28] 的模糊线性算子定义, 增添了适当条件 (实际上是后来 Fang^[31] 提出的模糊线性序同态概念的基础) 得到了诸如一致有界原理的模糊推广等结论.

2.4 模糊拓扑线性空间的拓展

本小节简要综述模糊拓扑线性空间的两类拓展. 1997 年, Fang 和 Yan^[32] 开始了 L-拓扑线性空间的工作, 引入了线性序同态概念, 展开了 L-拓扑线性空间的线性算子的研究. 2005 年, Yan 和 Wu^[33] 引进并讨论了模糊 L-固空间. 2011 年, Abel 和 Sostak^[34] 也研究过此空间.

1991 年, Ying^[35] 首次从逻辑观点引入模糊化拓扑. 2000 年, Liu 和 Zhang^[36] 又研究了 L-模糊化拓扑的范畴. 基于 Lukasiewicz 逻辑的模糊化拓扑线性空间概念于 2004 年被 Qiu^[37] 提出. 2006 年, Zhang 等人还引进了基于连续值逻辑的模糊化拓扑线性空间. 在此前后, Yan 和 Wu^[38, 39] 提出了完全分配格 L 上模糊化拓扑线性空间, 给出了 L-模糊化拓扑线性空间的零点的邻域基刻画定理, 证明了 L-模糊化拓扑线性空间范畴是线性空间范畴上的拓扑范畴等. 2007 年, Yan^[40] 则将经典概率赋范线性空间与模糊化拓扑线性空间联系起来, 首次提出了概率赋范线性空间中集合的概率有界度和概率准紧度的概念, 并得到了这两个概念的模糊化拓扑式的刻画.

经典泛函空间涵盖拓扑代数, 1984 年, 吴从炘和马明^[41] 也引进了模糊拓扑代数, 得到借助零点的重域基的刻画, 并且相应地讨论了局部乘法凸模糊拓扑代数. 1989 年, Wu 和 Ma^[42] 又定义了模糊赋范代数, 证得分离的模糊拓扑代数为局部乘法凸当且仅当它线性同胚于一族模糊赋范代数乘积的子代数.

2.5 线性空间的模糊范数新定义与模糊泛函分析的发展

本小节围绕模糊范数的各种新定义作简要综述, 新定义时常要用到模糊数 (见第 3 节). 1992 年, Felbin^[43] 称 $(X, \|\cdot\|, L, U)$ 为模糊赋范线性空间, 其中 X 为实数域上线性空间, 模糊范数 $\|\cdot\|$ 为取值非负的非紧模糊数且满足由两个具有特定性质的二元函数 $L, U: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 所表述的某种形式的三角不等式等条件. 文中证明了, 特别当 $L = \wedge(\text{Min})$, $U = \vee(\text{Max})$ 时, 该三角不等式退化成类似于经典赋范空间三角不等式的形式. 另外, 这种模糊范数相应的恰好是 Kaleva-Seikkala 模糊度量. 接着, Cheng 和 Mordeson^[44] 又引入了一种与 Kramosil 和 Michelek 模糊度量恰好相应的模糊范数. 2003 年, Bag 和 Samanta^[45] 则提出一种与 Cheng 和 Mordeson 定义稍有不同的模糊范数, 随后他们

得到在模糊框架下经典泛函分析的 4 个基本定理, 还陆续获得模糊非扩张映射的不动点定理、模糊一致正规结构和模糊自反性的若干性质. 另一方面, 2002 年, Xiao 和 Zhu^[46] 研究的是取值非负的 (紧) 模糊数的模糊范数, 然后, 他们又讨论了这种模糊赋范线性空间的拓扑度理论与不动点定理. 2012 年, Halder 等人^[47] 对 Felbin 型模糊范数改用 Xiao 和 Zhu 的取值方式, 引进严格凸概念, 并在 $L = \min, U = \max$ 情形下证得: 模糊赋范线性空间任一子空间上每一模糊有界线性泛函有唯一保持模糊范数线性扩张的充要条件是其对偶空间为严格凸. 这与经典情形相类似.

2014 年, Nadaban 和 Dzitac^[48] 参照 Katsaras 模糊范数, 对线性空间 X 引入了一种以模糊集 $N: X \times [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ 为值的新模糊范数, N 则满足 Bag 和 Samanta 模糊范数定义中将 $\wedge$ 换成更一般的连续 t -模 $*$ 那一条和所有其他条件. 文中证明了模糊赋范线性空间 $(X, N, *)$ 可以成为可度量化的经典拓扑线性空间, 特别对于模糊赋范线性空间 $(X, N, \wedge)$, X 就进一步诱出一个 Hausdorff 可度量化的局部凸空间, 且 $(X, N, \wedge)$ 还能诱出一个 Katsaras 模糊范数. 而 Katsaras^[49] 也证明了他的模糊范数可诱出局部凸拓扑. 总之, 从不同角度出發, 有许多模糊范数概念被提出, 其研究范围相应地涉及经典泛函分析方面颇广, 可以说模糊泛函分析的研究正在发展中.

3 模糊数空间 $E^n (n \in \mathbb{N})$

3.1 模糊数空间的表示定理与序结构

本小节简要综述模糊数的表示定理与序结构. 1994 年, Diamond 和 Kloeden 的专著 [3] 指出, 关于 n 维模糊数通常是指从 $\mathbb{R}^n$ 到 $I = [0, 1]$ 的模糊集 u , 具有正规、上半连续、模糊凸性质且支集 $\text{supp} u = [u]^0 = \text{cl}(\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [u]^\alpha)$ ($[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq \alpha\}, \alpha \in (0, 1)$) 为有界集 ($[u]^0$ 有界换成当 $\alpha \in (0, 1]$ 时 $[u]^\alpha$ 为有界集, 称 u 为非紧模糊数). 1975 年, Negoita 和 Ralescu 说明 n 维模糊数可以用 α -水平集 $[u]^\alpha$ (含 $[u]^0$) 刻画. 特别对于 $u \in E^1$, 其 α -水平集成为有界闭区间, 即可用区间数表示. 因而, 区间分析是研究模糊数的一种工具. 1986 年, Goetschel 和 Voxman^[50] 证明了一维模糊数还可以用两个满足一些特定条件的函数族 $\{(a(\alpha), b(\alpha)) : \alpha \in [0, 1]\}$ 来刻画, 给出了一维模糊数的函数形式表示定理. 2002 年, 对于 n 维模糊数, Zhang 和 Wu^[51] 也给出了相应的函数形式表示定理. 2000 年, Chen 等人^[52] 又提出了一维模糊数的直接表示法, 即将一维模糊数直接视为 $\mathbb{R}^2$ 平面上的一条曲线. 因而, 经典分析又是研究模糊数的另一种工具.

