涉及超级亚纯函数的一个 Picard 型定理

杨拍^{1*}, 牛培彦², 庞学诚³

1. 成都信息工程大学应用数学学院, 成都 610226;

2. 安徽科技学院数学系, 滁州 233100;

3. 华东师范大学数学系, 上海 200062

E-mail: yangpai2009@foxmail.com, niupeiyang1983@126.com, xcpang@math.ecnu.edu.cn

收稿日期: 2015-09-22; 接受日期: 2016-01-15; 网络出版日期: 2016-08-03; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371139) 和中国博士后科学基金 (批准号: 2015M571726) 资助项目

摘要 设 $f(z)$ 为复平面内极点重级至少为 2、零点重级至少为 3 的亚纯函数, $\alpha(z) := \beta(z) \exp(\gamma(z))$, 其中 $\beta(z)$ 为非常数的椭圆函数, $\gamma(z)$ 为整函数. 本文证明, 如果 $\sigma(f(z)) > \sigma(\alpha(z))$, 那么方程 $f'(z) = \alpha(z)$ 在复平面内有无穷多个根.

关键词 亚纯函数 特征函数 Picard 型定理**MSC (2010) 主题分类** 30D35, 30D45

1 引言

1959 年, Hayman^[1] 证明了下述结果.

定理 A 设 $f(z)$ 为复平面内的超越亚纯函数, α 为有穷非零复数. 如果对于任意的 $z \in \mathbb{C}$, $f(z) \neq 0$, 那么方程 $f'(z) = \alpha$ 在复平面内有无穷多个根.

设 α 和 f 为两个亚纯函数, 如果当 $r \rightarrow \infty$ 时 $T(r, \alpha) = o\{T(r, f)\}$, 可能除去 r 的一个线性测度有限的集合, 则称 α 为 f 的一个小函数. 我们自然地要问: 如果用 $f(z)$ 的小函数 $\alpha(z)$ 替换定理 A 中的有穷非零复数 α , 相应的结论是否依然成立?

2008 年, Pang 等^[2] 推广了定理 A, 得到如下结果.

定理 B 设 $f(z)$ 为复平面内的超越亚纯函数, $\alpha(z) (\neq 0)$ 为有理函数. 如果 $f(z)$ 零点重级至少为 2 (至多有限个零点例外), 那么方程 $f'(z) = \alpha(z)$ 在复平面内有无穷多个根.

2008 年, Liu 等^[3] 得到了如下结果.

定理 C 设 $k \geq 2$ 为整数, $f(z)$ 为复平面内的无穷级亚纯函数. 记 $\alpha(z) := P(z) \exp(Q(z))$, 其中 $P(z) (\neq 0)$ 和 $Q(z)$ 均为多项式. 如果

(1) $f(z)$ 的极点重级至少为 2 (至多有限个极点例外),(2) $f(z)$ 的零点重级至少为 $k+1$ (至多有限个零点例外),那么方程 $f^{(k)}(z) = \alpha(z)$ 在复平面内有无穷多个根.

英文引用格式: Yang P, Niu P Y, Pang X C. A Picard type theorem concerning meromorphic functions of hyper-order (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 357–370, doi: 10.1360/012016-16

显然, 定理 B 和 C 中的小函数 $\alpha(z)$ 的极点和零点的个数均有限. 我们感兴趣的问题是, 对于 $\alpha(z)$ 有无限个零点和极点的情形, 相应的结论是否依然成立? 本文证明了如下结果.

定理 1.1 设 $f(z)$ 为复平面内的亚纯函数, 其极点重级至少为 2 (至多有限个极点例外), 零点重级至少为 3 (至多有限个零点例外). 记 $\alpha(z) := \beta(z) \exp(\gamma(z))$, 其中 $\beta(z)$ 为非常数的椭圆函数, $\gamma(z)$ 为整函数. 如果 $\sigma(f(z)) > \sigma(\alpha(z))$, 那么方程 $f'(z) = \alpha(z)$ 在复平面内有无穷多个根.

注 1.1 我们视 $f(z)$ 和 $\alpha(z)$ 公共的极点为方程 $f'(z) = \alpha(z)$ 的根.

2 符号和基本引理

$\mathbb{C}$ 表示复平面, D 表示复平面内的区域. 设 $z_0 \in \mathbb{C}$ 及 $r > 0$, 记 $\Delta(z_0, r) := \{z \mid |z - z_0| < r\}$, $\Delta := \Delta(0, 1)$, $\Delta'(z_0, r) := \{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ 和 $\Delta' := \Delta'(0, 1)$. $n(r, f)$ 表示亚纯函数 f 在 $\Delta(0, r)$ 内的极点个数 (计算重数). 在区域 D 内, $f_n \xrightarrow{\Delta} f$ 表示 $\{f_n\}$ 在 D 内按球距内闭一致收敛到 f , 其中 f 为 D 内的亚纯函数或者 $f \equiv \infty$. 在区域 D 内, $f_n \Rightarrow f$ 表示 $\{f_n\}$ 在 D 内在通常意义下 (按 Euclid 距离) 内闭一致收敛到 f , 其中 f 为 D 内的亚纯函数. 设 f 为区域 D 内的亚纯函数, 记

$$f^\#(z) := \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}, \quad S(D, f) := \frac{1}{\pi} \iint_D [f^\#(z)]^2 dx dy, \quad S(r, f) := S(\Delta(0, r), f). \quad (2.1)$$

Ahlfors-Shimizu 特征函数定义为 $T_0(r, f) := \int_0^r \frac{S(t, f)}{t} dt$, $T(r, f)$ 表示 Nevanlinna 特征函数. 因为 $T(r, f) - T_0(r, f)$ 是变量 r 的有界函数, 所以, $T_0(r, f)$ 和 $T(r, f)$ 在特定情形下可以相互替换. 亚纯函数 f 的级 $\rho(f)$ 和超级 $\sigma(f)$ 分别定义为

$$\rho(f) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} \quad \text{和} \quad \sigma(f) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r}.$$

引理 2.1 ^[4] 设 m 为正整数, R 为有理函数. 如果对于任意的 $z \in \mathbb{C}$, $R'(z) \neq z^{-m}$, 那么 $R(z)$ 是一个常数函数.

引理 2.2 设 f 为复平面内非常数的有穷级亚纯函数, 零点重级至少为 2. 如果对于任意的 $z \in \mathbb{C}$, $f'(z) \neq 1$, 那么 $f(z) = \frac{(z-a)^2}{z-b}$, 其中 a 和 b ($b \neq a$) 是常数.

注 2.1 根据文献 [5] 中的引理 6 (取 $j = 1, k = 2$) 和引理 8 (取 $k = 1$), 引理 2.2 成立.

引理 2.3 ^[6] 设 m 为正整数, R 为有理函数. 如果 R 的极点重级至少为 2 且零点重级至少为 3, 那么方程 $R'(z) = z^m$ 在复平面内至少有一个根.

引理 2.4 ^[7] 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数, $\mathcal{F}$ 中的每个函数的零点的重级至少是 $k+1$. 如果 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 \in D$ 处不正规, 那么对每一个 α ($0 \leq \alpha \leq k$), 都存在

- (1) 点列 $z_n \in D, z_n \rightarrow z_0$;
- (2) 函数列 $f_n \in \mathcal{F}$;
- (3) 正数列 $\rho_n \rightarrow 0$,

使得在复平面内 $g_n(\zeta) = \rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \zeta) \xrightarrow{\Delta} g(\zeta)$, 其中 g 为复平面内非常数的亚纯函数, 并且 $g^\#(\zeta) \leq g^\#(0) = k+1$. 此外, g 的级至多为 2.

引理 2.5 ^[3] 设 $\{f_n\}$ 是单位圆盘 Δ 内的一族亚纯函数, $\{f_n\}$ 中的每个函数的零点重级至少是 $k+1$. 如果 $a_n \rightarrow 0$ 和 $f_n^\#(a_n) \rightarrow \infty$, 那么存在

- (1) 点列 $z_n \rightarrow 0$;
- (2) $\{f_n\}$ 的一个子列, 仍然记作 $\{f_n\}$;

(3) 正数列 $\rho_n \leq \frac{M}{\sqrt[k+1]{f_n^\#(a_n)}}$, 其中 M 是一个与 n 无关的常数,

使得在复平面内 $g_n(\zeta) = \rho_n^{-k} f_n(z_n + \rho_n \zeta) \xrightarrow{\lambda} g(\zeta)$, 其中 g 为复平面内非常数的亚纯函数, 并且 $g^\#(\zeta) \leq g^\#(0) = k+1$. 此外, g 的级至多为 2.

