半完备余代数上余模范畴的黏合

付雪荣, 姚海楼*

北京工业大学应用数理学院, 北京 100124

E-mail: xuerongfu.0098@163.com, yaohl@bjut.edu.cn

收稿日期: 2016-12-23; 接受日期: 2017-07-12; 网络出版日期: 2017-09-28; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11671126) 资助项目

摘要 本文主要研究半完备余代数上余模范畴的黏合, 证明黏合中的范畴是余模范畴当且仅当它是由半完备余代数的余幂等子余代数诱导的黏合, 进一步还将此结果应用到 Morita-Takeuchi 关系余代数和余模复形范畴上.

关键词 黏合 TTF (Torsion-Torsion free)- 三元组 余幂等子余代数 余模复形范畴

MSC (2010) 主题分类 16T15

1 引言

黏合理论最初是由 Beilinson 等^[1]引入的. 近年来, 黏合理论已被众多学者所研究, 其代表性的工作参见文献 [2–9].

设 $\mathfrak{R}(\mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{C})$ 是由下图给出的 Abel 范畴的黏合:

$$\begin{array}{ccccc}
 & \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j_!} & \\
 \mathcal{B} & \xrightarrow{i_*} & \mathcal{A} & \xrightarrow{j^*} & \mathcal{C} \\
 & \xleftarrow{i^!} & & \xleftarrow{j_*} &
 \end{array}$$

使得如下条件成立:

- (r1) $(i^*, i_*, i^!)$ 和 $(j_!, j^*, j_*)$ 是伴随三元组;
- (r2) 函子 i_* 、 $j_!$ 和 j_* 是忠实满的;
- (r3) $\text{Im } i_* = \text{Ker } j^*$.

Abel 范畴的黏合在表示理论、代数几何和代数 K -理论的研究中起到非常重要的作用, 并且发展到了一个新的阶段. Beilinson 等^[1]就三角范畴的黏合与 TTF-三元组之间双射的存在性给出了证明. Angeleri Hügel 等^[2]建立了黏合理论与表示论中倾斜理论间的联系. Abel 范畴或模范畴的黏合理论就自然地出现在表示论及不同的数学研究领域. 两个黏合 $\mathfrak{R}(\mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{C})$ 和 $\mathfrak{R}'(\mathcal{B}', \mathcal{A}', \mathcal{C}')$ 之间的等价关

英文引用格式: Fu X R, Yao H L. Recollements of comodule categories over semi-perfect coalgebras (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 483–496, doi: 10.1360/SCM-2016-0764

系是由 Psaroudakis 和 Vitória^[3] 给出的, 即如果存在等价函子 $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 和 $\Theta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ 使得下图在自然等价下可交换, 即存在函子 Θj^* 和 $j'^* \Phi$ 之间的一个自然等价

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{j^*} & \mathcal{C} \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Theta \\ \mathcal{A}' & \xrightarrow{j'^*} & \mathcal{C}' \end{array},$$

则称 $\mathfrak{R}(\mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{C})$ 与 $\mathfrak{R}'(\mathcal{B}', \mathcal{A}', \mathcal{C}')$ 等价.

Psaroudakis 和 Vitória^[3] 证明了一般环上的黏合等价类和 TTF- 三元组之间存在双射. 进一步, 他们还解决了 Kuhn 的猜想: 环 A 的模范畴 $\text{Mod-}A$ 的一个黏合等价于包含在其中的范畴均为模范畴的黏合的充要条件是, 它为由与 A Morita 等价的环 S 的一个幂等元诱导的黏合. 这个猜想是 Kuhn^[7] 基于文献 [10] 的结果提出的. 我们注意到幂等理想在研究有限维代数上模范畴的黏合理论中起到非常关键的作用.

在过去的几十年中, 余代数表示论已受到相当多的关注. 因此, 我们很自然地问: 黏合理论在余模范畴中是怎样情形? 正如 Chin 和 Montgomery 在文献 [11] 中提到的, 每个余模均是它的有限维子余模的直和. 因此, 模范畴上的黏合理论的一些结果也可以推广到余模范畴上. 这就使我们可以利用余幂等子余代数来研究余模范畴的黏合. 本文首先介绍半完备余代数的余模范畴黏合的定义. 特别地, 我们在余模范畴的黏合与半完备余代数上的余幂等子余代数之间建立了一一对应关系. 同时还研究了余模复形范畴上的黏合理论, 这个研究主要是针对无限维余代数的情形. 这是因为有限维的情形可以由有限维代数的情形对偶得到. 特别地, 我们还将余模范畴的伴随同构提升到了余模复形范畴上.

设 K 是任意的域, C 和 D 是 K - 余代数. 记 $\text{Comod-}C$ 为右 C - 余模范畴, $\text{Comod-}C^q$ 为拟有限右 C - 余模范畴. 众所周知, $\text{Comod-}C$ 是好的 Abel 范畴. 事实上, 它是 Grothendieck 范畴.

2 主要结果

首先回顾关于黏合和余代数表示理论的一些基本知识.

设 C 是 K - 余代数,

$$DC =: C^* = \text{Hom}_K(C, K)$$

为带有卷积

$$f \star g(c) = \Sigma f(c_1)g(c_2)$$

的与其对偶的代数, 简称 C 的对偶代数或卷积代数, 其中 $f, g \in C^*$. 若每个有限维右 C - 余模均有投射盖, 等价地, 余模范畴 $\text{Comod-}C$ 有足够多的投射对象, 则称余代数 C 是右半完备的. 此时余模范畴 $\text{Comod-}C$ 是一个具有足够多投射和内射对象的 Abel 范畴 (具体参见文献 [12, 13]). 文献 [3, 推论 4.4] 又告诉我们, 在 $\text{Comod-}C$ 的黏合等价类和 $\text{Comod-}C$ 中的 TTF- 三元组之间存在一一对应. 在此我们回顾 TTF- 三元组的概念. TTF- 三元组是 $\text{Comod-}C$ 的满子范畴的一个三元组 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, 其中 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 和 $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ 是伴随对, 这里的满子范畴 $\mathcal{Y}$ 称为 TTF- 类.

如果对任意有限维右 C - 余模 F , 都有

$$\dim \text{Com}_C(F, M) < \infty,$$

那么称右 C -余模 M 是拟有限的 (参见文献 [14]). 显然, 所有有限余生成余模均是拟有限的. 再由文献 [13, 14] 可知, K -映射

$$\rho_M \otimes I_N - I_M \otimes \rho_N : M \otimes N \rightarrow M \otimes C \otimes N$$

的核称为 (M_C, ρ_M) 和 $({}_C N, \rho_N)$ 的余张量积, 记为 $M \square_C N$. 若 D - C -双余模 X 作为右 C -余模是拟有限的, 则 $-\square_D X : \text{Comod-}D \rightarrow \text{Comod-}C$ 有左伴随函子 $h_C(X, -) : \text{Comod-}C \rightarrow \text{Comod-}D$. 为了给出余模范畴的黏合理论, 这里引入 cohom 函子 $h_C(-, -)$, 注意到 cohom 函子 $h_C(-, -)$ 在余模范畴中的作用类似于 Hom 函子在模范畴中的作用. 由文献 [14] 知, 对拟有限右 C -余模 M 和 $N \in \text{Comod-}C$, 定义 cohom 函子 $h_C(-, -)$ 为

$$h_C(M, N) = \varinjlim D\text{Comod}_C(N_i, M),$$

其中 $\{N_i\}$ 是 N 的有限维子余模集. 对于未解释的概念和记号, 读者可参见文献 [3, 10, 12, 13, 15, 16].