1989 年, Nanda^[53] 利用区间数的序关系在一维模糊数空间 E^1 中引入一种序关系, 从而可以很自然地定义一族模糊数的上、下确界. 但人们长期误认为这种序有界的模糊数集的上、下确界必定存在, 无需证明. 1997 年, 文献 [54] 证明了 E^1 中的序有界集一定存在上、下确界且给出了具体表达式. Nanda 等人还误以为在 E^1 中也自然有类似于有界实数集上、下确界可由该实数集中的数来逼近的性质, 导致模糊数值函数积分的讨论中出现某些错误, 这一点在文献 [54] 中也已被指出. 2003 年, Fang 和 Huang^[55] 将文献 [54] 中 E^1 的上、下确界表达式扩展到 E^n 情形. 另外, 1998 年, 吴冲在文献 [56, 第 3 页] 又指出 Zhang 和 Hirota^[57] 在 E^1 中所引进的另一种序结构, 其实只在吴从炘等人^[58] 引入的台型模糊数集 (E^1 的一个真子集) 上才有定义. 由于种种理论问题和实际应用的需要, 模糊数空间还出现了许多新的序关系, 如文献 [59].

3.2 模糊数空间的度量

本小节简要综述模糊数空间常见的 8 种度量和 9 种收敛及 1 个完备化问题. 关于 n 维模糊数空

间 E^n 最常用的度量当属 1983 年 Puri 和 Ralescu 提出的一致 Hausdorff 度量 d_∞ :

$$d_\infty(u, v) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha).$$

E^n 关于 d_∞ 为完备但不可分. 1986 年, Klement 等人以 α - 水平集的 Hausdorff 度量在 $[0, 1]$ 上的 Lebesgue 积分 $\int_0^1 d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) d\alpha$ 定义了 E^n 的 L_1 - 型度量 d_1 . Diamond 和 Kloeden^[60] 又将其推广为 L_p - 型度量 d_p , 且证得 E^n 关于 d_p 为可分, 但不完备. n 维模糊数空间 E^n 的度量最早是由 Kloeden 于 1980 年引进的支集下方图度量 D_∞ (如果把支集的条件去掉, 便得到下方图度量 D), 其完备性、可分性都有讨论.

1999 年, Wu 和 Li^[61] 在 E^1 中利用集合的对称差运算 Δ ($A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$) 引进一致对称差度量

$$d_\Delta(u, v) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} m([u]^\alpha \Delta [v]^\alpha),$$

其中 m 表示 Lebesgue 测度, 以及 p - 平均对称差度量

$$d_{\Delta p}(u, v) = \left(\int_0^1 (m([u]^\alpha \Delta [v]^\alpha))^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty),$$

证明了 (E^1, d_Δ) 与 $(E^1, d_{\Delta p})$ 为拟度量空间, 给出了它们为度量空间的充要条件. 随后, Li 等人^[62, 63] 又讨论了 (E^1, d_Δ) 与 $(E^1, d_{\Delta p})$ 的完备性和可分性. 2000 年, Joo 和 Kim^[64] 通过研究随机过程的极限定理在 E^1 中引入了 Skorohod 度量 d_s , 证得 E^1 关于 d_s 为可分, 但不完备. 2004 年, Kim 和 Kim 又将其推广到 E^n .

以上所述的 8 种度量: d_∞, d_1, d_p ($1 < p < \infty$), $D_\infty, D, d_\Delta, d_{\Delta p}$ ($1 \leq p < \infty$), d_s 就诱出了 8 种收敛. 1985 年, Kaleva^[65] 所讨论的水平收敛 l 则是模糊数空间中的第 9 种收敛. 2003 年, Fang 和 Huang^[55] 在 E^n 中引进水平收敛拓扑 $\tau(l)$ 使得相应的 (序列) 水平收敛恰为 Kaleva 的水平收敛. 有许多文献以不同的视角和方式探讨或比较这 9 种收敛中的某几种, 如 Kaleva 讨论的是水平收敛与 d_∞ 收敛和水平收敛与 D_∞ 收敛之间的关系. 2009 年, Zhao 和 Wu^[66] 则讨论了 d_p, D, D_∞ 三种收敛性间的等价问题.

2009 年, Wu 等人^[67] 通过给出在 E^1 中的 D_∞ 度量具有可达性这一结论, 将实数空间 $\mathbb{R}^1$ 的有界单调收敛定理和区间套定理推广到模糊数空间 (E^1, D_∞) , 后者与经典数学分析中的表述基本上完全一致.

1984 年, Kaleva 和 Seikkala^[68] 提出的模糊度量空间 (X, d, L, R) 是以非紧模糊数为度量的值, 其中 L 和 R 为满足某些特定条件的二元函数: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Huang 和 Wu^[69] 利用他们在文献 [70] 中关于这种模糊度量空间所得到的水平形式三角不等式为工具, 给出了 (X, d, L, R) 可完备化的刻画, 并证明了在等距意义下相应的完备化空间是唯一的, 同时还指出了, 当 R 附加可以包含 $R = \max$ 情形在内的一定条件时, 必存在完备化空间且在等距意义下唯一. 这推广了 1985 年 Kaleva 对 $(X, d, \min, \max)$ 的完备化的相应结果. 2008 年, Kaleva 对模糊度量空间完备化的评论文献 [71] 指出了 Lee 等人在 1999 年发表的完备化工作其实是错的等事实, 进而说明尚未见到改进他本人关于模糊度量空间完备化的结果.

3.3 模糊数空间的嵌入定理

本小节简要综述模糊数空间对具体的泛函 (线性) 空间的嵌入及其两类拓展. 1983 年, Puri 和 Ralescu^[72] 首先证明模糊数空间可以嵌入到一个 Banach 空间. 1991 年, Wu 和 Ma^[73] 首次引入一个具