引理 2.6 ^[8] 设 f 为单位圆盘 Δ 内的亚纯函数, a_1 、 a_2 和 a_3 为三个判别的有穷复数. 如果 $\prod_{i=1}^3 (f(z) - a_i)$ 在 Δ 内的零点个数 $\leq n$, 其中每个零点仅计算一次, 那么,

$$S(r, f) \leq n + \frac{A}{1-r}, \quad 0 \leq r < 1,$$

其中 $A > 0$ 是仅与 a_1 、 a_2 和 a_3 有关的常数.

引理 2.7 ^[9] 设 f 为复平面内的亚纯函数, α 为有穷非零复数, 则

$$(\alpha f)^\#(z) \leq \max \left\{ |\alpha|, \frac{1}{|\alpha|} \right\} f^\#(z).$$

3 辅助引理

引理 3.1 设 f 为复平面内非常数的亚纯函数. 如果 f 的极点和零点的重级均至少为 2, 那么对于任意有穷非零复数 α , 方程 $f' = \alpha$ 在复平面内至少有一个根.

证明 假设存在有穷非零复数 α 使得方程 $f' = \alpha$ 在复平面内没有根. 根据定理 B 和引理 2.2, $f(z) = \frac{\alpha(z-a)^2}{z-b}$, 其中 a 和 b ($b \neq a$) 是常数, 这与 f 的极点重级至少为 2 矛盾. $\square$

引理 3.2 设 $f(z)$ 为复平面内超级 $\sigma(f) > 0$ 的亚纯函数, $\varepsilon \in (0, \sigma(f))$ 为任意给定的常数, 则存在点列 $a_n \rightarrow \infty$ 和正数列 $\delta_n \rightarrow 0$ 使得

$$S(\Delta(a_n, \delta_n), f) \geq \exp(|a_n|^{\sigma(f)-\varepsilon}), \quad f^\#(a_n) \geq \exp(|a_n|^{\sigma(f)-\varepsilon}), \quad \delta_n \leq \exp(-|a_n|^{\sigma(f)-\varepsilon}), \quad (3.1)$$

其中点列 $\{a_n\}$ 和正数列 $\{\delta_n\}$ 均与常数 ε 有关.

证明 事实上, 我们只需要证明当 n 充分大以后, (3.1) 成立 (然后只需选择子列并重新编号).

我们断言: 存在正数列 $R_n \rightarrow \infty$ 使得当 n 充分大以后,

$$S(R_n, f) \geq \exp(R_n^{\sigma(f)-\varepsilon/3}). \quad (3.2)$$

否则, 存在 $R_0 > 1$ 使得当 $r \geq R_0$ 时 $S(r, f) < \exp(r^{\sigma(f)-\varepsilon/3})$. 于是, 当 $r \geq R_0$ 时,

$$\begin{aligned} T(r, f) &= \int_0^r \frac{S(t, f)}{t} dt \leq \int_0^{R_0} \frac{S(t, f)}{t} dt + \int_{R_0}^r \frac{\exp(t^{\sigma(f)-\varepsilon/3})}{t} dt \\ &\leq \int_0^{R_0} \frac{S(t, f)}{t} dt + \frac{1}{\sigma(f) - \varepsilon/3} \int_{R_0}^r \exp(t^{\sigma(f)-\varepsilon/3}) d(t^{\sigma(f)-\varepsilon/3}) \\ &= \int_0^{R_0} \frac{S(t, f)}{t} dt + \frac{\exp(r^{\sigma(f)-\varepsilon/3}) - \exp(R_0^{\sigma(f)-\varepsilon/3})}{\sigma(f) - \varepsilon/3}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

由 (3.3) 得

$$\sigma(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} \leq \sigma(f) - \frac{\varepsilon}{3},$$

这显然是不可能的.

记 $\mathcal{A}_n := \{z \mid -R_n \leq \operatorname{Re} z \leq R_n, -R_n \leq \operatorname{Im} z \leq R_n\}$ 和 $\lambda_n := \operatorname{INT}(2R_n \exp(R_n^{\sigma(f)-\varepsilon/2}))$, 其中 INT 是取整函数. 我们用平行于实轴和虚轴的直线将正方形 $\mathcal{A}_n$ 划分为 λ_n^2 个全等的正方形 $\Omega_{i,j}^n$, 其中 $i = 1, 2, \dots, \lambda_n, j = 1, 2, \dots, \lambda_n$. 假设

$$S(\Omega_{i,j}^n, f) = \max\{S(\Omega_{i,j}^n, f) \mid i = 1, 2, \dots, \lambda_n, j = 1, 2, \dots, \lambda_n\}, \quad (3.4)$$

$$f^\#(a_n) = \max\{f^\#(z) \mid z \in \Omega_{i,j}^n\}. \quad (3.5)$$

我们断言:

(1) $\Omega_{i,j}^n$ 的边长 L_n 满足 $L_n = (1 + o(1)) \exp(-R_n^{\sigma(f)-\varepsilon/2})$;

(2) 当 n 充分大以后, $S(\Omega_{i,j}^n, f) \geq \exp(R_n^{\sigma(f)-\varepsilon/2})$;

(3) 当 n 充分大以后, $f^\#(a_n) \geq \exp(R_n^{\sigma(f)-\varepsilon/2})$.

显然, $L_n = \frac{2R_n}{\lambda_n} = (1 + o(1)) \exp(-R_n^{\sigma(f)-\varepsilon/2})$, (1) 成立. 由 $S(R_n, f) \leq S(\mathcal{A}_n, f) = \sum_{i=1}^{\lambda_n} \sum_{j=1}^{\lambda_n} S(\Omega_{i,j}^n, f)$, 结合 (3.2) 和 (3.4) 知, 当 n 充分大以后,

$$S(\Omega_{i,j}^n, f) \geq \frac{S(\mathcal{A}_n, f)}{\lambda_n^2} \geq \frac{S(R_n, f)}{\lambda_n^2} \geq \frac{\exp(R_n^{\sigma(f)-\varepsilon/3})}{[2R_n \exp(R_n^{\sigma(f)-\varepsilon/2})]^2} > \exp(R_n^{\sigma(f)-\varepsilon/2}),$$

即 (2) 成立. 显然, $\pi S(\Omega_{i,j}^n, f) = \iint_{\Omega_{i,j}^n} [f^\#(z)]^2 dx dy$, 由 (2.1)、(3.5) 和积分中值定理知, 当 n 充分大以后,

$$f^\#(a_n) \geq \sqrt{\frac{\pi S(\Omega_{i,j}^n, f)}{L_n^2}} \geq \exp(R_n^{\sigma(f)-\varepsilon/2}). \quad (3.6)$$

由 (3) 不难看出, $a_n \rightarrow \infty$. 记 $\delta_n := 2L_n$. 显然, $\Omega_{i,j}^n \subset \Delta(a_n, \delta_n)$, $|a_n| < 2R_n$. 由 (1) 和 (2) 知, 当 n 充分大以后, $S(\Delta(a_n, \delta_n), f) \geq \exp(|a_n|^{\sigma(f)-\varepsilon})$, $\delta_n \leq \exp(-|a_n|^{\sigma(f)-\varepsilon})$. $\square$

引理 3.3 设 r, R 和 ρ 为三个正数且满足 $r < R < \rho$, $f(z)$ 和 $g(z)$ 为 $\Delta(0, \rho)$ 内的两个亚纯函数, 则

$$S(r, fg) \leq S(R, f) + S(R, g) + \frac{1}{2\pi} \left(\log \frac{R}{r} \right)^{-1} \int_0^{2\pi} \log(|g(re^{i\theta})| + |g(re^{i\theta})|^{-1}) d\theta.$$

证明 为了方便起见, 我们用符号 $\int_{\Gamma_t} F d\theta$ 表示定积分 $\int_0^{2\pi} F(te^{i\theta}) d\theta$, 其中 $\Gamma_t := \{z \mid |z| = t\}$.