我们首先给出余幂等子余代数、局部化子范畴和余局部化子范畴的概念, 下文将用到这些概念. 楔积是余代数表示理论研究的一个基本研究工具 (参见文献 [17]). 设 C 为 K -余代数, C 的子空间 U 和 V 的楔积为

$$U \wedge_C V = \Delta^{-1}(U \otimes C + C \otimes V).$$

定义 2.1 [17, 18] C 的子余代数 C' 称为余幂等子余代数, 如果 $C' = C' \wedge_C C'$, 其中

$$\begin{aligned} C' \wedge_C C' &= \text{Ker}(C \rightarrow C \otimes C \rightarrow C/C' \otimes C/C') \\ &= \Delta^{-1}(C' \otimes C + C \otimes C'). \end{aligned}$$

注 2.1 (i) 设 C' 和 C'' 是 C 的子余代数. 一般情况下, $C' \wedge_C C'' \neq C'' \wedge_C C'$.

(ii) 设 C' 是 C 的子余代数, 若定义 $C'_n = \wedge_{C'}^{n+1} C'$, $n \in \mathbb{N}$, 则存在 C 的 K -子余代数升链

$$C' = C'_0 \subseteq C'_1 \subseteq C'_2 \subseteq \cdots.$$

令 $C'_\infty = \bigcup_{n=0}^\infty C'_n$, 则由文献 [17] 可知, C'_∞ 也是 C 的子余代数. 特别地, 若 C'' 是 C 的另一个子余代数, 则

$$\begin{aligned} C'_\infty \wedge_C C'' &= \Delta^{-1}(C'_\infty \otimes C + C \otimes C'') \\ &= \Delta^{-1}\left(\left(\bigcup_{n=0}^\infty C'_n\right) \otimes C + C \otimes C''\right) \\ &= \Delta^{-1}\left(\bigcup_{n=0}^\infty (C'_n \otimes C + C \otimes C'')\right) \\ &= \bigcup_{n=0}^\infty \Delta^{-1}(C'_n \otimes C + C \otimes C'') \\ &= \bigcup_{n=0}^\infty (C'_n \wedge_C C''). \end{aligned} \tag{1}$$

若设 $C'' = C'_\infty$, 则

$$C'_\infty \wedge_C C'_\infty = \bigcup_{n,k=0}^\infty (C'_n \wedge_C C'_k).$$

但 $C'_n \wedge_C C'_k = C'_{n+k}$, 所以, $C'_n \wedge_C C'_\infty \subseteq C'_\infty$. 因此,

$$\wedge_C^2 C'_\infty = C'_\infty \wedge_C C'_\infty \subseteq C'_\infty.$$

故 $C'_\infty \wedge_C C'_\infty = C'_\infty$, 即 C'_∞ 是 C 的余幂等子余代数.

(iii) 若 I 是对偶代数 C^* 的双边理想, 则 $I^\perp = \{c \in C \mid f(c) = 0, \forall f \in I\}$ 是 C 的子余代数. 而且, 当 I 是 C^* 的幂等双边理想时, $I^\perp$ 就是 C 的余幂等子余代数. 事实上,

$$I^\perp \wedge_C I^\perp = \{c \in C \mid I^2 c = Ic = 0\} = \text{Ann}_C(I) = I^\perp.$$

定义 2.2 ^[19] 称 Grothendieck 范畴 $\mathcal{A}$ 的满子范畴 $\mathcal{C}$ 为局部化子范畴, 如果它关于子对象、商对象、直和与扩张均是封闭的. 等价地, 商函子 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}$ 有右伴随函子 $\mathcal{A}/\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$.

定义 2.3 ^[19] 称 Grothendieck 范畴 $\mathcal{A}$ 的满子范畴 $\mathcal{C}$ 为余局部化子范畴, 如果它关于子对象、商对象、直积与扩张均是封闭的. 等价地, 商函子 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}$ 有左伴随函子 $\mathcal{A}/\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$.

定义 2.4 如果 $M \in \mathcal{C}$ 蕴含着 M 的内射包 $E(M)$ 也属于 $\mathcal{C}$, 则称 Grothendieck 范畴 $\mathcal{A}$ 的子范畴 $\mathcal{C}$ 是稳定的.

注 2.2 (i) $\text{Comod-}C$ 的每个稳定的局部化子范畴均是 $\text{Comod-}C$ 的一个 TTF- 类 (参见文献 [20, 注 3.5.4]).

(ii) Năstăsescu 和 Torrecillas 在文献 [21] 中证明了 Grothendieck 范畴的余局部化子范畴都是局部化的.

(iii) 对 C 的任意余幂等子余代数 C' 来说, $\text{Comod-}C$ 的局部化子范畴 $\mathcal{T}_{C'}$ 是稳定的当且仅当 C' 作为右 C - 余模是内射的 (参见文献 [18, 命题 4.6]).

对偶于文献 [3, 命题 5.2], 我们给出如下猜想.

猜想 2.1 C 的余幂等子余代数与 $\text{Comod-}C$ 的 TTF- 类之间存在一一对应.

对一般余代数, 此猜想不一定成立. 但是, 对右半完备余代数, 我们给出了此猜想的证明. 首先, 如下事实可由文献 [18, 定理 4.5(ii)] 直接得到.

引理 2.1 若 C 是 K - 余代数, 则 C 的所有余幂等子余代数集与 $\text{Comod-}C$ 的所有局部化子范畴集之间存在双射.

给定 C 的余幂等子余代数 C' , 由文献 [18, 定理 4.5] 知, $\mathcal{T}_{C'} = \{M \in \text{Comod-}C \mid \rho_M(M) \subseteq M \otimes C'\}$ 是 $\text{Comod-}C$ 的局部化子范畴. 下面的结果来自于文献 [21, 命题 3.4].

引理 2.2 若 C 是右半完备余代数且 C' 是 C 的余幂等子余代数, 则 $\mathcal{T}_{C'}$ 是 $\text{Comod-}C$ 的余局部化子范畴. 因此, $\mathcal{T}_{C'}$ 是 $\text{Comod-}C$ 的双局部化 TTF- 类.

对偶于 Jans 双射 (参见文献 [7, 推论 2.2]), 我们给出右半完备余代数上的对偶 Jans 定理.

定理 2.1 (对偶 Jans 定理) 若 C 是右半完备余代数, 则 C 的余幂等子余代数与 $\text{Comod-}C$ 的 TTF- 类之间存在双射.

下面的结论涵盖了对偶 Jans 定理, 并且给出了右半完备余代数上 $\text{Comod-}C$ 的黏合等价类的一个分类.