体 Banach 空间 $\overline{C}[0, 1] = \{f : \text{在 } [0, 1] \text{ 上实值有界, 在 } (0, 1) \text{ 上左连续, 在 } [0, 1) \text{ 上右极限存在且在 } x = 0 \text{ 处右连续}\}$, 其中 $\|f\|_{\overline{C}} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$, 通过利用一维模糊数空间 (E^1, d_∞) 的函数形式表示定理, 引进从 (E^1, d_∞) 到乘积 Banach 空间 $\overline{C}[0, 1] \times \overline{C}[0, 1]$ 的嵌入算子 j , 其中 $\|(f, g)\|_{\overline{C} \times \overline{C}} = \max\{\|f\|_{\overline{C}}, \|g\|_{\overline{C}}\}$, 进而得到嵌入定理: (E^1, d_∞) 可以等距同构地嵌入到 $\overline{C}[0, 1] \times \overline{C}[0, 1]$, 并且有 $j(E^1) - j(E^1) = (\overline{C}[0, 1] \cap V[0, 1]) \times (\overline{C}[0, 1] \cap V[0, 1])$ ($V[0, 1]$ 为 $[0, 1]$ 上有界变差函数的全体) 和 $cl(j(E^1) - j(E^1)) = \overline{C}[0, 1] \times \overline{C}[0, 1]$. 也就是说, $\overline{C}[0, 1] \times \overline{C}[0, 1]$ 恰好就是顶点为零点的凸锥 (E^1, d_∞) 在嵌入算子 j 作用下的闭线性包. 从而, 模糊数值函数 $F(t)$ ($t \in \mathbb{R}$ 或 $t \in [a, b]$) 借助嵌入定理即可看成从 $\mathbb{R}$ 或 $[a, b]$ 到 $\overline{C}[0, 1] \times \overline{C}[0, 1]$ 的抽象函数, 再根据经典泛函分析理论和 $\overline{C}[0, 1] \times \overline{C}[0, 1]$ 的具体性质 (如文献 [74, 定理 3.3] 所给出 $\overline{C}[0, 1]$ 的有界线性泛函一般表达式等) 便可开展研究, 例如, Wu 和 Ma [74] 得到了模糊数值函数的 (K) 积分与抽象函数的 Pettis 积分、Bochner 积分的关系以及各种可测性、可微性的关系等. 1993 年, Ma [75] 则给出了 (E^n, d_∞) 所能嵌入的具体 Banach 空间 $\overline{C}([0, 1], C(S^{n-1}))$, 其中 S^{n-1} 为 $\mathbb{R}^n$ 的单位球面. 此外, 文献 [76, 77] 还讨论了模糊数空间嵌入的一些其他问题.

2002 年, Wang 和 Wu [78] 利用 $2n$ 个 $\overline{C}[0, 1]$ 的乘积空间给出了 E^n 的子类模糊 n -立方体数空间

$$L(E^n) = \{u \in E^n : \forall \alpha \in [0, 1] \text{ 存在 } \underline{u}_k(\alpha) \leq \overline{u}_k(\alpha) (k = 1, 2, \dots, n) \text{ 使得} \\ [u]^\alpha = [\underline{u}_1(\alpha), \overline{u}_1(\alpha)] \times [\underline{u}_2(\alpha), \overline{u}_2(\alpha)] \times \cdots \times [\underline{u}_n(\alpha), \overline{u}_n(\alpha)]\}$$

的嵌入定理, 也讨论了模糊 n -立方体数值函数的可微性. 2007 年, Wang 等人 [79] 又讨论了可测性与可积性.

对于一维非紧模糊数空间 $\tilde{E}^1$, Wu 和 Zhang [80] 通过引入 $d_\infty^{(k)}(u, v) = \sup_{\alpha \in [\frac{1}{k}, 1]} d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha)$ 来定义 $\tilde{E}^1$ 上的度量

$$\tilde{d}_\infty(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_\infty^{(k)}(u, v)}{1 + d_\infty^{(k)}(u, v)},$$

以及构造一个具体 Frechet 空间 $\tilde{C}(0, 1] = \{f : \text{在 } (0, 1] \text{ 上实值左连续且在 } (0, 1) \text{ 上右极限存在}\}$, 其中

$$\|f\|_{\tilde{C}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|f\|_k}{1 + \|f\|_k}$$

($\|f\|_k = \sup_{t \in [\frac{1}{k}, 1]} |f(t)|$, $k \in \mathbb{N}$), 证明了 $(\tilde{E}^1, \tilde{d}_\infty)$ 相应的嵌入定理, 得到了

$$cl(\tilde{j}(\tilde{E}^1) - \tilde{j}(\tilde{E}^1)) = \tilde{C}(0, 1] \times \tilde{C}(0, 1].$$

接着, Wu 和 Zhang [81] 类似地将嵌入定理应用于 $\tilde{E}^1$ 值函数的可测性、可微性和 (K) 可积性的讨论. 2001 年, Wu 和 Zhang [82] 利用 Zhang 和 Wu [51] 得到的 n 维模糊数的函数形式表示定理, 给出了 n 维非紧模糊数空间 $(\tilde{E}^n, \tilde{d}_\infty)$ 的嵌入定理. 2008 年, Chen 等人 [83] 则引入并研究了可积非紧模糊数空间及其嵌入等问题, 其具体嵌入空间为 $L[0, 1] \times L[0, 1]$.

2014 年, Solatikia 等人 [84] 对开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 引进了从通常的连续函数空间 $C(\Omega)$ 到模糊数空间 E^1 的一个映射 $\|\cdot\|$, 进而证明了 $(C(\Omega), \|\cdot\|, \min, \max)$ 是文献 [43, 45] 意义下的模糊赋范线性空间, 接着又证明了具体的模糊 Banach 空间 $C(\Omega) \times C(\Omega)$ 是 (E^1, d_∞) 的嵌入空间, 并将该结果应用于模糊优化, 这是第一类拓展.

下面转向第二类拓展, 即 Banach 空间上的模糊数空间和满足若干条件的模糊集空间的情形. 2012 年, Wu [85] 研究的就是 Banach 空间上模糊数空间的嵌入定理. 2005 年, Teran [86] 又扩展到研究将 Banach 空间上所有上半连续的凸模糊集空间嵌入于定义在一个紧空间上的连续函数空间.

3.4 模糊数空间的紧集刻画

本小节简要综述模糊数空间的紧集刻画及其一种拓展. 1990 年, Diamond 和 Kloeden^[60] 给出 (E^n, d_p) 的一个紧集刻画, 他们在 1992 年又举出反例说明该紧集刻画并不成立. 1993 年, Ma^[87] 则提出了这个不正确的紧集刻画的一种修正形式. 2008 年, Wu 和 Zhao^[88] 通过反例表明 Ma 的紧集刻画仍不成立, 并为 (E^n, d_p) ($1 \leq p < \infty$) 提供了一个正确的紧集刻画; 他们还以反例说明 Diamond^[89] 给出的相对于原点的模糊星形数空间 (S_0^n, d_p) ($1 \leq p < \infty$) 的紧集刻画也不成立, 且得到一个相应正确的紧集刻画. Zhao 和 Wu^[66] 对 E^n 中 d_p, D, D_∞ 度量收敛等价性关系的讨论获得 (E^n, D_∞) 的紧集刻画. 2004 年, Fan^[90] 曾对 (E^1, D_∞) 给出一个形式上完全不同的紧集刻画. Ghil 等人于 2001 年给出了 (E^1, d_s) 的紧集刻画, 2004 年, Kim 又将其推广到 (E^n, d_s) .

Fang 和 Huang^[55] 对 $(E^n, \tau(l))$ 给出在拓扑意义下的紧集刻画. 2014 年, Huang 和 Wu^[91] 又对 $(E^n, \tau(l))$ 的拓扑意义下紧集给出新刻画, 且证明了在 $(E^n, \tau(l))$ 中拓扑意义下的紧性与序列紧性等价.