根据 Ahlfors-Shimizu 形式的第一基本定理 (参见文献 [10, 第 12 页]), 有

$$\int_r^R \frac{S(t, fg)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\Gamma_R} \log \sqrt{1 + |fg|^2} d\theta - \int_{\Gamma_r} \log \sqrt{1 + |fg|^2} d\theta \right] + \int_r^R \frac{n(t, fg)}{t} dt. \quad (3.7)$$

显然有

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} \log \sqrt{1 + |fg|^2} d\theta &\leq \int_{\Gamma_R} \log \sqrt{1 + |f|^2} d\theta + \int_{\Gamma_R} \log \sqrt{1 + |g|^2} d\theta, \\ \int_{\Gamma_r} \log \sqrt{1 + |f|^2} d\theta &= \int_{\Gamma_r} \log \sqrt{1 + \left| \frac{fg}{g} \right|^2} d\theta \leq \int_{\Gamma_r} \log \sqrt{1 + |fg|^2} d\theta + \int_{\Gamma_r} \log \sqrt{1 + |g|^{-2}} d\theta. \end{aligned} \quad (3.8)$$

由 (3.7) 和 (3.8) 知,

$$\begin{aligned} \int_r^R \frac{S(t, fg)}{t} dt &\leq \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\Gamma_R} \log \sqrt{1 + |f|^2} d\theta - \int_{\Gamma_r} \log \sqrt{1 + |f|^2} d\theta \right] + \int_r^R \frac{n(t, f)}{t} dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\Gamma_R} \log \sqrt{1 + |g|^2} d\theta - \int_{\Gamma_r} \log \sqrt{1 + |g|^2} d\theta \right] + \int_r^R \frac{n(t, g)}{t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\Gamma_r} \log \sqrt{1+|g|^2} d\theta + \int_{\Gamma_r} \log \sqrt{1+|g|^{-2}} d\theta \right] \\
& = \int_r^R \frac{S(t,f)}{t} dt + \int_r^R \frac{S(t,g)}{t} dt + \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\Gamma_r} \log(|g| + |g|^{-1}) d\theta \right]. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

显然有

$$\begin{aligned}
& \int_r^R \frac{S(t,fg)}{t} dt \geq \left(\log \frac{R}{r} \right) S(r,fg), \\
& \int_r^R \frac{S(t,f)}{t} dt + \int_r^R \frac{S(t,g)}{t} dt \leq \left(\log \frac{R}{r} \right) (S(R,f) + S(R,g)). \quad (3.10)
\end{aligned}$$

由 (3.9) 和 (3.10) 知, 引理 3.3 成立. $\square$

引理 3.4 在定理 1.1 的假设条件下, 假设方程 $f'(z) = \alpha(z)$ 在复平面内根的个数有限; $\beta(z) = z^m \hat{\beta}(z)$, 其中 m 为非零整数; $\hat{\beta}(0) = 1$; 在 Δ 内, $\hat{\beta}(z) \neq 0, \infty$. 设 $a_n \rightarrow \infty$ 和 $b_n \rightarrow 0$ 为复数列且满足 $\beta(z + a_n - b_n) = \beta(z)$, t_n 为正数列且满足 $t_n \leq \exp(-|a_n|^\lambda)$, 其中 $\lambda \in (\sigma(\alpha), \sigma(f))$ 为常数. 记

$$T_n(\zeta) := \frac{f(a_n - b_n + t_n \zeta)}{t_n^{m+1} \exp(\gamma(a_n - b_n + t_n \zeta))},$$

则 $\{T_n(\zeta)\}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内正规.

证明 假设结论不成立, 即存在一点 $\zeta_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 使得 $\{T_n(\zeta)\}$ 在 ζ_0 不正规. 根据引理 2.4 (取 $\alpha = 1$), 存在点列 $\zeta_n \rightarrow \zeta_0$, $\{T_n\}$ 的一个子列 (仍然记作 $\{T_n\}$), 及正数列 $\rho_n \rightarrow 0$ 使得在复平面内,

$$G_n(\xi) = \frac{T_n(\zeta_n + \rho_n \xi)}{\rho_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(\xi), \quad (3.11)$$

其中 G 为复平面内非常数的亚纯函数, 极点和零点重级均至少为 2. 通过简单的计算可得

$$T'_n(\zeta) = \frac{f'(a_n - b_n + t_n \zeta)}{t_n^m \exp(\gamma(a_n - b_n + t_n \zeta))} - t_n \gamma'(a_n - b_n + t_n \zeta) \frac{f(a_n - b_n + t_n \zeta)}{t_n^{m+1} \exp(\gamma(a_n - b_n + t_n \zeta))},$$

从而有

$$\frac{f'(a_n - b_n + t_n \zeta)}{t_n^m \exp(\gamma(a_n - b_n + t_n \zeta))} = T'_n(\zeta) + t_n \gamma'_n(t_n \zeta) T_n(\zeta). \quad (3.12)$$

将 $\zeta = \zeta_n + \rho_n \xi$ 代入 (3.12) 得

$$\frac{f'(a_n - b_n + t_n \zeta_n + t_n \rho_n \xi)}{t_n^m \exp(\gamma(a_n - b_n + t_n \zeta_n + t_n \rho_n \xi))} = G'_n(\xi) + t_n \rho_n \gamma'(a_n - b_n + t_n \zeta_n + t_n \rho_n \xi) G_n(\xi). \quad (3.13)$$

对于任意给定的 $R > 0$, 当 n 充分大以后, 在 $\Delta(0, R)$ 内, 有

$$\begin{aligned}
|\gamma'(a_n - b_n + t_n \zeta_n + t_n \rho_n \xi)| & \leq M(|2a_n|, \gamma') \leq \exp(|2a_n|^{\rho(\gamma) + (\lambda - \sigma(\alpha))/3}) \\
& \leq \exp(|a_n|^{\sigma(\alpha) + (\lambda - \sigma(\alpha))/2}) = \exp(|a_n|^{(\lambda + \sigma(\alpha))/2}).
\end{aligned}$$

于是, 在复平面内,

$$t_n \gamma'(a_n - b_n + t_n \zeta_n + t_n \rho_n \xi) \Rightarrow 0. \quad (3.14)$$

记

$$U_n(\xi) := \frac{f'(a_n - b_n + t_n \zeta_n + t_n \rho_n \xi) - \alpha(a_n - b_n + t_n \zeta_n + t_n \rho_n \xi)}{t_n^m \exp(\gamma(a_n - b_n + t_n \zeta_n + t_n \rho_n \xi))}$$

$$= \frac{f'(a_n - b_n + t_n \zeta_n + t_n \rho_n \xi)}{t_n^m \exp(\gamma(a_n - b_n + t_n \zeta_n + t_n \rho_n \xi))} - \frac{\beta(t_n \zeta_n + t_n \rho_n \xi)}{t_n^m}. \quad (3.15)$$

显然, 在复平面内,

$$\frac{\beta(t_n \zeta_n + t_n \rho_n \xi)}{t_n^m} \Rightarrow c = \zeta_0^m. \quad (3.16)$$

由 (3.11) 和 (3.13)–(3.16) 知, 在 $\mathbb{C} \setminus G^{-1}(\infty)$ 内, $U_n(\zeta) \Rightarrow G'(\zeta) - c$. 由引理的假设条件和 (3.15) 不难看出, 对于任意给定的 $R > 0$, 当 n 充分大以后, 在 $\Delta(0, R)$ 内, $U_n(\xi) \neq 0$. 再结合 Hurwitz 定理知, 在复平面内, 或者 $G'(\zeta) - c \equiv 0$ 或者 $G'(\zeta) - c \neq 0$, 这与引理 3.1 矛盾. $\square$

4 定理 1.1 的证明

假设结论不成立, 即方程 $f'(z) = \alpha(z)$ 在复平面内根的个数有限. 在下文中, $\varepsilon \in (0, (\sigma(f) - \sigma(\alpha))/8)$ 表示一个给定的常数.