命题 2.1 设 C 是右半完备余代数, 则如下结论相互等价:

- (i) $\text{Comod-}C$ 的黏合等价类;
- (ii) $\text{Comod-}C$ 中的 TTF- 三元组;
- (iii) C 的余幂等子余代数;
- (iv) $\text{Comod-}C$ 的双局部化 TTF- 类.

证明 因为 C 是右半完备余代数, 所以 Grothendieck 范畴 $\text{Comod-}C$ 有足够多投射和内射对象. 由文献 [3, 推论 4.4] 的对偶, 得到 $\text{Comod-}C$ 的黏合等价类与 $\text{Comod-}C$ 中的 TTF- 三元组之间存在双射, 并且 $\text{Comod-}C$ 的局部化子范畴也是 $\text{Comod-}C$ 中的 TTF- 类. 由文献 [18] 又可知, 在 $\text{Comod-}C$ 中的 TTF- 三元组集与 C 的余幂等子余代数集存在双射. 同时, 引理 2.1 保证了 C 的余幂等子余代数与 $\text{Comod-}C$ 中的 TTF- 类之间双射的存在性. $\square$

定义 2.5 右半完备余代数 C 上余模范畴 $\text{Comod-}C$ 的黏合称为是余模范畴的黏合, 如果它等价于这样的黏合, 其中所涉及的范畴均为余模范畴.

对于右半完备余代数来说, 一个自然的问题是, 余模范畴 $\text{Comod-}C$ 的任意黏合是否等价于 C 的余幂等子余代数诱导的黏合? $\text{Comod-}C$ 的形如下图:

$$\begin{array}{ccccc}
 & \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j^!} & \\
 \mathcal{T}_{C'} & \xrightarrow{\text{inc}} & \text{Comod-}C & \xrightarrow{j^*} & \text{Comod-}C/\mathcal{T}_{C'} \\
 & \xleftarrow{i^!} & & \xleftarrow{j_*} &
 \end{array} \quad (2)$$

的黏合 $\mathfrak{R}(\mathcal{T}_{C'}, \text{Comod-}C, \text{Comod-}C/\mathcal{T}_{C'})$ 称为由余幂等子余代数 C' 诱导的黏合.

定理 2.2 若 C 是右半完备余代数, 则 $\text{Comod-}C$ 的黏合 $\mathfrak{R}(\mathcal{T}_{C'}, \text{Comod-}C, \text{Comod-}C/\mathcal{T}_{C'})$ 是余模范畴的黏合当且仅当它等价于由 C 的余幂等子余代数诱导的黏合.

证明 $(\Leftarrow)$ 设 $\mathfrak{R}(\mathcal{T}_{C'}, \text{Comod-}C, \text{Comod-}C/\mathcal{T}_{C'})$ 是由右半完备余代数 C 的余幂等子余代数诱导的黏合, 即上图 (2). 首先, 对 C 的余幂等子余代数 C' , 由文献 [21] 知, 局部化子范畴 $\mathcal{T}_{C'}$ 是余模范畴. 其次, 由文献 [20] 知, 局部化子范畴的商范畴等价于余模范畴 $\text{Comod-}eCe$, 其中 e 是 C 的卷积代数 C^* 的幂等元.

$(\Rightarrow)$ 首先, 我们知道余模范畴 $\text{Comod-}C$ 同构于有理左 C^* -模范畴 $C^*\text{-Rat}$. 其次, 设 $M \in \text{Comod-}C$ 且 I 是使得 $IM = 0$ 的 C^* 的双边幂等理想. 对 $m \in M$, 记 $\rho_M(m) \doteq \sum_{(m)} m_0 \otimes m_1$, 所有的 m'_0 是域 K 上的线性无关组. 若 $f \in I$, 则 $fm = \sum m_0 f(m_1) = 0$. 所以, $f(m_1) = 0$, 即 $m_1 \in I^\perp$. 因此, $\rho_M(M) \subseteq M \otimes I^\perp$. 而 C^* 的双边幂等理想与 C 的余幂等子余代数间的双射对应保证了 $I^\perp$ 是 C 的余幂等子余代数. 故由引理 2.1 知, 存在局部化子范畴

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{I^\perp} &= \{M \in \text{Comod-}C \mid \rho_M(M) \subseteq M \otimes I^\perp\} \\
 &= \{M \in \text{Comod-}C \mid \text{cf}(M) \subseteq I^\perp\},
 \end{aligned}$$

其中 $\text{cf}(M)$ 是 M 的余系数空间. 现在考虑有理模范畴 $C^*/I\text{-Rat} = \{M \in C^*\text{-Rat} \mid IM = 0\}$. 我们主要证明局部化子范畴 $\mathcal{T}_{I^\perp}$ 等价于 $C^*/I\text{-Rat}$. 事实上, 若 $M \in \mathcal{T}_{I^\perp}$ 且 $f \in I$, 则 $f(I^\perp) = 0$. 因为 $\rho_M(M) \subseteq M \otimes I^\perp$, 所以对任意 $m \in M$, 有 $fm = 0$. 故 $IM = 0$.

反之, 若 $IM = 0$, 则由上述证明知, $\rho_M(M) \subseteq M \otimes I^{\perp\perp} = M \otimes I^\perp$. 所以, 局部化子范畴 $\mathcal{T}_{I^\perp}$ 同构于模范畴 $C^*/I\text{-Rat}$. 因此, 我们有下图:

$$\begin{array}{ccc}
 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{T}_{I^\perp} & \xrightarrow{\sim} & C^*/I\text{-Rat} \\
 \downarrow i & & \downarrow i' \\
 \text{Comod-}C & \xrightarrow{\sim} & C^*\text{-Rat},
 \end{array}$$

其中 i 和 i' 为嵌入函子. 根据文献 [3, 定理 5.3], 命题 2.1 中的 (i) 与 (iii) 的等价和 C 的余幂等子余代数与其卷积代数的幂等理想间双射对应, 我们得黏合 $\mathfrak{R}(\mathcal{T}, \text{Comod-}C, \text{Comod-}C/\mathcal{T})$ 等价于 C 的余幂等子余代数诱导的黏合. $\square$

注 2.3 有理模范畴的黏合可通过取模范畴 $C^*\text{-Mod}$ 上的限制得到, 即

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{q} & & \xleftarrow{l} & \\ C^*/I\text{-Rat} & \xrightarrow{i} & C^*\text{-Rat} & \xrightarrow{e} & eC^*e\text{-Rat}, \\ & \xleftarrow{p} & & \xleftarrow{r} & \end{array}$$

其中上图中的六函子均为模范畴上的限制函子, 即

$$i = \text{inc}|_{C^*/I\text{-Rat}}, \quad q = (C^*/I \otimes_{C^*} -)|_{C^*\text{-Rat}} \quad \text{且} \quad p = \text{Hom}_{C^*}(C^*/I, -)|_{C^*\text{-Rat}}.$$

对任意 $M \in C^*\text{-Rat}$, 有

$$I(C^*/I \otimes_{C^*} M) = Iq(M) = 0.$$

所以, $q(M) \in C^*/I\text{-Rat}$. 同时, 我们知

$$I\text{Hom}_{C^*}(C^*/I, M) = Ip(M) = 0.$$

对任意的 $\varphi \in \text{Hom}_{C^*}(C^*/I, M)$, 有 $I\varphi = 0$. 事实上, 对任意的 $a \in I \subseteq C^*$ 和 $u \in C^*/I$, 有

$$a\varphi(u) = \varphi(au) = \varphi(0) = 0.$$

故 $p(M) \in C^*/I\text{-Rat}$. 易知限制函子 i 自然成立. 限制函子也满足模范畴 $C^*\text{-Mod}$ 的黏合中的条件 (r1)、(r2) 和 (r3).