下面转向度量空间上满足若干条件的模糊集空间的紧集刻画. 2006 年, Greco^[92] 对任意度量空间上的上半连续、正规且具有非空紧支集的模糊集全体的空间得到了关于 D_∞ 度量的相对紧集刻画, 从而在对模糊集没有任何凸性假设的度量空间情形下, 将 Fan^[90] 对 (E^1, D_∞) 的紧集刻画作为推论并且回答了 Fan^[90] 所提出的寻找 (E^n, D_∞) 的紧集刻画的公开问题. 同一年, 他和 Moschen 还讨论过度量空间上模糊集空间关于 d_∞ 度量的相对紧集刻画.

4 连续模糊数值函数空间

4.1 关于 d_∞ 度量连续的模糊数值函数空间及对模糊函数的拓展

本小节简要综述 $C([a, b], E^1, d_\infty)$ 空间及对模糊函数 $(E^1 \rightarrow E^1)$ 的拓展. 1997 年, 文献 [54] 给出了从 $[a, b]$ 到一维模糊数空间 E^1 关于度量 d_∞ 的连续模糊数值函数在 $[a, b]$ 上存在的上、下确界的具体表达式. 1999 年, 文献 [93] 又证明了, 若模糊数值函数 $f \in C([a, b], d_\infty)$, 则 $f(t)$ 在 $[a, b]$ 上可达到上 (下) 确界当且仅当该上 (下) 确界可由该 d_∞ 连续模糊数值函数在 $[a, b]$ 上的模糊数的值依度量 d_∞ 所逼近, 这不同于经典情形. 同年, Wu 和 Liu^[94] 还获得相应于 $C([0, 1], d_\infty)$ 的 Weierstrass 逼近定理: $\lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(B_n(f)(t), f(t)) = 0$ ($B_n(f)(t) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$ 为 $f(t)$ 的模糊 Bernstein 多项式) 的一种形式.

2000 年, Buckley 和 Yan^[95] 则进一步研究了从 $E^1[a, b] \rightarrow E^1$ 分别关于 D_∞ 和 d_∞ 度量的相应形式度量

$$\widehat{D}_\infty(f, g) = \sup_{u \in E^1[a, b]} D_\infty(f(u), g(u))$$

和

$$\widehat{d}_\infty(f, g) = \sup_{u \in E^1[a, b]} d_\infty(f(u), g(u))$$

的两类连续的模糊函数空间 $(\mathcal{A}[a, b], \widehat{D}_\infty)$ 和 $(\mathcal{B}[a, b], \widehat{d}_\infty)$, 并且证得 $(\mathcal{A}[a, b], \widehat{D}_\infty)$ 和 $(\mathcal{B}[a, b], \widehat{d}_\infty)$ 完备、关于加法和数乘运算封闭, 但前者可分, 而后者不可分, 又 $\mathcal{A}[a, b] \subsetneq \mathcal{B}[a, b]$.

2002 年, Magassy 和 Wu^[96] 利用模糊数的序给出模糊数值函数为 d_∞ 上、下半连续的一种定义, 证明了 $f: [a, b] \rightarrow E^1$ 为 d_∞ 连续当且仅当 f 在 $[a, b]$ 上为 d_∞ 既上半又下半连续, 也得到一些类似于经典情形的性质.

与模糊连续性有关联的还有 Gong 和 Wu^[97] 引入有界变差的模糊数值函数, 得到其特征刻画和线性性质等. 2013 年, Ren 和 Wu^[98] 则将有限变差模糊数值函数应用于对 II 型模糊 Riemann-Stieltjes 积分的讨论.

4.2 关于 d_p ($1 \leq p \leq \infty$) 度量、支集下方图度量 D_∞ 和水平收敛连续的模糊 (数) 值函数空间的正则模糊神经网络逼近

本小节简要综述模糊值函数的情形. 正则模糊神经网络始自 1994 年 Buckley 和 Hayshi 关于三层正则模糊神经网络的研究. 2001 年, Liu^[99] 证明了四层正则模糊神经网络能够逼近所有按照 d_∞ 度量连续的模糊值函数. 2009 年, Huang 和 Wu^[100] 提出了一种模糊值分片线性插值方法, 在理论上也能证明四层正则模糊神经网络能够逼近所有 d_∞ 度量连续的模糊值函数. 所谓四层正则模糊神经网络是指 $H(x) = \sum_{i=1}^n u_i (\sum_{j=1}^m c_{ij} \cdot \sigma(y_j \cdot x + \theta_j))$ ($n, m \in \mathbb{N}$, $u_i \in E^1$, $c_{ij}, y_j, \theta_j \in \mathbb{R}$), 其中 $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个取定的 Tauber-Wiener 函数, 所有 $H(x)$ 的全体记作 $\mathcal{H}(\sigma)$. 文中还指出, 当 F 为模糊值函数 $\mathbb{R} \rightarrow E^1$ 且 Q 为其内的元均在 $\mathbb{R}$ 上 d_p 连续的 F 的 d_p 逼近器 (指 $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}, \exists g_n \in Q$ 使得 $d_p(g_n(x), F(x))$ 在 $[a, b]$ 上关于 x 一致收敛于 0) 时, F 为 d_p 连续, 进而得到, 当 $F: \mathbb{R} \rightarrow E^1$ 且 σ 连续时, 有 F 为在 $\mathbb{R}$ 上 d_p 连续等价于 $\mathcal{H}(\sigma)$ 为 F 的 d_p 逼近器.

2009 年, Huang 和 Wu^[101] 也用模糊值分片线性插值方法证明了四层正则模糊神经网络在所有按照水平拓扑收敛为连续的模糊值函数 $F: \mathbb{R} \rightarrow E^1$ 的集合上的逼近能力. 也就是通过证得: 若 F 为水平连续, 则 $\mathcal{H}(\sigma)$ 是 F 的一个水平逼近器; 当 F 为模糊值函数且 Q 为其内的元均水平连续的 F 的水平逼近器时, F 为水平连续, 从而得到, 在 σ 为连续的条件下, 模糊值函数 F 为水平连续等价于 $\mathcal{H}(\sigma)$ 是 F 的水平逼近器.

Huang 和 Wu^[102] 又借助文中对 p 维模糊数空间 E^p 的支集下方图度量 D_∞ 相关性质的讨论给出了能够使得四层正则模糊神经网络按照 D_∞ 度量逼近模糊值函数的等价刻画, 还进一步讨论了激活函数 σ 的选择对逼近速度的影响.

4.3 关于 d_∞ 度量和水平收敛连续的模糊函数 ($E^1 \rightarrow E^1$) 的正则模糊神经网络逼近

本小节简要综述模糊函数的情形. 1999 年, 刘普寅和汪浩^[103] 通过引入保截 (cut-preserving) 模糊函数刻画了单输入单输出四层正则模糊神经网络关于 d_∞ 度量的逼近能力. 2010 年, Huang^[104] 证明了, 如果从 $\mathbb{R}$ 到 E^1 的模糊值函数为支集下方图度量 D_∞ 连续, 那么, 它的 Zadeh 扩张为 D_∞ 连续的从 E^1 到 E^1 的模糊函数 (模糊值函数的 Zadeh 扩张未必是从 E^1 到 E^1 的模糊函数).