由定理 1.1 的假设条件知, 当 $|z|$ 充分大以后,

$$f'(z) \neq \alpha(z), \quad \frac{f'(z)}{\alpha(z)} \neq 1. \quad (4.1)$$

记 $F(z) := \frac{f(z)}{\alpha(z)}$. 显然, $\sigma(F) = \sigma(f)$. 因为 $\alpha(z) = \beta(z) \exp(\gamma(z))$, 所以,

$$\sigma(F) = \sigma(f) > \sigma(\alpha) \geq \sigma(\exp(\gamma)) = \rho(\gamma).$$

通过简单的计算可得

$$\frac{f'(z)}{\alpha(z)} = F'(z) + F(z) \left(\frac{\beta'(z)}{\beta(z)} + \gamma'(z) \right). \quad (4.2)$$

根据引理 3.2, 存在点列 $a_n \rightarrow \infty$ 和正数列 $\delta_n \rightarrow 0$ 使得

$$S(\Delta(a_n, \delta_n), F) \geq \exp(|a_n|^{\sigma(f)-\varepsilon}), \quad F^\#(a_n) \geq \exp(|a_n|^{\sigma(f)-\varepsilon}), \quad \delta_n \leq \exp(-|a_n|^{\sigma(f)-\varepsilon}). \quad (4.3)$$

设 ω_1 和 ω_2 为椭圆函数 $\beta(z)$ 的两个基本周期, $\mathfrak{P}$ 为椭圆函数 $\beta(z)$ 的一个基本周期四边形. 显然存在两个整数 i_n 和 j_n 使得 $b_n \in \mathfrak{P}$, 其中 $b_n = a_n - i_n \omega_1 - j_n \omega_2$. 不妨假设 $b_n \rightarrow b^*$ (否则, 选取子列并重新编号).

不失一般性, 不妨假设 $b^* = 0$, $\Delta \subset \mathfrak{P}$, $\beta(z) = z^m \hat{\beta}(z)$, 其中 m 为整数, $\hat{\beta}(0) = 1$, 在 Δ 内, $\hat{\beta}(z) \neq 0, \infty$. 为了方便起见, 记

$$F_n(z) := F(a_n - b_n + z), \quad \text{其中 } z \in \Delta, \quad (4.4)$$

$$f_n(z) := f(a_n - b_n + z), \quad \alpha_n(z) := \alpha(a_n - b_n + z), \quad \gamma_n(z) := \gamma(a_n - b_n + z), \quad \text{其中 } z \in \Delta. \quad (4.5)$$

我们断言:

(a1) 当 n 充分大以后, 在 Δ 内, $f'_n(z) \neq \alpha_n(z) = \beta(z) \exp(\gamma_n(z))$;

(a2) 当 n 充分大以后, $S(\Delta(b_n, \delta_n), F_n) \geq \exp(|a_n|^{\sigma(f)-\varepsilon})$ 和 $F_n^\#(b_n) \geq \exp(|a_n|^{\sigma(f)-\varepsilon})$;

(a3) 当 n 充分大以后, 在 Δ 内, $1 \neq \frac{f'_n(z)}{\alpha_n(z)} = F'_n(z) + F_n(z) \left(\frac{\beta'(z)}{\beta(z)} + \gamma'_n(z) \right)$.

由 (4.1) 和 (4.5) 知 (a1) 成立. 显然, $S(\Delta(b_n, \delta_n), F_n) = S(\Delta(a_n, \delta_n), F)$, $F_n^\#(b_n) = F^\#(a_n)$, 结合 (4.3) 知 (a2) 成立. 将 $z = a_n - b_n + z$ 代入 (4.2), 结合 (4.1) 和 (4.4) 知 (a3) 成立.

我们断言: $\beta(0) = 0$ 或 $\beta(0) = \infty$. 否则, 假设 $\beta(0) \neq 0, \infty$. 显然, 当 n 充分大以后, 在 Δ 内, F_n 的极点和零点重级均至少为 2. 由 (a2) 和 Marty 定则, $\{F_n\}$ 在点 0 不正规. 根据引理 2.5 (取 $k = 1$), 存在点列 $z_n \rightarrow 0$, $\{F_n\}$ 的一个子列 (仍然记作 $\{F_n\}$), 及正数列 $\rho_n \leq \frac{M}{\sqrt{F_n^\#(b_n)}}$ (其中 M 是一个与 n 无关的常数) 使得在复平面内,

$$G_n(\zeta) = \rho_n^{-1} F_n(z_n + \rho_n \zeta) \xrightarrow{\lambda} G(\zeta), \quad (4.6)$$

其中 G 为复平面内非常数的亚纯函数, 极点和零点重级均至少为 2. 由 (a2) 知, 当 n 充分大以后,

$$\rho_n \leq M \exp\left(-\frac{1}{2}|a_n|^{\sigma(f)-\varepsilon}\right) \leq \exp(-|a_n|^{\sigma(f)-2\varepsilon}). \quad (4.7)$$

对于任意给定的 $R > 0$, 当 n 充分大以后, 在 $\Delta(0, R)$ 内,

$$|\gamma'(a_n - b_n + z_n + \rho_n \zeta)| \leq M(|2a_n|, \gamma') \leq \exp(|2a_n|^{\rho(\gamma)+\varepsilon}) \leq \exp(|a_n|^{\sigma(\alpha)+2\varepsilon}). \quad (4.8)$$

由 (4.7) 和 (4.8) 知, 在复平面内,

$$\rho_n \gamma'(a_n - b_n + z_n + \rho_n \zeta) \Rightarrow 0. \quad (4.9)$$

显然, 在复平面内, $\frac{\beta'(z_n + \rho_n \zeta)}{\beta(z_n + \rho_n \zeta)} \Rightarrow \frac{\beta'(0)}{\beta(0)}$, 从而在复平面内,

$$\rho_n \frac{\beta'(z_n + \rho_n \zeta)}{\beta(z_n + \rho_n \zeta)} \Rightarrow 0. \quad (4.10)$$

将 $z = z_n + \rho_n \zeta$ 代入 (a3) 得

$$1 \neq \frac{f'_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\alpha_n(z_n + \rho_n \zeta)} = G'_n(\zeta) + \left[\rho_n \frac{\beta'(z_n + \rho_n \zeta)}{\beta(z_n + \rho_n \zeta)} + \rho_n \gamma'(a_n - b_n + z_n + \rho_n \zeta) \right] G_n(\zeta). \quad (4.11)$$

由 (4.9)–(4.11) 知, 在 $\mathbb{C} \setminus G^{-1}(\infty)$ 内,

$$1 \neq \frac{f'_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\alpha_n(z_n + \rho_n \zeta)} \Rightarrow G'(\zeta). \quad (4.12)$$

根据 Hurwitz 定理, 在复平面内, 或者 $G'(\zeta) \equiv 1$ 或者 $G'(\zeta) \neq 1$, 这与引理 3.1 矛盾.

下一步, 我们讨论 $\beta(0) = 0$ 和 $\beta(0) = \infty$ 的情形.

我们断言: 当 n 充分大以后, $b_n \leq \exp(-|a_n|^{\sigma(f)-3\varepsilon})$. 否则, 选取 $\{b_n\}$ 的子列并重新编号使得对所有的自然数 n 均有 $b_n > \exp(-|a_n|^{\sigma(f)-3\varepsilon})$. 记

$$\eta_n := \exp(-|a_n|^{\sigma(f)-2\varepsilon}) \quad \text{和} \quad B_n(z) := \frac{F(a_n + \eta_n z)}{\eta_n} = \frac{F_n(b_n + \eta_n z)}{\eta_n}. \quad (4.13)$$

显然, $\eta_n/b_n \rightarrow 0$. 于是, 对于任意给定的 $R > 0$, 当 n 充分大以后,

$$b_n + \eta_n z \in \Delta, \quad b_n + \eta_n z \neq 0, \quad \text{其中 } z \in \Delta(0, R), \quad (4.14)$$

从而, 在 $\Delta(0, R)$ 内, $B_n(z)$ 的极点和零点重数均至少为 2. 由 (a2) 知, 当 n 充分大以后,

$$B_n^\#(0) = \eta_n^2 \frac{|F'_n(b_n)|}{\eta_n^2 + |F_n(b_n)|^2} \geq \eta_n^2 \frac{|F'_n(b_n)|}{1 + |F_n(b_n)|^2} = \eta_n^2 F_n^\#(b_n) > \exp(|a_n|^{\sigma(f)-2\varepsilon}). \quad (4.15)$$

显然, $B_n^\#(0) \rightarrow \infty$. 根据 Marty 定则, $\{B_n(z)\}$ 在点 0 不正规. 根据引理 2.4 (取 $\alpha = 1$), 存在点列 $z_n \rightarrow 0$, $\{B_n(z)\}$ 的一个子列 (仍然记作 $\{B_n(z)\}$), 及正数列 $\rho_n \rightarrow 0$ 使得在复平面内,

$$G_n(\zeta) = \frac{B_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n} = \frac{F_n(b_n + \eta_n(z_n + \rho_n \zeta))}{\rho_n \eta_n} \xrightarrow{\neq} G(\zeta), \quad (4.16)$$