推论 2.1 设 C 和 D 是右半完备余代数. 如果 $f: C \rightarrow D$ 满余代数映射且 $\text{Ker}(f) \subseteq C'$, 其中 C' 是 C 的余幂等子余代数, 那么, 在 $\text{Comod-}D$ 中存在如下黏合:

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{i_D^*} & & \xleftarrow{j_D^!} & \\ \mathcal{T}_{f(C')} & \xrightarrow{\text{inc}_D} & \text{Comod-}D & \xrightarrow{j_D^*} & \text{Comod-}D/\mathcal{T}_{f(C')}. \\ & \xleftarrow{i_D^!} & & \xleftarrow{j_D^D} & \end{array} \quad (3)$$

证明 为了证明在 $\text{Comod-}D$ 中存在黏合 (3), 由定理 2.2, 我们只需验证 $f(C')$ 是 D 的余幂等子余代数. 事实上, 因为 $C' \wedge_C C' = \Delta^{-1}(C' \otimes C + C \otimes C')$, 所以,

$$\begin{aligned} f(C' \wedge_C C') &= f[\Delta^{-1}(C' \otimes C + C \otimes C')] \\ &= \Delta^{-1}f(C' \otimes C + C \otimes C') \\ &= \Delta^{-1}(f(C') \otimes f(C) + f(C) \otimes f(C')) \\ &= \Delta^{-1}(f(C') \otimes D + D \otimes f(C')) \\ &= f(C') \wedge_D f(C'). \end{aligned}$$

因此, $f(C') \wedge_D f(C') = f(C' \wedge_C C') = f(C')$. $\square$

3 在 Morita-Takeuchi 关系余代数上的应用

本节给出本文的主要结果在 Morita-Takeuchi 关系余代数上的一个应用.

引理 3.1 设

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C & {}^C U^D \\ {}^D V^C & D \end{pmatrix}$$

是 Morita-Takeuchi 关系余代数, 则 Γ 是右 Artin 余代数当且仅当 C 和 D 是右 Artin 的且 U^D 和 V^C 是有限余生成余模.

由文献 [22, 命题 2.2] 和 [23, 命题 3.2 和 3.3] 易证引理 3.1 成立.

引理 3.2 设 C_1 是 C 的有限维子余代数, 则 $\text{Comod-}C_1$ 中 M 的投射盖 P 也属于 $\text{Comod-}C$.

证明 我们首先证明 P 作为右 C -余模是投射的, 即只需证明函子 $\text{Com}_C(P_C, -)$ 是正合的. 对 $\text{Comod-}C$ 中的短正合列

$$0 \rightarrow A_C \rightarrow B_C \rightarrow D_C \rightarrow 0,$$

应用函子 $\text{Com}_C(P_C, -)$, 可得左正合列

$$0 \rightarrow \text{Com}_C(P_C, A_C) \rightarrow \text{Com}_C(P_C, B_C) \rightarrow \text{Com}_C(P_C, D_C).$$

又由 $P_C \cong h_{C_1}({}_C C_{1_{C_1}}, P_{C_1})$ 和文献 [14] 知,

$$\text{Com}_C(h_{C_1}({}_C C_{1_{C_1}}, P_{C_1}), M_C) \cong \text{Com}_{C_1}(P_{C_1}, M_C \square_C C_{1_{C_1}}),$$

于是, 有如下行正合交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Com}_C(P_C, A_C) & \longrightarrow & \text{Com}_C(P_C, B_C) & \longrightarrow & \text{Com}_C(P_C, D_C) \\ & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{Com}_C(h_{C_1}({}_C C_{1_{C_1}}, P_{C_1}), A_C) & \rightarrow & \text{Com}_C(h_{C_1}({}_C C_{1_{C_1}}, P_{C_1}), B_C) & \rightarrow & \text{Com}_C(h_{C_1}({}_C C_{1_{C_1}}, P_{C_1}), D_C) \\ & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Com}_{C_1}(P_{C_1}, A_C \square_C C_{1_{C_1}}) & \longrightarrow & \text{Com}_{C_1}(P_{C_1}, B_C \square_C C_{1_{C_1}}) & \longrightarrow & \text{Com}_{C_1}(P_{C_1}, D_C \square_C C_{1_{C_1}}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

再由文献 [17] 知, 每个有限维子余代数均是 C 的直和, 且内射余模的直和仍是内射的. 这是因为 C 是内射余模, 所以 ${}_C C_1$ 也是内射的, 故是余平坦的. 因此, 函子 $-\square_C C_1$ 保持正合序列. 故序列

$$0 \rightarrow A_C \square_C C_{1_{C_1}} \rightarrow B_C \square_C C_{1_{C_1}} \rightarrow D_C \square_C C_{1_{C_1}} \rightarrow 0$$

是正合的. 由于假设 P_{C_1} 是投射的, 我们得第三行是正合的. 故第一和二行也是正合的. 因此, P 作为右 C -余模是投射的.

其次, 我们将证明 (P_C, α) 是一个盖. 对任意投射右 C -余模 P' 和满态射 $\beta: P'_C \rightarrow M_C$, 假设存在如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} & P'_C & \\ h \swarrow & \downarrow \beta & \\ P_C & \xrightarrow{\alpha} & M_C, \end{array}$$

其中 $h: P'_C \rightarrow P_C$, 则存在满态射 $h^*: P'_C \square_C C_{1_{C_1}} \rightarrow P_C \square_C C_{1_{C_1}}$ 使得

$$\begin{array}{ccc} & P'_{C_1} = P'_C \square_C C_{1_{C_1}} & \\ \swarrow h^* & \downarrow \beta^* & \\ P_{C_1} = P_C \square_C C_{1_{C_1}} & \xrightarrow{\alpha^*} & M_{C_1} = M_C \square_C C_{1_{C_1}} \end{array}$$

可交换. 右正合函子 $h_{C_1}(C_{1_{C_1}}, -)$ 保证了

$$\begin{array}{ccc} & P'_C = h_{C_1}(C_{1_{C_1}}, P'_{C_1}) & \\ \swarrow h^{**} & \downarrow \beta^{**} & \\ P_C = h_{C_1}(C_{1_{C_1}}, P_{C_1}) & \xrightarrow{\alpha^{**}} & M_C = h_{C_1}(C_{1_{C_1}}, M_{C_1}) \end{array}$$