Huang 和 Wu^[105] 得到了, 当 $f: \mathbb{R} \rightarrow E^1$ 为 d_∞ 连续 (水平连续) 时, f 的 Zadeh 扩张 $\tilde{f}$ 为从 E^1 到 E^1 且 d_∞ 连续 (水平连续). 进而可以获得能被四层正则模糊神经网络 d_∞ 逼近 (水平逼近) 的从 E^1 到 E^1 的模糊函数 F 的刻画, 这时, F 为 d_∞ 连续 (水平连续) 的扩张型模糊函数 (F 为扩张型指的是 F 为 $F|_{\mathbb{R}}$ 的 Zadeh 扩张). 文中还对 Zadeh 扩张型模糊函数与保截模糊函数作了比较. 另外, 2005 年, Liu 和 Li^[106] 进一步讨论了多输入单输出四层正则模糊神经网络的逼近.

5 模糊可测函数空间、Sugeno 模糊可积函数空间和模糊测度的空间

由于 Sugeno 模糊积分的定义采用的是模糊测度和相应的模糊可测函数. 模糊测度保留了经典测度的单调性 (即当 $A \subset B$ 时, $\mu(\phi) = 0$ 且 $\mu(A) \leq \mu(B)$), 并将可列可加性减弱为上、下连续性. 后

来, 模糊测度又再减弱为单调测度. 因此, 本节简要综述关于单调测度的实值模糊可测函数空间与实值 Sugeno 模糊可积函数空间以及与单调测度相关的某些性质.

5.1 关于单调测度的模糊可测函数列的测度收敛

如同经典测度论, 模糊可测函数同样也是由可测空间 $(X, \mathcal{X})$ 来定义的, 与测度无关. 类似于经典测度论可知, 所有实值模糊可测函数的全体 $\mathcal{F}$ 构成线性空间, 且具有经典可测函数的许多性质 (如文献 [6, 107, 108]).

1997 年, Ha 等人^[109] 实际上给出经典测度论成立的 “ $f_n \xrightarrow{a.e.} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$ ”, 关于单调测度结论仍能保持成立的充要条件. 1998 年, Ha 等人^[110] 实际上证得 $\forall \{f_n\} \subset \mathcal{F}, \exists f \in \mathcal{F}$ 使得 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 恒可推出 $\{f_n\}$ 为 μ -Cauchy 列当且仅当单调测度 μ 为双零渐近可加 ($\mu(A_n) \rightarrow 0, \mu(B_n) \rightarrow 0 \Rightarrow \mu(A_n \cup B_n) \rightarrow 0$, 首见于文献 [19]). 2010 年, Ren 等人^[111] 对于单调测度进一步得到双零渐近可加性也是保持 $\mathcal{F}$ 中的测度收敛序列对加法等许多运算可继承的特征. 这些性质对于经典测度都无条件成立. 另外, 对于与此相关重要的经典 Egoroff 定理, 2004 年, Li^[112] 给出了该定理关于单调测度成立的充要条件.

5.2 Sugeno 模糊积分与关于单调测度的模糊可测函数空间

1974 年, Sugeno 在其博士论文 [113] 中引进了非负模糊可测函数的模糊积分, 在积分定义中的测度为模糊测度. 2003 年, Wu 和 Mamadou^[114] 又引入并讨论了实值模糊可测函数, 即 $f \in \mathcal{F}$ 的 Sugeno 模糊积分

$$(S) \int_X f(x) d\mu = (S) \int_X f^+(x) d\mu - (S) \int_X f^-(x) d\mu,$$

其中

$$(S) \int_X f^+(x) d\mu = \sup_{\alpha > 0} \min\{\alpha, \mu(\{x \in X : f^+(x) \geq \alpha\})\}.$$

Wu 和 Zhao^[115] 继续研究了这类非绝对可积的非线性积分. 2011 年, Wu 等人^[116] 形式上参照经典泛函分析的实值可测函数空间, 证明了对于单调测度 μ 在 $\mathcal{F}$ 中有

$$(S) \int_X \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} d\mu \rightarrow 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f,$$

进而, 在 $\mu(X) < \infty$ 条件下, 首次给出了 $\mathcal{F}$ 为具有可数局部基的经典拓扑线性空间的充要条件, 并且拓扑收敛与 μ -测度收敛等价, 建立了模糊分析与经典泛函分析之间的一种联系, 并且与经典泛函分析中相应条件下的实值可测函数空间的性质不同. 同年, Ouyang 和 Zhang^[117] 在文献 [116] 基础上采用 Choquet 积分替换 Sugeno 积分, 但只得到一个充分条件和一个必要条件, Huang 和 Wu^[118, 119] 对 Choquet 积分也有工作.

5.3 关于单调测度的实值 Sugeno 可积函数空间

2013 年, Wu 等人^[120] 首次提出了对给定单调测度的 Sugeno 可积函数空间的研究, 证明了两个测度为有限的集合之并集的测度仍为有限是该空间成为线性空间的充分条件, 并且该条件也保证了对所给定单调测度的 Sugeno 可积函数空间亦为经典拓扑线性空间. 这样, 就在模糊分析中又构造出一类经典意义下的泛函空间.

5.4 非可加测度的空间 $(\mathcal{FM}, \|\cdot\|_{BV})$

1995 年, Pap^[108] 讨论了赋予有界链式变差范数 $\|\mu\|_{BV} = |\mu|(X)$ 的 Banach 空间 $(\mathcal{FM}, \|\cdot\|_{BV})$, 其中 $(X, \mathcal{X})$ 为可测空间, $\mathcal{FM} = \{\mu: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \text{ 且 } \mu(\phi) = 0\}$. 2003 年, Narukawa 等人^[121] 也研究过该空间的 B^+ 拓扑. 2006 年, 吴从炘和任雪昆又研究了该空间的 B 拓扑. 2008 年, Wu 和 Ren^[122] 证明了, $(\mathcal{FM}, \|\cdot\|_{BV})$ 可分当且仅当 $\mathcal{X}$ 是有限集.

另外, 对于与泛函空间某种意义的离散性有关联的非可加测度 (即 $\mu \in \mathcal{FM}$) 的原子, 2000 年, 文献^[123] 指出, Pap 1994 年关于零可加集函数的原子的 Saks 分解定理证明中所用的引理 1 结论不正确, 并给出该分解定理的正确证明. 2007 年, Wu 和 Sun^[124] 引入了非可加测度的伪原子概念, 在比零可加更弱的双零可加 (先出现于 1994 年的文献^[19], 后来也被人称为弱零可加) 条件下对原子与伪原子 (两者可以有交集), 得到不存在伪原子的充要条件和关于伪原子相应的 Saks 分解定理, 以及在零可加情形下关于原子与伪原子的一种分解定理. 同年, Wu 和 Sun 又指出 Pap 于 2001 年关于零可加单调测度的一个扩张定理证明不正确, 并给出正确证明, 还得到了在弱零可加条件下类似的扩张定理. 再就是, Wu 和 Ha^[126] 肯定地回答了 Wang^[127] 关于模糊测度零可加性的一个公开问题.