其中 G 为复平面内非常数的亚纯函数, 极点和零点重级均至少为 2. 因为 $\eta_n/b_n \rightarrow 0$, 所以, 在复平面内,

$$\eta_n \frac{\beta'(b_n + \eta_n(z_n + \rho_n \zeta))}{\beta(b_n + \eta_n(z_n + \rho_n \zeta))} = \frac{m}{b_n/\eta_n + z_n + \rho_n \zeta} + \eta_n \frac{\widehat{\beta}'(b_n + \eta_n(z_n + \rho_n \zeta))}{\widehat{\beta}(b_n + \eta_n(z_n + \rho_n \zeta))} \Rightarrow 0. \quad (4.17)$$

对于任意给定的 $R > 0$, 当 n 充分大以后, 在 $\Delta(0, R)$ 内,

$$|\gamma'(a_n + \eta_n(z_n + \rho_n \zeta))| \leq M(|2a_n|, \gamma') \leq \exp(|2a_n|^{\rho(\gamma)+\varepsilon}) \leq \exp(|a_n|^{\sigma(\alpha)+2\varepsilon}).$$

于是, 在复平面内,

$$\eta_n \gamma'(a_n + \eta_n(z_n + \rho_n \zeta)) \Rightarrow 0. \quad (4.18)$$

将 $z = b_n + \eta_n(z_n + \rho_n \zeta)$ 代入 (a3) 得, 当 n 充分大以后,

$$\begin{aligned} 1 &\neq \frac{f'_n(b_n + \eta_n(z_n + \rho_n \zeta))}{\alpha_n(b_n + \eta_n(z_n + \rho_n \zeta))} \\ &= G'_n(\zeta) + \rho_n \eta_n \left(\frac{\beta'(b_n + \eta_n(z_n + \rho_n \zeta))}{\beta(b_n + \eta_n(z_n + \rho_n \zeta))} + \gamma'(a_n + \eta_n(z_n + \rho_n \zeta)) \right) G_n(\zeta). \end{aligned} \quad (4.19)$$

由 (4.16)–(4.19) 知, 在 $\mathbb{C} \setminus G^{-1}(\infty)$ 内,

$$1 \neq \frac{f'_n(b_n + \eta_n(z_n + \rho_n \zeta))}{\alpha_n(b_n + \eta_n(z_n + \rho_n \zeta))} \xrightarrow{\neq} G'(\zeta).$$

根据 Hurwitz 定理, 在复平面内, 或者 $G'(\zeta) \equiv 1$ 或者 $G'(\zeta) \neq 1$, 这与引理 3.1 矛盾.

记

$$\begin{aligned} \sigma_n &:= \exp(-|a_n|^{\sigma(f)-5\varepsilon}), \quad \lambda_n := \exp(-|a_n|^{\sigma(f)-6\varepsilon}), \\ S_n(z) &:= \frac{F_n(z)}{z}, \quad \widehat{S}_n(z) := S_n(\lambda_n z). \end{aligned} \quad (4.20)$$

我们断言: 当 n 充分大以后,

$$S(1, \widehat{S}_n(z)) \geq \exp(|a_n|^{\sigma(f)-3\varepsilon}). \quad (4.21)$$

显然, 当 n 充分大以后, $\Delta(b_n, \delta_n) \subset \Delta(0, \sigma_n)$, $S(\Delta(0, \sigma_n), F_n) > S(\Delta(b_n, \delta_n), F_n)$. 因为 $\frac{\sigma_n}{\lambda_n} \rightarrow 0$, 所以, 当 n 充分大以后,

$$S\left(\frac{1}{2}, F_n(\lambda_n z)\right) > S\left(\frac{\sigma_n}{\lambda_n}, F_n(\lambda_n z)\right) = S(\sigma_n, F_n(z)) \geq \exp(|a_n|^{\sigma(f)-\varepsilon}). \quad (4.22)$$

根据引理 3.3, 当 n 充分大以后,

$$S\left(\frac{1}{2}, F_n(\lambda_n z)\right) = S\left(\frac{1}{2}, \frac{F_n(\lambda_n z)}{z} \cdot z\right) \leq S\left(1, \frac{F_n(\lambda_n z)}{z}\right) + S(1, z) + \frac{\log 5 - \log 2}{\log 2}. \quad (4.23)$$

由 (4.22) 和 (4.23) 知, 当 n 充分大以后,

$$S\left(1, \frac{F_n(\lambda_n z)}{z}\right) \geq \exp(|a_n|^{\sigma(f)-2\varepsilon}). \quad (4.24)$$

由引理 2.7 和 (4.24) 知, 当 n 充分大以后,

$$S(1, \widehat{S}_n(z)) = S\left(1, \frac{F_n(\lambda_n z)}{\lambda_n z}\right) \geq \lambda_n^2 S\left(1, \frac{F_n(\lambda_n z)}{z}\right) \geq \exp(|a_n|^{\sigma(f)-3\varepsilon}).$$

我们分两种情形讨论.

情形 1 $\beta(0) = 0$.

由 (a1) 知, 当 n 充分大以后, $f_n(0) \neq 0$. 显然, $S_n(z) = \frac{F_n(z)}{z} = \frac{f_n(z)}{z^{m+1}\widehat{\beta}(z)\exp(\gamma_n(z))}$. 因而, 当 n 充分大以后, $S_n(0) = \infty$. 不妨假设对所有的自然数 n 均有 $f_n(0) \neq 0$ 和 $S_n(0) = \infty$ (否则, 选取子列并重新编号).

记 $D_n := \{z \mid |S_n(z)| = 3, |z| \leq 2\lambda_n\}$. 我们断言: 当 n 充分大以后, D_n 不是空集. 否则, 选取 $\{D_n\}$ 的子列并重新编号使得对所有的自然数 n 均有 D_n 为空集. 因为 $S_n(0) = \infty$, 所以在 $\Delta(0, 2)$ 内, $|\widehat{S}_n(z)| > 3$. 于是,

$$n\left(2, \frac{1}{(\widehat{S}_n(z)-1)(\widehat{S}_n(z)-2)(\widehat{S}_n(z)-3)}\right) = 0.$$

根据引理 2.6, 存在 $M > 0$ 使得 $S(1, \widehat{S}_n(z)) \leq M$, 这与 (4.21) 矛盾.

不妨假设对所有的自然数 n 均有 D_n 不是空集 (否则, 选取子列并重新编号). 记

$$T_n(\zeta) := \frac{f_n(t_n\zeta)}{t_n^{m+1}\exp(\gamma_n(t_n\zeta))} = \zeta^{m+1}\widehat{\beta}(t_n\zeta)S_n(t_n\zeta), \quad (4.25)$$

其中 t_n 为集合 D_n 中模最小的一个元素.

我们断言:

(b1) $t_n \neq 0, |t_n| \leq 2\lambda_n$;

(b2) 在 Δ 内, $|S_n(t_n\zeta)| \geq 3$ 和 $T_n(\zeta) \neq 0$.

因为 $S_n(0) = \infty$, 所以 $t_n \neq 0$. 由 D_n 的定义知, $|t_n| \leq 2\lambda_n$. 故 (b1) 成立. 因为 t_n 为集合 D_n 中模最小的一个元素, 0 是 $S_n(z)$ 的一个极点, 所以在 Δ 内, $|S_n(t_n\zeta)| \geq 3$. 由 (4.25) 知, 在 Δ' 内, $T_n(\zeta) \neq 0$. 由 $f_n(0) \neq 0$ 和 (4.25) 知, $T_n(0) \neq 0$. 故 (b2) 成立.

我们断言: $\{T_n\}$ 在复平面内正规. 根据引理 3.4, $\{T_n\}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内正规. 从 $\{T_n\}$ 的任一子列均可选出一个子列 (仍然记作 $\{T_n\}$) 使得在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内, $T_n(\zeta) \xrightarrow{\text{locally}} T(\zeta)$. 由 (4.25) 知, $|T(1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |T_n(1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\widehat{\beta}(t_n)S_n(t_n)| = 3$. 因而, $T^{-1}(\zeta)$ 为 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内的亚纯函数. 由 (b2) 和最大模原理知, 在 Δ 内, $T_n^{-1}(\zeta) \Rightarrow T^{-1}(\zeta)$, 所以在复平面内, $T_n(\zeta) \xrightarrow{\text{locally}} T(\zeta)$. 于是, $\{T_n\}$ 在复平面内正规.