是可交换的且诱导态射 $h^{**}: h_{C_1}(C_{1_{C_1}}, P'_{C_1}) \rightarrow h_{C_1}(C_{1_{C_1}}, P_{C_1})$ 也是满态射. 然而 $P_C \cong h_{C_1}(C_{1_{C_1}}, P_{C_1})$ 且 $P'_C \cong h_{C_1}(C_{1_{C_1}}, P'_{C_1})$. 故有 $h \cong h^{**}$ 是满态射. 因此, (P_C, α) 是一个盖. 结论得证. $\square$

对 Morita-Takeuchi 关系余代数

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C & {}^C U^D \\ {}^D V^C & D \end{pmatrix},$$

余模范畴 $\text{Comod-}\Gamma$ 与余模表示范畴 $\text{Rep}(\Gamma)$ 等价, 具体可参见文献 [24]. 而且, 余模表示范畴 $\text{Rep}(\Gamma)$ 中的对象形如 (X, Y, f, g) , 其中 X 是右 C -余模且 Y 是右 D -余模,

$$f \in \text{Com}_D(Y, X \square_C U^D), \quad g \in \text{Com}_C(X, Y \square_D V^C),$$

使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \square_C U^D \\ \cong \downarrow & & \downarrow g \square \text{id}_U \\ Y \square_D D & \xrightarrow{\text{id}_Y \square \psi} & Y \square_D V \square_C U \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \square_D V \\ \cong \downarrow & & \downarrow f \square \text{id}_V \\ X \square_C C & \xrightarrow{\text{id}_X \square \phi} & X \square_C U \square_D V. \end{array}$$

特别地, X 和 Y 是有限维的当且仅当 (X, Y, f, g) 是有限维的.

定理 3.1 设

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C & {}^C U^D \\ {}^D V^C & D \end{pmatrix}$$

是 Morita-Takeuchi 关系余代数, 则 Γ 是右半完备的当且仅当 C 和 D 也是右半完备的.

证明 设 (X, Y, f, g) 是有限余生成右 Γ -余模, 则它是有限维的. 故 X 和 Y 也是有限维的. 令 $\text{cf}(X, Y, f, g)$ 是 (X, Y, f, g) 的余系数空间, 则由文献 [25] 知, $\text{cf}(X, Y, f, g)$ 是 Γ 的子余代数. 因为 (X, Y, f, g) 是有限维的, 所以, $\text{cf}(X, Y, f, g)$ 是右半完备的当且仅当 $\text{cf}(X)$ 和 $\text{cf}(Y)$ 均是右半完备的. 因此, 根据右半完备余代数的定义, (X, Y, f, g) 在 $\text{cf}(X, Y, f, g)$ 上有投射盖当且仅当 X 和 Y 在 $\text{cf}(X)$ 和 $\text{cf}(Y)$ 上均有投射盖. 作为引理 3.2 的直接结果, 我们得 (X, Y, f, g) 在 Γ 上有投射盖当且仅当 X 和 Y 在 C 和 D 上均有投射盖. 因此, Γ 是右半完备余代数当且仅当 C 和 D 也是右半完备余代数. $\square$

例 3.1 (Morita-Takeuchi 关系余代数) 设 C 和 D 是 K -余代数, ${}^C U^D$ 是 C - D -双余模, ${}^D V^C$ 是 D - C -双余模. 如果 $\phi: C \rightarrow U \square V$ 是 C - C -双余模同态且 $\psi: D \rightarrow V \square U$ 是 D - D -双余模同态且满足下面交换图:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\cong} & U \square D \\ \cong \downarrow & & \downarrow \text{id}_U \square \psi \\ C \square_C U & \xrightarrow[\phi \square \text{id}_U]{} & U \square_D V \square_C U, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\cong} & V \square_C C \\ \cong \downarrow & & \downarrow \text{id}_V \square \phi \\ D \square_D V & \xrightarrow[\psi \square \text{id}_V]{} & V \square_C U \square_D V, \end{array}$$

则由如上假设可定义 Morita-Takeuchi 关系余代数

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C & {}^C U^D \\ {}^D V^C & D \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} c & u \\ v & d \end{pmatrix} \mid c \in C, d \in D, u \in U, v \in V \right\},$$

其中余乘法 $\Delta: \Gamma \rightarrow \Gamma \otimes \Gamma$ 和余单位 $\varepsilon: \Gamma \rightarrow K$ 定义如下:

$$\begin{aligned} \Delta \left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) &= \Sigma \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \phi(c)_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \phi(c)_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Delta \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) &= \Sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \psi(d)_1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \psi(d)_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Delta \left(\begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) &= \Sigma \begin{pmatrix} u_{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & u_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & u_{(0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u_{(1)} \end{pmatrix}, \\ \Delta \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix} \right) &= \Sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_{-1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_{(0)} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v_{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \varepsilon \left(\begin{pmatrix} c & u \\ v & d \end{pmatrix} \right) &\mapsto \varepsilon_C(c) + \varepsilon_D(d). \end{aligned}$$

当 C 和 D 均是右半完备余代数时, 由如上定理, 我们通过 C 的余幂等子余代数 C' 和 D 的余幂等子余代数 D' 可得如下余模范畴的黏合:

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{i_{\Gamma_1}^*} & & \xleftarrow{j_{\Gamma_1}^!} & \\ \mathcal{T}_{\Gamma_1} & \xrightarrow{\text{inc}} & \text{Comod-}\Gamma & \xrightarrow{j_{\Gamma_1}^*} & \text{Comod-}\Gamma/\mathcal{T}_{\Gamma_1}, \\ & \xleftarrow{i_{\Gamma_1}^!} & & \xleftarrow{j_{\Gamma_1}^*} & \\ & \xleftarrow{i_{\Gamma_2}^*} & & \xleftarrow{j_{\Gamma_2}^!} & \\ \mathcal{T}_{\Gamma_2} & \xrightarrow{\text{inc}} & \text{Comod-}\Gamma & \xrightarrow{j_{\Gamma_2}^*} & \text{Comod-}\Gamma/\mathcal{T}_{\Gamma_2}, \\ & \xleftarrow{i_{\Gamma_2}^!} & & \xleftarrow{j_{\Gamma_2}^*} & \end{array}$$

其中

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} C' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}$$

是 Γ 的余幂等子余代数.

现在给出上述 Morita-Takeuchi 关系的一个特殊情形.

设 M 是拟有限右 D -余模, 则 $\text{Coend}_D(M) = \text{h}_D(M, M) =: C$ 可定义成余代数 (参见文献 [26, 第 2.3 小节]). 进一步, M 通过典范映射 $M \rightarrow \text{Coend}_D(M) \otimes M$ 可定义成 C - D -双余模. 若令 ${}_D N_C = \text{h}_D(M, D)$, $\phi: C \rightarrow M \square \text{h}_D(M, D) \cong \text{h}_D(M, M \square_D D) \cong M \square N$ 是 C - C -双余模同态, $\psi: D \rightarrow N \square_C M$ 是 D - D -双余模同态, 则

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \text{Coend}_D(M) & M \\ \text{h}_D(M, D) & D \end{pmatrix}$$

可定义为 Morita-Takeuchi 关系余代数. 类似的黏合情形也可得到.