有关第 3-5 节的内容, 读者可参见文献^[128].

6 小结与展望

本文系针对模糊分析研究中出现的几类泛函空间, 即模糊拓扑线性空间、模糊数空间、连续模糊数值函数空间、模糊可测函数空间和 Sugeno 模糊可积函数空间及模糊测度空间的若干研究工作进行了简要综述, 并就此进一步提出几点似可参考的建议. (1) 从模糊拓扑线性空间到各种模糊赋范线性空间的种种研究表明模糊泛函分析正在发展, 可以进行深入研究, 例如, Lee^[129] 研究了模糊赋范线性空间的逼近性质与有界逼近性质. 在经典 Banach 空间理论中 Enflo 和 Grothendieck 曾关注过该问题. (2) 对于模糊数空间, 可以考虑针对各种不同论题 (如模糊优化等) 引入相应的新序结构、新度量及新的具有特殊性质的子空间. (3) 至于模糊数值函数空间, 除了模糊连续函数空间, 在模糊数值函数的积分、模糊微分方程等的讨论中也会有一些模糊数值函数空间问题, 不妨予以关注. (4) 模糊可测函数空间与 Sugeno 模糊可积函数空间的研究才刚起步. 此外, 在模糊分析中近年来出现许多积分, 如 Mesiar 等人^[130] 的工作中也可能会出现某些可供讨论的泛函空间. (5) 模糊数序列空间在印度、伊朗等国家有许多人从事研究, 值得继续展开, 经典泛函分析中的序列空间及有关研究可作为一种参照物.

致谢 衷心感谢特邀编辑、主编和审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Zadeh L A. Fuzzy sets. Inform Control, 1965, 8: 338-353
- 2 Chang S L, Zadeh L A. On fuzzy mapping and control. IEEE Trans Syst Man Cybernet, 1972, 2: 30-34
- 3 Diamond P, Kloeden P E. Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Application. London: World Scientific, 1994
- 4 Lakshmikantham V, Mohapatra R N. Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions. London: Taylor & Francis, 2003
- 5 Katsaras A K, Liu D B. Fuzzy vector spaces and fuzzy topological vector spaces. J Math Anal Appl, 1977, 58: 135-146
- 6 Wang Z Y, Klir G J. Generalized Measure Theory. New York: Springer-Verlag, 2008
- 7 徐利治. 徐利治访谈录 (徐利治口述, 袁向东和郭金海访问整理). 长沙: 湖南教育出版社, 2009
- 8 徐利治. 数学分析的方法及例题选讲. 北京: 高等教育出版社, 1955

- 9 Gal I S. On sequences of operation in complete vector spaces. *Amer Math Monthly*, 1953, 60: 527–538
- 10 Pu P M, Liu Y M. Fuzzy topology I. *J Math Anal Appl*, 1980, 76: 571–599
- 11 Liu Y M, Luo M K. *Fuzzy Topology*. Singapore: World Scientific, 1997
- 12 吴从炘. 关于不分明拓扑线性空间 I. *哈尔滨工业大学学报*, 1979, 1: 1–19
- 13 Chang C L. Fuzzy topological spaces. *J Math Anal Appl*, 1968, 24: 182–190
- 14 Lowen R. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. *J Math Anal Appl*, 1976, 58: 621–633
- 15 吴从炘, 方锦暄. Fuzzy 拓扑线性空间的再定义. *科学探索*, 1982, 2: 113–116
- 16 Katsaras A K. Fuzzy topological vector spaces I. *Fuzzy Sets and Systems*, 1981, 6: 85–95
- 17 王戈平. 评《Fuzzy 拓扑线性空间的再定义》. *数学研究与评论*, 1984, 4: 151–152
- 18 吴从炘, 马明. *模糊分析学基础*. 北京: 国防工业出版社, 1991
- 19 吴从炘, 马明, 方锦暄. *模糊分析学的结构理论*. 贵阳: 贵州科技出版社, 1994
- 20 吴从炘, 方锦暄. 有界性与局部有界的 fuzzy 拓扑线性空间. *模糊数学*, 1985, 5: 80–89
- 21 吴从炘, 李建华. 凸性与模糊拓扑线性空间. *科学探索*, 1984, 4: 1–4
- 22 吴从炘, 方锦暄. (QL) 型 Fuzzy 拓扑线性空间. *数学年刊 A 辑*, 1985, 6: 355–364
- 23 Fang J X, Yan C H. L-topological vector spaces with a prebase. In: *Fuzzy Logic, Soft Computing and Computational Intelligence (IFSA 2005)*, vol. 1. Beijing: Tsinghua University Press, 2005, 262–267
- 24 吴从炘, 马明. (QL) Fuzzy 拓扑线性空间和 Fuzzy 一致空间. *科学通报*, 1986, 31: 716–716
- 25 吴从炘, 方锦暄. Kolmogoroff 定理的 Fuzzy 推广. *哈尔滨工业大学学报*, 1984, 1: 1–7
- 26 Katsaras A K. Fuzzy topological vector spaces II. *Fuzzy Sets and Systems*, 1984, 12: 143–154
- 27 马明. 两种 fuzzy 赋范空间定义的比较. *哈尔滨工业大学学报*, 1985, 数学增刊: 47–49
- 28 Wu C X, Ma M. Continuity of fuzzy linear operators. *Acta Math Sci*, 1988, 8: 71–77
- 29 Wu C X, Ma M, Bao Y. LF fuzzy normed spaces and their duals. In: *Proceedings of Sino-Japan Joint Meeting on Fuzzy Sets and Systems*. Beijing: International Academic Publishers, 1990, 1–4
- 30 吴从炘, 方锦暄. FTL- 空间上的 Fuzzy 连续线性算子. *模糊系统与数学*, 1991, 5: 11–19
- 31 Fang J X. Fuzzy linear order-homomorphisms. *J Fuzzy Math*, 1996, 4: 93–102
- 32 Fang J X, Yan C H. L-fuzzy topological vector spaces. *J Fuzzy Math*, 1997, 5: 133–144
- 33 Yan C H, Wu C X. Fuzzy L-bornological spaces. *Inform Sci*, 2005, 173: 1–10
- 34 Abel M, Sostak A. Towards the theory of L-bornological spaces. *Iran J Fuzzy Syst*, 2011, 8: 19–28
- 35 Ying M S. A new approach for fuzzy topology (I). *Fuzzy Sets and Systems*, 1991, 39: 303–321
- 36 Liu Y M, Zhang D X. Lowen spaces. *J Math Anal Appl*, 2000, 241: 30–38
- 37 Qiu D W. Fuzzifying topological linear spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 2004, 147: 249–272
- 38 Yan C H, Wu C X. Fuzzifying topological vector spaces on completely distributive lattices. *Int J Gen Syst*, 2007, 36: 513–525
- 39 Yan C H, Wu C X. L-fuzzifying topological vector spaces. *Int J Math Math Sci*, 2005, 2005: 2081–2093
- 40 Yan C H. Level topologies of fuzzifying topological linear spaces and their applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158: 1803–1813
- 41 吴从炘, 马明. Fuzzy 拓扑代数及局部乘法凸 Fuzzy 拓扑代数. *科学通报*, 1984, 29: 12–79
- 42 Wu C X, Ma M. Fuzzy normed algebras and representation of locally m-convex fuzzy topological algebras. *Fuzzy Sets and Systems*, 1989, 30: 63–68
- 43 Felbin C. Finite dimensional fuzzy normed linear spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 48: 239–248
- 44 Cheng S C, Mordeson J N. Fuzzy linear operators and fuzzy normed linear spaces. *Bull Calcutta Math Soc*, 1994, 86: 429–436
- 45 Bag T, Samanta S K. Finite dimensional fuzzy normed linear spaces. *J Fuzzy Math*, 2003, 11: 687–705
- 46 Xiao J, Zhu X. On linearly topological structure and property of fuzzy normed linear space. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, 125: 153–161
- 47 Halder D, Bag T, Samanta S K. Strictly convex fuzzy normed (Felbin type) linear spaces. *J Fuzzy Math*, 2012, 20: 577–588
- 48 Nadaban S, Dzitic I. Atomic decompositions of fuzzy normed linear spaces for wavelet applications. *Informatica*, 2014, 25: 643–662
- 49 Katsaras A K. Locally convex topologies induced by fuzzy norms. *Global J Math Anal*, 2013, 1: 83–96
- 50 Goetschel R, Voxman W. Elementary fuzzy calculus. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 18: 31–43
- 51 Zhang B K, Wu C X. On the representation of n -dimensional fuzzy numbers and their informational content. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, 138: 227–235
- 52 Chen M H, Saito S, Ishii H. Representations of fuzzy numbers and fuzzy differentials. *Fuzzy System Symp*, 2000, 9:

- 225–226
- 53 Nanda S. On fuzzy integral. *Fuzzy Sets and Systems*, 1989, 32: 95–101
- 54 Wu C X, Wu C. The supremum and infimum of the set of fuzzy numbers and its applications. *J Math Anal Appl*, 1997, 210: 499–511
- 55 Fang J X, Huang H. Some properties of the level convergence topology on fuzzy number space E^n . *Fuzzy Sets and Systems*, 2003, 140: 509–517
- 56 吴冲. 模糊数、模糊数值函数的理论. 博士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 1998
- 57 Zhang K L, Hirota K. On fuzzy number-lattice $(\tilde{R}, \leq)$. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, 92: 113–122
- 58 吴从炘, 李法朝, 哈明虎. 基于对称差的 Fuzzy 度量及收敛问题. *科学通报*, 1998, 43: 106–107
- 59 方述诚, 汪定伟. 模糊数学与模糊优化. 北京: 科学出版社, 1997
- 60 Diamond P, Kloeden P E. Metric spaces of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, 35: 241–249
- 61 Wu C X, Li F C. Fuzzy metric and convergences based on the symmetric difference. *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, 108: 325–332
- 62 Li F C, Qiu J Q, Zhai J R. The problem of completeness for p -mean symmetric difference metric. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 116: 459–470
- 63 Li F C, Wu C X, Qiu J Q, et al. Platform type fuzzy number and separability of fuzzy number space. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 117: 347–353
- 64 Joo S Y, Kim Y K. The Skorohod topology on space of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 111: 497–501
- 65 Kaleva O. On the convergence of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 1985, 17: 53–65
- 66 Zhao Z T, Wu C X. The equivalence of convergences of sequences of fuzzy numbers and its applications to the characterization of compact sets. *Inform Sci*, 2009, 179: 3018–3025
- 67 Wu C X, Li H L, Ren X K. A note on the sendograph metric of fuzzy numbers. *Inform Sci*, 2009, 179: 3410–3417
- 68 Kaleva O, Seikkala S. On fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 1984, 12: 215–229
- 69 Huang H, Wu C X. On the completion of fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 2008, 159: 2596–2605
- 70 Huang H, Wu C X. On the triangle inequalities in fuzzy metric spaces. *Inform Sci*, 2007, 177: 1063–1072
- 71 Kaleva O. A comment on the completion of fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 2008, 159: 2190–2192
- 72 Puri M L, Ralescu D A. Differentials of fuzzy functions. *J Math Anal Appl*, 1983, 91: 552–558
- 73 Wu C X, Ma M. Embedding problem of fuzzy number space: Part I. *Fuzzy Sets and Systems*, 1991, 44: 33–38
- 74 Wu C X, Ma M. Embedding problem of fuzzy number space: Part II. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 45: 189–202
- 75 Ma M. On embedding problems of fuzzy number spaces: Part 5. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 58: 313–318
- 76 Wu C X, Ma M. Embedding problem of fuzzy number space: Part III. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 46: 281–286
- 77 Ma M. On embedding problems of fuzzy number spaces: Part 4. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 58: 185–193
- 78 Wang G X, Wu C X. Fuzzy n -cell numbers and the differential of fuzzy n -cell number value mappings. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, 130: 367–381
- 79 Wang G X, Li Y M, Wen C L. On fuzzy n -cell numbers and n -dimension fuzzy vectors. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158: 71–84
- 80 Wu C X, Zhang B K. Embedding problem of noncompact fuzzy number space $\tilde{E}$ (I). *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, 105: 165–169
- 81 Wu C X, Zhang B K. Embedding problem of noncompact fuzzy number space $\tilde{E}$ (II). *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 110: 135–142
- 82 Wu C X, Zhang B K. A note on the embedding problem for multidimensional fuzzy number spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 121: 359–362
- 83 Chen D G, Xue X P, Zhu L K. On the integrable noncompact fuzzy number space. *Appl Math Lett*, 2008, 21: 1260–1266
- 84 Solatikia F, Kilic E, Weber G W. Fuzzy optimization for portfolio selection based on embedding theorem in fuzzy normed linear spaces. *Organizacija*, 2014, 47: 90–97
- 85 Wu J R. An embedding theorem for fuzzy numbers on Banach spaces and its applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, 129: 57–63
- 86 Teran P. An embedding theorem for convex fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, 152: 191–208
- 87 Ma M. Some notes on the characterization of compact sets in (E^n, d_p) . *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 56: 297–301
- 88 Wu C X, Zhao Z T. Some notes on the characterization of compact sets of fuzzy sets with L_p metric. *Fuzzy Sets and Systems*, 2008, 159: 2104–2115
- 89 Diamond P. A note on fuzzy starshaped sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, 37: 193–199
- 90 Fan T H. On the compactness of fuzzy numbers with sendograph metric. *Fuzzy Sets and Systems*, 2004, 143: 471–477