从 $T_n(\zeta)$ 中选取一个子列 (仍然记作 $T_n(\zeta)$) 使得在复平面内 $T_n(\zeta) \xrightarrow{\text{locally}} T(\zeta)$. 由 (4.25) 知, $|T(1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\widehat{\beta}(t_n)S_n(t_n)| = 3$. 因而, $T(\zeta)$ 为复平面内的亚纯函数. 显然, $T(\zeta)$ 的极点重数至少为 2, $T(\zeta)$ 的零点重数至少为 3.

对于任意给定的 $R > 0$, 当 n 充分大以后, 在 $\Delta(0, R)$ 内, 有

$$|\gamma'_n(t_n\zeta)| = |\gamma'(a_n - b_n + t_n\zeta)| \leq M(|2a_n|, \gamma') \leq \exp(|2a_n|^{\rho(\gamma)+\varepsilon}) \leq \exp(|a_n|^{\sigma(\alpha)+2\varepsilon}).$$

于是, 在复平面内,

$$t_n\gamma'_n(t_n\zeta) \Rightarrow 0. \quad (4.26)$$

通过简单的计算可得

$$T'_n(\zeta) = \frac{f'_n(t_n\zeta)}{t_n^m \exp(\gamma_n(t_n\zeta))} - t_n \gamma'_n(t_n\zeta) \frac{f_n(t_n\zeta)}{t_n^{m+1} \exp(\gamma_n(t_n\zeta))},$$

从而, 由 (4.26) 知, 在 $\mathbb{C} \setminus T^{-1}(\infty)$ 内,

$$\frac{f'_n(t_n\zeta)}{t_n^m \exp(\gamma_n(t_n\zeta))} = T'_n(\zeta) + t_n \gamma'_n(t_n\zeta) T_n(\zeta) \Rightarrow T'(\zeta). \quad (4.27)$$

记

$$U_n(\zeta) := \frac{f'_n(t_n\zeta) - \alpha(t_n\zeta)}{t_n^m \exp(\gamma_n(t_n\zeta))} = \frac{f'_n(t_n\zeta)}{t_n^m \exp(\gamma_n(t_n\zeta))} - \frac{\beta(t_n\zeta)}{t_n^m}. \quad (4.28)$$

由 (4.27) 和 (4.28) 知, 在 $\mathbb{C} \setminus T^{-1}(\infty)$ 内,

$$U_n(\zeta) \Rightarrow T'(\zeta) - \zeta^m. \quad (4.29)$$

由 (a1) 可以看出, 当 n 充分大以后,

$$U_n(\zeta) \neq 0. \quad (4.30)$$

由 (4.29)、(4.30) 和 Hurwitz 定理, 在复平面内, 或者 $T'(\zeta) - \zeta^m \equiv 0$ 或者 $T'(\zeta) - \zeta^m \neq 0$. 根据定理 B 和引理 2.3, 在复平面内 $T'(\zeta) - \zeta^m \equiv 0$. 于是, 在复平面内 $T(\zeta) = \frac{\zeta^{m+1}}{m+1} + c$, 其中 c 为常数. 因为 $T(\zeta)$ 的零点重数至少为 3, 所以 $c = 0$ 和 $T(\zeta) = \frac{\zeta^{m+1}}{m+1}$, 这与 $|T(1)| = 3$ 矛盾.

情形 2 $\beta(0) = \infty$.

情形 2.1 $m < -1$.

由 (a1) 知, 当 n 充分大以后, $f_n(0) \neq \infty$. 显然, $S_n(z) = \frac{F_n(z)}{z} = \frac{f_n(z)}{z^{m+1} \beta(z) \exp(\gamma_n(z))}$. 因而, 当 n 充分大以后, $S_n(0) = 0$. 不妨假设对所有的自然数 n 均有 $f_n(0) \neq \infty$ 和 $S_n(0) = 0$ (否则, 选取子列并重新编号).

记 $D_n := \{z \mid |S_n(z)| = 3, |z| \leq 2\lambda_n\}$. 我们断言: 当 n 充分大以后, D_n 不是空集. 否则, 选取 $\{D_n\}$ 的子列并重新编号使得对所有的自然数 n 均有 D_n 为空集. 因为 $S_n(0) = 0$, 所以在 $\Delta(0, 2)$ 内, $|\hat{S}_n(z)| < 3$. 于是,

$$n \left(2, \frac{1}{(\hat{S}_n(z) - 3)(\hat{S}_n(z) - 4)(\hat{S}_n(z) - 5)} \right) = 0.$$

根据引理 2.6, 存在 $M > 0$ 使得 $S(1, \hat{S}_n(z)) \leq M$, 这与 (4.21) 矛盾.

不妨假设对所有的自然数 n 均有 D_n 不是空集 (否则, 选取子列并重新编号). 记

$$T_n(\zeta) := \frac{f_n(t_n\zeta)}{t_n^{m+1} \exp(\gamma_n(t_n\zeta))} = \zeta^{m+1} \hat{\beta}(t_n\zeta) S_n(t_n\zeta), \quad (4.31)$$

其中 t_n 为集合 D_n 中模最小的一个元素.

与情形 1 类似, 我们可以证明

(c1) $t_n \neq 0, |t_n| \leq 2\lambda_n$;

(c2) 在 Δ 内, $|S_n(t_n\zeta)| \leq 3$ 和 $T_n(\zeta) \neq \infty$.

我们断言: $\{T_n\}$ 在复平面内正规. 根据引理 3.4, $\{T_n\}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内正规. 从 $\{T_n\}$ 的任意子列均可选出一个子列 (仍然记作 $\{T_n\}$) 使得在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内 $T_n(\zeta) \xrightarrow{\text{p}} T(\zeta)$. 由 (4.31) 知, $|T(1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |T_n(1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{\beta}(t_n) S_n(t_n)| = 3$. 因而, $T(\zeta)$ 为 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内的亚纯函数. 由 (c2) 和最大模原理, 在 Δ 内 $T_n(\zeta) \Rightarrow T(\zeta)$, 所以在复平面内 $T_n(\zeta) \xrightarrow{\text{p}} T(\zeta)$. 于是, $\{T_n\}$ 在复平面内正规.

从 $T_n(\zeta)$ 中选取一个子列 (仍然记作 $T_n(\zeta)$) 使得在复平面内 $T_n(\zeta) \xrightarrow{*} T(\zeta)$. 由 (4.31) 知, $|T(1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{\beta}(t_n)S_n(t_n)| = 3$, 因而, $T(\zeta)$ 为复平面内的亚纯函数. 显然, $T(\zeta)$ 的零点重数至少为 3. 根据 (c2) 知, 在 Δ 内 $T(z) \neq \infty$.

与情形 1 类似, 我们可以证明: 在复平面内, 或者 $T'(\zeta) - \zeta^m \equiv 0$ 或者 $T'(\zeta) - \zeta^m \neq 0$. 假设在复平面内 $T'(\zeta) - \zeta^m \equiv 0$. 于是, 在复平面内 $T(\zeta) = \frac{1}{(1+m)\zeta^{-m-1}} + c$, 其中 c 为常数. 因为 $T(\zeta)$ 的零点重数至少为 3, 所以 $c = 0$ 和 $T(\zeta) = \frac{1}{(1+m)\zeta^{-m-1}}$, 这与 $|T(1)| = 3$ 矛盾. 因而, 在复平面内 $T'(\zeta) - \zeta^m \neq 0$. 因为在 Δ 内 $T(\zeta) \neq \infty$, 所以在复平面内 $T'(\zeta) \neq \zeta^m$. 根据定理 B 和引理 2.1 知, $T(\zeta)$ 是一个常数函数, 从而 $T(\zeta) \equiv 3e^{i\theta}$, 其中 θ 为常数. 于是, 在复平面内,

$$T_n(\zeta) \xrightarrow{*} T(\zeta) = 3e^{i\theta} \quad \text{和} \quad S_n(t_n\zeta) = \frac{T_n(\zeta)}{\zeta^{m+1}\hat{\beta}(t_n\zeta)} \xrightarrow{*} 3e^{i\theta}\zeta^{-m-1}. \quad (4.32)$$

记 $E_n := \{z \mid |S_n(z)| = 3, 3|t_n| < |z| \leq 8\lambda_n\}$. 我们断言: 当 n 充分大以后, E_n 不是空集. 否则, 选取 $\{E_n\}$ 的子列并重新编号使得对所有的自然数 n 均有 E_n 为空集. 由 (4.32) 和 Hurwitz 定理知,

$$n \left(7, \frac{1}{(\hat{S}_n(z) - 1)(\hat{S}_n(z) - 2)(\hat{S}_n(z) - 3)} \right) = -3(m+1).$$

根据引理 2.6, 存在 $M > 0$ 使得 $S(1, \hat{S}_n(z)) \leq M$, 这与 (4.21) 矛盾.