4 在余模复形范畴上的应用

本节主要目的是将余伴随同构^[14]和余模范畴的黏合理论 (定理 2.2) 提升到余模复形范畴上.

现在考虑余模复形范畴. 记 $\mathbb{C}(\text{Comod-}C)$ 为 $\text{Comod-}C$ 上的复形范畴. 若 $\mathbb{C}(\text{Comod-}C)$ 中的对象 $\mathbf{C}^\bullet$ 形如

$$\cdots \rightarrow C^{n-1} \rightarrow C^n \rightarrow C^{n+1} \rightarrow \cdots,$$

其中 $C^i \in \text{Comod-}C$, 则 $D\mathbf{C}^\bullet =: (\mathbf{C}^\bullet)^*$ 形如

$$\cdots \rightarrow C^{-(n-1)} \rightarrow C^{-n} \rightarrow C^{-(n+1)} \rightarrow \cdots,$$

其中 $C^{-i} \in C\text{-Comod}$. 对任意的复形 $\mathbf{C}^\bullet$ 和 $\mathbf{D}^\bullet$, 记 $\text{Com}^\bullet(\mathbf{C}^\bullet, \mathbf{D}^\bullet)$ 是 $\mathbb{C}(\text{Comod-}C)$ 中的从复形 $\mathbf{C}^\bullet$ 到复形 $\mathbf{D}^\bullet$ 的复形态射形成的 Abel 群复形. $\mathbb{C}(\text{Comod-}C)$ 中的复形态射 $\mathbf{f}^\bullet: \mathbf{C}^\bullet \rightarrow \mathbf{D}^\bullet$ 称为是拟同构的, 如果 $\text{H}(\mathbf{f}^\bullet): \text{H}(\mathbf{C}^\bullet) \cong \text{H}(\mathbf{D}^\bullet)$ 是一个同构. 这类似于模范畴中的定义, 具体可参见文献 [27].

为得到余模复形范畴上的余伴随同构, 下面给出 cohom 复形和余张量积复形的定义.

$\mathbb{C}(\text{Comod-}C)$ 中的右 C -余模复形 $\mathbf{I}^\bullet$ 是内射的, 如果对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, 都有 I^n 在 $\text{Comod-}C$ 中是内射的. $\mathbb{C}(\text{Comod-}C)$ 中的右 C -余模复形 $\mathbf{X}^\bullet$ 是拟有限的, 如果对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, 都有 X^n 在 $\text{Comod-}C$ 中是拟有限的. 此时, 记 $\mathbb{C}(\text{Comod-}C^q)$ 为右 C -余模复形范畴. 更进一步, 如果定义

$$\text{h}^n(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet) = \bigoplus_{j-i=n} \text{h}_C(X^i, Y^j), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

则有如下 Abel 群复形同构:

$$D\text{h}^\bullet(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet) \cong \text{Com}_C^\bullet(\mathbf{Y}^\bullet, \mathbf{X}^\bullet).$$

事实上,

$$\begin{aligned} D\text{h}^\bullet(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet) &= \text{Com}_C^\bullet(\text{h}^\bullet(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet), K) \\ &= \text{Com}_C \left(\bigoplus_{j-i=n} \text{h}(X^i, Y^j), K \right) \\ &= \prod_{j-i=n} \text{Com}_C(\text{h}(X^i, Y^j), K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cong \prod_{j-i=n} \text{Dh}(X^i, Y^j) \\ &\cong \prod_{j-i=n} \text{Com}_C(Y^j, X^i) = \text{Com}_C^\bullet(\mathbf{Y}^\bullet, \mathbf{X}^\bullet). \end{aligned}$$

给定复形 $\mathbf{X}^\bullet \in \mathbb{C}(\text{Comod-}C)$ 和 $\mathbf{Y}^\bullet \in \mathbb{C}(C\text{-Comod})$, 我们定义余张量积复形

$$(\mathbf{X}^\bullet \square \mathbf{Y}^\bullet)^n = \prod_{p+q=n} X^p \square_C Y^q, \quad (5)$$

其中复形 $\mathbf{X}^\bullet \square \mathbf{Y}^\bullet$ 的微分是

$$\alpha(x \otimes y) = \alpha_{\mathbf{X}}(x) \otimes y + (-1)^{|\mathbf{X}|} x \otimes \alpha_{\mathbf{Y}}(y),$$

这里 $x \in X^p, y \in Y^p$ 且 $\alpha_{\mathbf{X}}$ 和 $\alpha_{\mathbf{Y}}$ 分别是复形 $\mathbf{X}^\bullet$ 和 $\mathbf{Y}^\bullet$ 的微分.

如下陈述说明余伴随同构在余模复形范畴 $\mathbb{C}(\text{Comod-}C)$ 上也成立.

命题 4.1 设余代数 C 和 D 是右半完备余代数, $\mathbf{X}^\bullet$ 是 C - D - 双余模复形且作为右 D - 复形是拟有限的, $\mathbf{Y}^\bullet \in \mathbb{C}(\text{Comod-}C)$ 且 $\mathbf{Z}^\bullet \in \mathbb{C}(\text{Comod-}D)$, 则存在如下同构:

$$\text{Com}_{\mathbb{C}(\text{Comod-}C)}^\bullet(\text{h}_D^\bullet(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Z}^\bullet), \mathbf{Y}^\bullet) \cong \text{Com}_{\mathbb{C}(\text{Comod-}D)}^\bullet(\mathbf{Z}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet \square_C \mathbf{X}^\bullet).$$

证明 由假设, C 和 D 是右半完备的且 C - D - 双余模复形 $\mathbf{X}^\bullet$ 作为右 D - 复形是拟有限的. 故考虑 Abel 群复形的 n 次分支

$$\text{Com}_{\mathbb{C}(\text{Comod-}C)}^\bullet(\text{h}_D^\bullet(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Z}^\bullet), \mathbf{Y}^\bullet) \text{ 和 } \text{Com}_{\mathbb{C}(\text{Comod-}D)}^\bullet(\mathbf{Z}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet \square_C \mathbf{X}^\bullet).$$

第 1 步 对 Abel 群复形 $\text{Com}_{\mathbb{C}(\text{Comod-}C)}^\bullet(\text{h}_D^\bullet(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Z}^\bullet), \mathbf{Y}^\bullet)$ 应用 (4), 可得

$$\begin{aligned} \text{Com}_{\mathbb{C}(\text{Comod-}C)}^n(\text{h}_D^\bullet(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Z}^\bullet), \mathbf{Y}^\bullet) &= \prod_{p \in \mathbb{Z}} \text{Com}(\text{h}_D^p(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Z}^\bullet), Y^{p+n}) \\ &= \prod_{p \in \mathbb{Z}} \text{Com}\left(\bigoplus_{t-s=p} \text{h}_D(X^s, Z^t), Y^{p+n}\right) \\ &= \prod_{p \in \mathbb{Z}} \prod_{t-s=p} \text{Com}(\text{h}_D(X^s, Z^t), Y^{p+n}) \\ &= \prod_{p \in \mathbb{Z}} \prod_{s+t=p+n} \text{Com}(\text{h}_D(X^t, Z^p), Y^s). \end{aligned}$$