- 91 Huang H, Wu C X. A new characterization of compact sets in fuzzy number spaces. *Abstr Appl Anal*, 2013, 2013: 820141
- 92 Greco G H. Sendograph metric and relatively compact sets of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 2006, 157: 286–291
- 93 Wu C X, Wu C. Some notes on the supremum and infimum of the set of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, 103: 183–187
- 94 Wu C X, Liu D H. A fuzzy Weierstrass approximation theorem. *J Fuzzy Math*, 1999, 7: 101–104
- 95 Buckley J J, Yan A M. Fuzzy functional analysis (I): Basic concepts. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 115: 393–402
- 96 Magassy O, Wu C X. Fuzzy semicontinuity of fuzzy number-valued function. *J Harbin Inst Tech*, 2002, 9: 139–141
- 97 Gong Z Ti, Wu C X. Bounded variation, absolute continuity and absolute integrability for fuzzy-number-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems*. 2002, 129: 83–94
- 98 Ren X K, Wu C. The fuzzy Riemann-Stieltjes integral. *Int J Theor Phys*, 1998, 52: 2134–2151
- 99 Liu P Y. Universal approximations of continuous fuzzy-valued functions by multi-layer regular fuzzy neural networks. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 119: 313–320
- 100 Huang H, Wu C X. Approximation capabilities of multilayer fuzzy neural networks on the set of fuzzy-valued functions. *Inform Sci*, 2009, 179: 2762–2773
- 101 Huang H, Wu C X. Approximation of level continuous fuzzy-valued functions by multilayer regular fuzzy neural networks. *Math Comput Modelling*, 2009, 49: 1311–1318
- 102 Huang H, Wu C X. Approximation of fuzzy-valued functions by regular fuzzy neural networks and the accuracy analysis. *Soft Comput*, 2014, 18: 2525–2540
- 103 刘普寅, 汪浩. 正则模糊神经网络对于连续模糊函数的近似能力的研究. *中国科学 E 辑*, 1999, 42: 54–60
- 104 Huang H. Some notes on Zadeh's extensions. *Inform Sci*, 2010, 180: 3806–3813
- 105 Huang H, Wu C X. Approximation of fuzzy functions by regular fuzzy neural networks. *Fuzzy Sets and Systems*, 2011, 177: 60–79
- 106 Liu P, Li H. Approximation analysis of feedforward regular fuzzy neural network with two hidden layers. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, 150: 373–396
- 107 哈明虎, 吴从炘. 模糊测度与模糊积分理论. 北京: 科学出版社, 1998
- 108 Pap E. Null-additive Set Function. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995
- 109 Ha M H, Cheng L X, Wang X Z. Notes on Riesz's theorem on fuzzy measure space. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, 90: 361–363
- 110 Ha M H, Wang X Z, Wu C X. Fundamental convergence of sequences of measurable functions on fuzzy measure space. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, 95: 77–81
- 111 Ren X K, Wu C, Wu C X. Some remarks on the double asymptotic null-additivity of monotonic measures and related applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 2010, 161: 651–660
- 112 Li J. A further investigation for Egoroff's theorem with respect to monotone set functions. *Kybernetika*, 2003, 39: 753–760
- 113 Sunego M. Theory of fuzzy integral and its applications. PhD Thesis. Tokyo: Tokyo Institute of Technology, 1974
- 114 Wu C X, Mamadou T. An extension of Sugeno integral. *Fuzzy Sets and Systems*, 2003, 138: 537–550
- 115 Wu C X, Zhao L. The absolute additivity and fuzzy additivity of Sugeno integral. In: *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, vol. 3930. Berlin: Springer-Verlag, 2006, 358–366
- 116 Wu C, Ren X K, Wu C X. A note on the space of fuzzy measurable functions for a monotone measure. *Fuzzy Sets and Systems*, 2011, 182: 2–12
- 117 Ouyang Y, Zhang H P. On the space of measurable functions and its topology determined by the Choquet integral. *Internat J Approx Reason*, 2011, 52: 1355–1362
- 118 Huang Y, Wu C X. Choquet integrals with respect to fuzzy measure on fuzzy σ -algebra. In: *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, vol. 3930. Berlin: Springer-Verlag, 2006, 329–337
- 119 Huang Y, Wu C X. Real-valued Choquet integrals for set-valued mappings. *Internat J Approx Reason*, 2014, 55: 683–688
- 120 Wu C X, Ren X K, Wu C. On the space of (S)-integrable functions for a monotonic measure. *Comment Math*, 2013, 53: 235–245
- 121 Narukawa Y, Murofushi T, Sugeno M. Space of fuzzy measures and convergence. *Fuzzy Sets and Systems*, 2003, 138: 497–506
- 122 Wu C X, Ren X K. Fuzzy measure and discreteness. *Discrete Math*, 2008, 308: 4839–4845
- 123 Wu C, Wu C X. A note on the range of null-additive fuzzy and non-fuzzy measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 110: 145–148

- 124 Wu C X, Sun B. Pseudo atoms of fuzzy and non-fuzzy measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158: 1258–1272
- 125 Wu C X, Sun B. A note on the extension of the null-additive set function on the algebra of subsets. *Appl Math Lett*, 2007, 20: 770–772
- 126 Wu C X, Ha M H. On the null-additivity and the uniform autocontinuity of a fuzzy measure. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 58: 243–245
- 127 Wang Z Y. On the null-additivity and the autocontinuity of a fuzzy measure. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 45: 223–226
- 128 吴从炘, 赵治涛, 任雪昆. 模糊分析学与特殊泛函空间. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2013
- 129 Lee K Y. Approximation properties in fuzzy normed spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, in press, 2015
- 130 Mesiar R, Li J, Pap E. Superdecomposition integrals. *Fuzzy Sets and Systems*, 2015, 259: 3–11

The functional space in fuzzy analysis

WU CongXin, REN XueKun & WU Chong

Abstract In this paper, we briefly summarize some work on the area of functional spaces in fuzzy analysis and devoted to four directions. The first direction is the development of the fuzzy functional analysis on the setting of topological linear space and several kinds of fuzzy normed linear spaces. Next direction is fuzzy number spaces with different metrics and the embeddings to concrete functional spaces with a linear structure. The third direction is fuzzy continuous function spaces and the approximation by multilayer regular fuzzy neural networks for various fuzzy continuities. The last direction is the space of measurable functions and the space of (Sugeno)-integrable functions based on the theory of monotonic measures. In this paper, we also present several suggestions on future research. Wu Congxin was an undergraduate student of the Mathematics Department of Northeastern People's University during 1952–1955, and Professor Hsu guided and supported him so much for long time.

Keywords fuzzy analysis, functional space, fuzzy number, non-additive measure

MSC(2010) 03E27, 28E10

doi: 10.1360/N012015-00134