不妨假设对所有的自然数 n 均有 E_n 不是空集 (否则, 选取子列并重新编号). 记

$$V_n(\zeta) := \frac{f_n(r_n\zeta)}{r_n^{m+1} \exp(\gamma_n(r_n\zeta))} = \zeta^{m+1} \hat{\beta}(r_n\zeta) S_n(r_n\zeta), \quad (4.33)$$

其中 r_n 为集合 E_n 中模最小的一个元素.

我们断言:

(d1) $|r_n| \leq 8\lambda_n$;

(d2) $\frac{r_n}{t_n} \rightarrow \infty$;

(d3) 当 n 充分大以后, 在 Δ 内, $V_n(\zeta) \neq 0$.

由 E_n 的定义知, (d1) 成立. 由 (4.32) 和 Hurwitz 定理知, (d2) 成立. 因为在复平面内, $T_n(\zeta) \xrightarrow{*} 3e^{i\theta}$, 所以, 当 n 充分大以后, 在 $\Delta(0, 4|t_n|)$ 内, $f_n(z) \neq 0$. 由 (4.32) 和 E_n 的定义知, 当 n 充分大以后, 在 $\Delta(0, |r_n|) \setminus \overline{\Delta}(0, 3|t_n|)$ 内, $|S_n(z)| \geq 2$, 从而, 在 $\Delta(0, |r_n|) \setminus \overline{\Delta}(0, 3|t_n|)$ 内, $f_n(z) \neq 0$. 于是, 当 n 充分大以后, 在 $\Delta(0, |r_n|)$ 内, $f_n(z) \neq 0$. 由 (4.33) 知, (d3) 成立.

我们断言: $\{V_n\}$ 在复平面内正规. 根据引理 3.4, $\{V_n\}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内正规. 从 $\{V_n\}$ 的任意子列均可选出一个子列 (仍然记作 $\{V_n\}$) 使得在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内 $V_n(\zeta) \xrightarrow{*} V(\zeta)$. 由 (4.33) 知, $|V(1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |V_n(1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{\beta}(r_n)S_n(r_n)| = 3$. 因而, $V^{-1}(\zeta)$ 为 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内的亚纯函数. 由 (d3) 和最大模原理, 在 Δ 内 $V_n^{-1}(\zeta) \Rightarrow V^{-1}(\zeta)$, 所以在复平面内, $V_n(\zeta) \xrightarrow{*} V(\zeta)$. 于是, $\{V_n(\zeta)\}$ 在复平面内正规.

从 $V_n(\zeta)$ 中选取一个子列 (仍然记作 $V_n(\zeta)$) 使得在复平面内,

$$V_n(\zeta) \xrightarrow{*} V(\zeta). \quad (4.34)$$

由 (4.33) 知, $|V(1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |V_n(1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{\beta}(r_n)S_n(r_n)| = 3$, 因而 $V(\zeta)$ 为复平面内的亚纯函数.

与情形 1 类似, 我们可以证明: 在复平面内, 或者 $V'(\zeta) - \zeta^m \equiv 0$ 或者 $V'(\zeta) - \zeta^m \neq 0$. 假设在复平面内 $V'(\zeta) - \zeta^m \equiv 0$. 于是, 在复平面内, $V(\zeta) = \frac{1}{(1+m)\zeta^{-m-1}} + c$, 其中 c 为常数. 显然, $V(\zeta)$

的零点重数至少为 3, 所以 $c = 0$ 和 $V(\zeta) = \frac{1}{(1+m)\zeta^{-m-1}}$, 这与 $|V(1)| = 3$ 矛盾. 因而, 在复平面内, $V'(\zeta) - \zeta^m \neq 0$.

通过简单的计算可得

$$\frac{f'_n(r_n\zeta)}{r_n^m \exp(\gamma_n(r_n\zeta))} = V'_n(\zeta) + r_n \gamma'_n(r_n\zeta) V_n(\zeta). \quad (4.35)$$

与引理 3.4 证明中的方法类似, 我们可以得到: 在复平面内,

$$r_n \gamma'_n(r_n\zeta) \Rightarrow 0. \quad (4.36)$$

由 (4.35) 和 (4.36) 知, 在 $\mathbb{C} \setminus V^{-1}(\infty)$ 内,

$$\frac{f'_n(r_n\zeta) - \alpha_n(r_n\zeta)}{r_n^m \exp(\gamma_n(r_n\zeta))} = \frac{f'_n(r_n\zeta)}{r_n^m \exp(\gamma_n(r_n\zeta))} - \zeta^m \widehat{\beta}_n(r_n\zeta) \Rightarrow V'(\zeta) - \zeta^m. \quad (4.37)$$

由 (a1) 知, 当 n 充分大以后,

$$\frac{f'_n(r_n\zeta) - \alpha_n(r_n\zeta)}{r_n^m \exp(\gamma_n(r_n\zeta))} \neq 0. \quad (4.38)$$

由 (4.38) 和最大模原理, 在复平面内,

$$L_n(\zeta) = \left[\frac{f'_n(r_n\zeta) - \alpha_n(r_n\zeta)}{r_n^m \exp(\gamma_n(r_n\zeta))} \right]^{-1} \Rightarrow L(\zeta) = [V'(\zeta) - \zeta^m]^{-1}. \quad (4.39)$$

显然, $V'(\zeta) - \zeta^m$ 是复平面内的亚纯函数, 所以在复平面内, $L(\zeta) \neq 0$. 由 (4.31)、(4.33) 和 (d2) 知,

$$V(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(0)}{r_n^{m+1} \exp(\gamma_n(0))} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(0) \left(\frac{r_n}{t_n} \right)^{-m-1} = \infty.$$

设 0 为 $V(\zeta)$ 的一个 k 级极点. 由 (4.34) 和 Hurwitz 定理, $V_n(\zeta)$ 有 k 个极点 (计算重数) $\zeta_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$). 由 (4.33) 知, $f_n(r_n\zeta)$ 有 k 个极点 (计算重数) $\zeta_i \rightarrow 0$. 由 (a1) 知, 当 n 充分大以后, $f_n(0) \neq \infty$. 因而, $\zeta_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$). 由 (4.39) 知, 当 n 充分大以后, $L_n(\zeta)$ 至少有 $k+1$ 个零点 $\zeta_i \rightarrow 0$ 和一个 $-m$ 级零点 $\zeta = 0$. 根据 Hurwitz 定理, 0 为 $L(\zeta)$ 的一个零点且零点重数至少为 $k+1-m$. 另一方面, 因为 0 为 $V(\zeta)$ 的一个 k 级极点以及 0 为 ζ^m 的一个 $-m$ 级极点, 所以, 0 为 $L(\zeta)$ 的一个重数至多为 $\max\{k+1, -m\}$ 的零点. 因而, $k+1-m \leq \max\{k+1, -m\}$, 矛盾.

情形 2.2 $m = -1$.

不妨假设 $S_n(0) \rightarrow c_0$ (否则, 选取子列并重新编号), 其中 c_0 为有穷复数或者 $c_0 = \infty$.

情形 2.2.1 c_0 为有穷复数. 记 $D_n := \{z \mid |S_n(z)| = |c_0| + 3, |z| \leq 2\lambda_n\}$. 我们断言: 当 n 充分大以后, D_n 不是空集. 否则, 选取 $\{D_n\}$ 的子列并重新编号使得对所有的自然数 n 均有 D_n 为空集且 $|S_n(0) - c_0| < 1$. 因为 $S_n(0) \rightarrow c_0$, 所以在 $\Delta(0, 2)$ 内, $|\widehat{S}_n(z)| < |c_0| + 3$. 于是,

$$n \left(2, \frac{1}{(\widehat{S}_n(z) - |c_0| - 3)(\widehat{S}_n(z) - |c_0| - 4)(\widehat{S}_n(z) - |c_0| - 5)} \right) = 0.$$

根据引理 2.6, 存在 $M > 0$ 使得 $S(1, \widehat{S}_n(z)) \leq M$, 这与 (4.21) 矛盾.