第 2 步 对 Abel 群复形 $\text{Com}_{\mathbb{C}(\text{Comod-}D)}^\bullet(\mathbf{Z}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet \square_C \mathbf{X}^\bullet)$ 应用 (4), 我们计算其 n 次分支为

$$\begin{aligned} \text{Com}_{\mathbb{C}(\text{Comod-}D)}^n(\mathbf{Z}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet \square_C \mathbf{X}^\bullet) &= \prod_{p \in \mathbb{Z}} \text{Com}(Z^p, (\mathbf{Y}^\bullet \square_C \mathbf{X}^\bullet)^{p+n}) \\ &= \prod_{p \in \mathbb{Z}} \text{Com}\left(Z^p, \prod_{s+t=p+n} (Y^s \square_C X^t)\right) \\ &= \prod_{p \in \mathbb{Z}} \prod_{s+t=p+n} \text{Com}(Z^p, Y^s \square_C X^t), \end{aligned}$$

其中 $(\mathbf{Y}^\bullet \square_C \mathbf{X}^\bullet)^{p+n}$ 是余张量积复形 $\mathbf{Y}^\bullet \square_C \mathbf{X}^\bullet$ 的 $p+n$ 次分支. 通过回顾文献 [14] 中的余伴随同构, 可得

$$\text{Com}(\text{h}_D(X^t, Z^p), Y^s) \cong \text{Com}(Z^p, Y^s \square_C X^t),$$

其中 X^t 、 Y^s 和 Z^p 分别是复形 $\mathbf{X}^\bullet$ 、 $\mathbf{Y}^\bullet$ 和 $\mathbf{Z}^\bullet$ 的 t -次、 s -次和 p -次分支, 且 C - D -双余模 X^t 作为右 D -余模是拟有限的. 因此, 由上面讨论知, 存在 Abel 群复形同构

$$\mathrm{Com}_{\mathbb{C}(\mathrm{Comod}-C)}^\bullet(h_D^\bullet(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Z}^\bullet), \mathbf{Y}^\bullet) \cong \mathrm{Com}_{\mathbb{C}(\mathrm{Comod}-D)}^\bullet(\mathbf{Z}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet \square_C \mathbf{X}^\bullet).$$

证毕. □

最后, 我们证明余模范畴的黏合可以提升到余模复形范畴上.

定理 4.1 对于右半完备余代数 C , 如果 C' 是 C 的余幂等子余代数, 则存在如下余模复形范畴的黏合:

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{\widehat{i}^*} & & \xleftarrow{\widehat{j}^!} & \\ \mathbb{C}(\mathcal{T}_{C'}) & \xrightarrow{\widehat{\mathrm{inc}}} & \mathbb{C}(\mathrm{Comod}-C) & \xrightarrow{\widehat{j}^*} & \mathbb{C}(\mathrm{Comod}-C/\mathcal{T}_{C'}) \\ & \xleftarrow{\widehat{i}^!} & & \xleftarrow{\widehat{j}_*} & \end{array} \quad (6)$$

证明 由定理 2.2 的证明可以知道, $\mathcal{T}_{C'}$ 、 $\mathrm{Comod}-C$ 和 $\mathrm{Comod}-C/\mathcal{T}_{C'}$ 均是余模范畴. 因此, $\mathbb{C}(\mathcal{T}_{C'})$ 、 $\mathbb{C}(\mathrm{Comod}-C)$ 和 $\mathbb{C}(\mathrm{Comod}-C/\mathcal{T}_{C'})$ 是余模复形范畴. 假设条件 C' 是 C 的余幂等子余代数, 则存在如图 (2) 的黏合 $\mathfrak{R}(\mathcal{T}_{C'}, \mathrm{Comod}-C, \mathrm{Comod}-C/\mathcal{T}_{C'})$. 利用黏合的定义, 我们通过如下几步来验证图 (6) 也是黏合.

首先, 我们证明 (r1): $(\widehat{i}^*, \widehat{\mathrm{inc}}, \widehat{i}^!)$ 和 $(\widehat{j}^!, \widehat{j}^*, \widehat{j}_*)$ 是伴随三元组. 这里仅证 $(\widehat{i}^*, \widehat{\mathrm{inc}})$ 是伴随对. 要证 $(\widehat{i}^*, \widehat{\mathrm{inc}})$ 是伴随对, 仅需证明存在余模的 Abel 群复形同构

$$\mathrm{Com}_{\mathbb{C}(\mathcal{T}_{C'})}^\bullet(\mathbf{X}^\bullet, \widehat{i}^*(\mathbf{Y}^\bullet)) \cong \mathrm{Com}_{\mathbb{C}(\mathrm{Comod}-C)}^\bullet(\widehat{\mathrm{inc}}(\mathbf{X}^\bullet), \mathbf{Y}^\bullet).$$

先考虑 Abel 群复形 $\mathrm{Com}_{\mathbb{C}(\mathcal{T}_{C'})}^\bullet(\mathbf{X}^\bullet, \widehat{i}^*(\mathbf{Y}^\bullet))$ 的 n 次分支, 我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Com}_{\mathbb{C}(\mathcal{T}_{C'})}^n(\mathbf{X}^\bullet, \widehat{i}^*(\mathbf{Y}^\bullet)) &= \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Com}(X^p, \widehat{i}^*(\mathbf{Y}^\bullet)^{p+n}) \\ &= \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Com}_{\mathcal{T}_{C'}}(X^p, i^*(Y^{p+n})) \\ &\cong \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Com}_{\mathrm{Comod}-C}(\mathrm{inc}(X^p), Y^{p+n}) \\ &\cong \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Com}_{\mathrm{Comod}-C}(\widehat{\mathrm{inc}}(\mathbf{X}^\bullet)^p, Y^{p+n}) \\ &\cong \mathrm{Com}_{\mathbb{C}(\mathrm{Comod}-C)}(\widehat{\mathrm{inc}}(\mathbf{X}^\bullet), \mathbf{Y}^\bullet). \end{aligned}$$

因为 (i^*, inc) 是 $\mathfrak{R}(\mathcal{T}_{C'}, \mathrm{Comod}-C, \mathrm{Comod}-C/\mathcal{T}_{C'})$ 中的伴随对, 所以第三个同构是成立的. 同理可证, $(\widehat{\mathrm{inc}}, \widehat{i}^!)$ 、 $(\widehat{j}^!, \widehat{j}^*)$ 和 $(\widehat{j}^*, \widehat{j}_*)$ 也是伴随对.

其次, 我们证明 (r2): 函子 $\widehat{\mathrm{inc}}$ 、 $\widehat{j}^!$ 和 $\widehat{j}_*$ 是忠实满的. 事实上, 若 $\mathbf{M}^\bullet$ 和 $\mathbf{N}^\bullet$ 是 $\mathbb{C}(\mathcal{T}_{C'})$ 中的任意两个对象, 则有

$$\begin{aligned} \mathrm{Com}_{\mathbb{C}(\mathcal{T}_{C'})}^n(\mathbf{M}^\bullet, \mathbf{N}^\bullet) &\cong \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Com}_{\mathcal{T}_{C'}}(M^p, N^{p+n}) \\ &\cong \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Com}_{\mathrm{Comod}-C}(\mathrm{inc}(M^p), \mathrm{inc}(N^{p+n})) \\ &\cong \mathrm{Com}_{\mathbb{C}(\mathrm{Comod}-C)}^n(\widehat{\mathrm{inc}}(\mathbf{M}^\bullet)^p, \widehat{\mathrm{inc}}(\mathbf{N}^\bullet)^{p+n}). \end{aligned}$$

因为函子 inc 在 $\mathfrak{R}(\mathcal{T}_{C'}, \text{Comod-}C$ 和 $\text{Comod-}C/\mathcal{T}_{C'}$) 中是忠实满的, 所以函子 $\widehat{\text{inc}}$ 也是忠实满的. 同理可证, 函子 $\widehat{j}_!$ 和 $\widehat{j}_*$ 也是忠实满的.

最后, 我们证明 (r3): $\text{Im}(\widehat{\text{inc}}) = \text{Ker}\widehat{j}^*$. 考虑余模复形范畴中对象的 n -分支, 由模范畴的黏合的存在性知 $\text{Im}(\text{inc}) = \text{Ker}j^*$, 故等式 (r3) 成立. $\square$

当 $\text{gl.dim}(\mathcal{A}) \leq 1$ 时, Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 是遗传的. 根据文献 [8, 定理 4.1 和 4.8] 和上面的定理, 我们可得如下结果.

推论 4.1 设 C 是右半完备余代数, 则有如下余模复形范畴的维数不等式:

$$\begin{aligned} \text{gl.dim}\mathbb{C}(\text{Comod-}C) &\leq \text{gl.dim}\mathbb{C}(\mathcal{T}_{C'}) + \text{gl.dim}\mathbb{C}(\text{Comod-}C/\mathcal{T}_{C'}) \\ &\quad + \sup\{\text{id}_{\mathbb{C}(\text{Comod-}C)}\widehat{\text{inc}}(\mathbf{I}^\bullet) \mid \mathbf{I}^\bullet \in \mathbb{C}(\text{Inj-}\mathcal{T}_{C'})\}, \end{aligned}$$

其中 $\mathbb{C}(\text{Inj-}\mathcal{T}_{C'})$ 是内射余模复形范畴, 且 $\mathbb{C}(\text{Inj-}\mathcal{T}_{C'})$ 中对象的每个分支都属于 $\mathcal{T}_{C'}$.

推论 4.2 若 $\mathbb{C}(\text{Comod-}C)$ 是遗传的, 则 $\mathbb{C}(\mathcal{T}_{C'})$ 和 $\mathbb{C}(\text{Comod-}C/\mathcal{T}_{C'})$ 也是遗传的.

致谢 衷心感谢审稿人对本文提出的宝贵意见.

参考文献

- Beilinson A, Bernstein J, Deligne P. Faisceaux Pervers: Analysis and Topology on Singular Spaces. Asterisque, vol. 100. Paris: Soc Math France, 1982
- Angeleri Hügel L, Koenig S, Liu Q. Recollements and tilting objects. J Pure Appl Algebra, 2011, 215: 420–438
- Psaroudakis C, Vitória J. Recollements of module categories. Appl Categ Structures, 2014, 22: 579–593
- Chen H X, Xi C C. Good tilting modules and recollements of derived module categories. Proc Lond Math Soc (3), 2012, 104: 959–996
- Chen H X, Xi C C. Recollements of derived categories I: Exact contexts. ArXiv:1203.5168, 2014
- Han Y. Recollements and Hochschild theory. J Algebra, 2014, 397: 535–547
- Kuhn N. The generic representation theory of finite files: A survey of basic structure. In: Infinite Length Modules (Bielefeld 1998). Basel: Birkhauser, 2000, 193–212
- Psaroudakis C. Homological theory of recollements of abelian categories. J Algebra, 2014, 398: 63–110
- Zhang P. Gorenstein-projective modules and symmetric recollements. J Algebra, 2013, 388: 65–80
- Jans J. Some aspects of torsion. Pacific J Math, 1965, 15: 1249–1259
- Chin W, Montgomery S. Basic coalgebras. AMS/IP Stud Adv Math, 1997, 4: 41–47
- Lin B I. Semiperfect coalgebras. J Algebra, 1977, 49: 357–373
- Doi Y. Homological coalgebra. J Math Soc Japan, 1981, 33: 31–50
- Takeuchi M. Morita theorem for categories of comodules. J Fac Sci Uni Tokyo, 1977, 24: 629–644
- Chin W, Kleiner M, Quinn D. Almost split sequences for comodules. J Algebra, 2002, 249: 1–19
- Woodcock D. Some categorical remarks on the representation theory of coalgebras. Comm Algebra, 1997, 25: 2775–2794
- Abe E. Hopf Algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 1977
- Năstăsescu C, Torrecillas B. Torsion theories for coalgebras. J Pure Appl Algebra, 1994, 97: 203–220
- Gabriel P. Des categories abéliennes. Bull Soc Math France, 1962, 90: 323–448
- Navarro G. Some remarks on localization in coalgebras. Comm Algebra, 2008, 36: 3447–3466
- Năstăsescu C, Torrecillas B. Colocalization on Grothendieck categories with applications to coalgebras. J Algebra, 1996, 185: 108–124
- Tang G, Li C, Zhou Y. Study of Morita contexts. Comm Algebra, 2014, 42: 1668–1681
- Iovanov M C. Triangular matrix coalgebras and applications. Linear Multilinear Algebra, 2015, 63: 46–67
- 付雪荣, 姚海楼. Morita-Takeuchi 关系余代数上不可分解内射余模. 北京工业大学学报, 2015, 9: 1430–1436
- Cuadra J, Gómez-Torrecillas J. Serial coalgebras. J Pure Appl Algebra, 2004, 189: 89–107
- Wang M Y. Some co-hom functors and classical tilting comodules. Southeast Asian Bull Math, 1998, 22: 455–468
- 章璞. 三角范畴与导出范畴. 北京: 科学出版社, 2015

Recollements of comodule categories over semi-perfect coalgebras

Xuerong Fu & Hailou Yao

Abstract In this paper, we study the recollements of comodule categories over semi-perfect coalgebras. We prove that a recollement whose terms are comodule categories is equivalent to one induced by a co-idempotent subcoalgebra of semi-perfect coalgebras. Furthermore, we present two applications to the Morita-Takeuchi context coalgebras and comodule complex categories in this paper.

Keywords recollement, TTF (Torsion-Torsion free)-triple, co-idempotent subcoalgebra, comodule complex category

MSC(2010) 16T15

doi: 10.1360/SCM-2016-0764