不妨假设对所有的自然数 n 均有 D_n 不是空集且 $|S_n(0) - c_0| < 1$ (否则, 选取子列并重新编号). 记

$$T_n(\zeta) := \frac{f_n(t_n\zeta)}{\exp(\gamma_n(t_n\zeta))} = \widehat{\beta}(t_n\zeta) S_n(t_n\zeta), \quad (4.40)$$

其中 t_n 为集合 D_n 中模最小的一个元素.

与情形 1 类似, 我们可以证明

(e1) $t_n \neq 0, |t_n| \leq 2\lambda_n$;

(e2) 在 Δ 内, $|S_n(t_n\zeta)| \leq |c_0| + 3$ 和 $T_n(\zeta) \neq \infty$.

与情形 2.1 类似, 我们可以证明: $\{T_n(\zeta)\}$ 在复平面内正规. 从 $T_n(\zeta)$ 中选取一个子列 (仍然记作 $T_n(\zeta)$) 使得在复平面内, $T_n(\zeta) \xrightarrow{\lambda} T(\zeta)$. 由 (4.40) 知,

$$|T(1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |T_n(1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{\beta}(t_n)S_n(t_n)| = |c_0| + 3,$$

$$T(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta}(0)S_n(0) = c_0.$$

因而, $T(\zeta)$ 为复平面内非常数的亚纯函数. 显然, $T(\zeta)$ 的零点重数至少为 3.

与情形 1 类似, 我们可以证明: 在复平面内, 或者 $T'(\zeta) - \zeta^{-1} \equiv 0$ 或者 $T'(\zeta) - \zeta^{-1} \neq 0$. 如果在复平面内 $T'(\zeta) - \zeta^{-1} \equiv 0$, 那么 $T(\zeta)$ 是一个多值函数, 矛盾. 因而, 在复平面内 $T'(\zeta) - \zeta^{-1} \neq 0$. 又因为 $T(0) = c_0$, 所以在复平面内, $T'(\zeta) \neq \zeta^{-1}$. 根据定理 B 和引理 2.1, $T(\zeta)$ 是一个常数函数, 矛盾.

情形 2.2.2 $c_0 = \infty$. 记 $D_n := \{z \mid |S_n(z)| = 3, |z| \leq 2\lambda_n\}$. 我们断言: 当 n 充分大以后, D_n 不是空集. 否则, 选取 $\{D_n\}$ 的子列并重新编号使得对所有的自然数 n 均有 D_n 为空集且 $|S_n(0)| > 4$. 因为 $S_n(0) \rightarrow \infty$, 所以在 $\Delta(0, 2)$ 内, $|\hat{S}_n(z)| > 3$. 于是,

$$n \left(2, \frac{1}{(\hat{S}_n(z) - 1)(\hat{S}_n(z) - 2)(\hat{S}_n(z) - 3)} \right) = 0.$$

根据引理 2.6, 存在 $M > 0$ 使得 $S(1, \hat{S}_n(z)) \leq M$, 这与 (4.21) 矛盾.

不妨假设对所有的自然数 n 均有 D_n 不是空集且 $|S_n(0)| > 4$ (否则, 选取子列并重新编号). 记

$$T_n(\zeta) := \frac{f_n(t_n\zeta)}{\exp(\gamma_n(t_n\zeta))} = \hat{\beta}(t_n\zeta)S_n(t_n\zeta), \quad (4.41)$$

其中 t_n 为集合 D_n 中模最小的一个元素.

我们断言:

(f1) $t_n \neq 0, |t_n| \leq 2\lambda_n$;

(f2) 在 Δ 内, $|S_n(t_n\zeta)| \geq 3$ 和 $T_n(\zeta) \neq 0$.

因为 $|S_n(0)| > 4$, 所以 $t_n \neq 0$. 由 D_n 的定义结合 $|S_n(0)| > 4$ 知, $|t_n| \leq 2\lambda_n$, 在 Δ 内 $|S_n(t_n\zeta)| \geq 3$. 由 (4.41) 知, 在 Δ 内 $T_n(\zeta) \neq 0$.

与情形 1 类似, 我们可以证明: $\{T_n(\zeta)\}$ 在复平面内正规. 从 $T_n(\zeta)$ 中选取一个子列 (仍然记作 $T_n(\zeta)$) 使得在复平面内 $T_n(\zeta) \xrightarrow{\lambda} T(\zeta)$. 由 (4.41) 知,

$$|T(1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |T_n(1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{\beta}(t_n)S_n(t_n)| = 3,$$

$$T(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta}(0)S_n(0) = \infty.$$

因而, $T(\zeta)$ 为复平面内非常数的亚纯函数. 显然, $T(\zeta)$ 的零点重数至少为 3.

与情形 1 类似, 我们可以证明: 在复平面内, 或者 $T'(\zeta) - \zeta^{-1} \equiv 0$ 或者 $T'(\zeta) - \zeta^{-1} \neq 0$. 如果在复平面内 $T'(\zeta) - \zeta^{-1} \equiv 0$, 那么 $T(\zeta)$ 是一个多值函数, 矛盾. 因而, 在复平面内 $T'(\zeta) - \zeta^{-1} \neq 0$. 与情形 2.1 类似, 我们可以推导出矛盾. $\square$

5 结论与讨论

本文利用亚纯函数正规族理论证明了一个 Picard 型定理 (即定理 1.1). 然而遗憾的是, 本文作者依然不清楚定理 1.1 中 $f(z)$ 的极点重数至少为 2 这一个条件是否是必要的. 另一个遗憾的是, 定理 1.1 中 $\alpha(z)$ 是 $f(z)$ 的一类性质非常特殊的小函数, 这是因为 $\alpha(z)$ 的零点在复平面内的分布非常均匀. 事实上, 我们最终要解决的是下述一般性问题:

设 $f(z)$ 为复平面内的超越亚纯函数, $\alpha(z) (\neq 0)$ 为 $f(z)$ 的小函数, 则 $f'(z) - \alpha(z)$ 在复平面内是否必定有无穷多个根零点?

上述问题的研究仍没有突破性的进展, 我们将这个问题明确提出来的目的是希望引起更专业人士的关注, 并积极热情地投入到此问题的研究中来.

致谢 感谢审稿人的仔细审稿与有益意见.

参考文献

- 1 Hayman W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives. *Ann of Math* (2), 1959, 70: 9–42
- 2 Pang X C, Nevo S, Zalcman L. Derivatives of meromorphic functions with multiple zeros and rational functions. *Comput Methods Funct Theory*, 2008, 8: 483–491
- 3 Liu X J, Nevo S, Pang X C. On the k th derivative of meromorphic functions with zeros of multiplicity at least $k + 1$. *J Math Anal Appl*, 2008, 348: 516–529
- 4 Xu Y. Normal families and exceptional functions. *J Math Anal Appl*, 2007, 329: 1343–1354
- 5 Wang Y F, Fang M L. Picard values and normal families of meromorphic functions with multiple zeros. *Acta Math Sin Engl Ser*, 1998, 14: 17–26
- 6 Pang X C, Zalcman L. Normal families of meromorphic functions with multiple zeros and poles. *Israel J Math*, 2003, 136: 1–9
- 7 Pang X C, Zalcman L. Normal families and shared values. *Bull Lond Math Soc*, 2000, 32: 325–331
- 8 Tsuji M. On Borel's directions of meromorphic functions of finite order II. *Kodai Math Sem Rep*, 1950, 2: 96–100
- 9 杨拍. 拟正规定则和 Picard 型定理. *数学物理学报*, 2015, 35: 1089–1105
- 10 Hayman W K. *Meromorphic Function*. Oxford: Clarendon Press, 1964

A Picard type theorem concerning meromorphic functions of hyper-order

YANG Pai, NIU PeiYan & PANG XueCheng

Abstract Let $f(z)$ be a meromorphic function in the complex plane, whose poles are multiple and whose zeros have multiplicity at least 3. Set $\alpha(z) := \beta(z) \exp(\gamma(z))$, where $\beta(z)$ is a nonconstant elliptic function and $\gamma(z)$ is an entire function. In this paper, we prove that if $\sigma(f(z)) > \sigma(\alpha(z))$, then $f'(z) - \alpha(z)$ has infinitely many solutions.

Keywords meromorphic function, characteristic function, Picard type theorem

MSC(2010) 30D35, 30D45

doi: 10.1360/012016-16