一类随机偏泛函微分方程 Mild 解的全局适定性和稳定性

王林山

中国海洋大学数学科学学院, 青岛 266100

E-mail: wangls@ouc.edu.cn

收稿日期: 2015-07-29; 接受日期: 2015-11-01; 网络出版日期: 2016-02-19

国家自然科学基金 (批准号: 11171374)、山东省自然科学基金 (批准号: ZR2011AZ001) 和中国高校基本科研业务经费专项基金 (批准号: 201362034) 资助项目

摘要 考虑一类无限维 Winner 过程驱动的随机偏泛函微分方程 (SPFDEs), 在拟局部 Lipschitz 条件和有限增长条件下给出如下结果: 首先, 通过截距法给出全局 Mild 解的存在唯一性定理; 其次, 讨论解的渐近行为; 然后, 通过 Lyapunov 方法获得均方指数稳定性判据; 最后, 举例说明上述理论结果的有效性.

关键词 随机偏泛函微分方程 Mild 解 存在唯一性 稳定性

MSC (2010) 主题分类 34A01, 34A02, 34K20, 34K50

1 引言

在过去的几十年里, 随机偏微分方程^[1-8] (SPDEs) 和随机泛函微分方程^[9-15] (SFDEs) 解的存在性、唯一性和稳定性得到广泛的研究, 但 SPFDEs 解的长时间行为鲜有研究. 本文考虑如下无限维 Winner 过程^[16-21] 驱动的 SPFDEs 的 Mild 解的全局存在唯一性和随机稳定性,

$$\begin{cases} du = (\nabla \cdot (D(x) \circ \nabla u) + f(t, u_t))dt + G(t, u_t)dW(t, x), \\ u|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad u(t_0 + \theta, x, \omega) = \varphi(\theta, x, \omega) \in C_{F_0}^b, \\ -r \leq \theta \leq 0, \quad x \in \mathcal{O}, \quad \omega \in \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $u = (u_1(t, x, \omega), u_2(t, x, \omega), \dots, u_n(t, x, \omega))^T$, $u_t = (u_{1t}, u_{2t}, \dots, u_{nt})^T = (u_1(t + \theta, x, \omega), u_2(t + \theta, x, \omega), \dots, u_n(t + \theta, x, \omega))^T$, $D(x) = (D_{ik}(x))_{n \times m}$, $\nabla u = (\nabla u_1, \nabla u_2, \dots, \nabla u_n)^T$, $\nabla u_i = (\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \frac{\partial u_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u_i}{\partial x_n})^T$, $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n\}$, $D \circ \nabla u = (D_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k})$ 是矩阵 D 和 ∇u 的 Hadamard 积^[21],

$$\nabla \cdot (D(x) \circ \nabla u) = \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial (D_{1j}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_j})}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^m \frac{\partial (D_{2j}(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_j})}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^m \frac{\partial (D_{nj}(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_j})}{\partial x_j} \right)^T,$$

英文引用格式: Wang L S. Global well-posedness and stability of the mild solutions for a class of stochastic partial functional differential equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 371–382, doi: 10.1360/012016-14

$$f(t, u_t) = (f_1(t, u_t), f_2(t, u_t), \dots, f_n(t, u_t))^T,$$

$G(t, u_t) = (g_{ij}(t, u_t))_{n \times m}$, $G \in M_2^{n,m}(t_0, t)$ [22]. $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 有界开连通子集, 并且具有充分光滑的边界 $\partial\mathcal{O}$. $W = W(t, x, \omega)$ 是值在可分 Hilbert 空间上的时空 Winner 过程.

研究上述方程的动力源于对人口动力学行为^[1]、电子科学^[9]、控制工程和递归神经网络的分析^[13]. 由于随机扰动和时滞的影响, SPDEs 或 PFDEs 建立的动力行为判据往往对 SPFDEs 是无效的. 为此, 本文给出了一种研究 SPFDEs 的 Mild 解的全局适定性和随机稳定性的方法, 通过截距法给出全局 Mild 解的存在唯一性定理, 并且通过 Lyapunov 方法给出均方指数稳定性判据. 最后, 举例说明理论结果的有效性.

2 预备知识

本节给出一些文中常用的符号及与 SPFDEs 相关的定义.

$L^2(\mathcal{O})^n$ 和 $H^1(\mathcal{O})^n$ 是 Hilbert 空间, $(\cdot, \cdot)$ 是定义在 $L^2(\mathcal{O})^n$ 上的内积; $C \triangleq C([-r, 0], L^2(\mathcal{O})^n)$ 是从 $[-r, 0]$ 到 $L^2(\mathcal{O})^n$ 的连续函数全体构成的 Banach 空间; $\|\varphi\|_C = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|\varphi(\theta)\|$, $\forall \varphi \in C$; $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是具有滤子 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 的完备的概率空间.

对于任意连续的 $\mathcal{F}_t$ 可测的 $L^2(\mathcal{O})^n$ 值随机过程 $u = u(t, x, \omega) : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \times \Omega \rightarrow L^2(\mathcal{O})^n$, 定义连续的 $\mathcal{F}_t$ 可测的 C 值随机过程 u_t 为 $u_t = u(t + \theta, x, \omega)$, $\theta \in [-r, 0]$, $x \in \mathcal{O}$, $\omega \in \Omega$, $t \geq t_0 \geq 0$. 定义

$$\|u_t\|_C = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|u(t + \theta)\|, \quad E\|u_t\|_C = E \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|u(t + \theta)\|,$$

其中 $E(\cdot)$ 表示期望. $C_{\mathcal{F}_0^b}$ 是由有界的 $\mathcal{F}_0$ 可测 $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ 值随机变量 ϕ 构成的集合, $E\|\phi\|_C < \infty$. $\|B\| \triangleq (\text{tr}(BB^T))^{\frac{1}{2}}$ 是 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 的 Frobenius 模, 其中 tr 表示矩阵的迹. $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{O})^m, L^2(\mathcal{O})^n)$ 是由所有从 $L^2(\mathcal{O})^m$ 到 $L^2(\mathcal{O})^n$ 的具有算子模有界的线性算子构成的空间. 显然, $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{O})^m, L^2(\mathcal{O})^n)$ 是一个 Banach 空间. $L_{\mathcal{F}_t}^2(\Omega, L^2(\mathcal{O})^n)$ 是由 $\mathcal{F}_t$ 可测的 $L^2(\mathcal{O})^n$ 值随机变量 ξ 构成的集合, 并且 $E\|\xi\|^2 < \infty$. $L^2(\mathcal{O})^m$ 是一个可分的 Hilbert 空间, $W(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_n} \beta_n(t) e_n(x)$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的 $L^2(\mathcal{O})^m$ 值时空 Winner 过程, 并且 $EW = 0$, $E(W(s, x) \otimes W(t, x)) = (t \wedge s)Q$, $\forall s, t \geq 0$, $t \wedge s = \min\{t, s\}$, 其中 Q 是一个正定自伴的 Hilbert-Schmidt 算子. 记 α_n 为 Q 的特征值, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^2(\mathcal{O})^n$ 上的正交基, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中的相互独立的标准 Brown 运动. $\mathcal{L}_2^0(\mathbb{R}, L^2(\mathcal{O})^n)$ 是从 $\mathbb{R} \triangleq Q^{\frac{1}{2}}(L^2(\mathcal{O})^n)$ 到 $L^2(\mathcal{O})^n$ 的 Hilbert-Schmidt 算子构成的空间. 当此空间的模定义为 $\|\Phi\| \triangleq \sqrt{\text{tr}(\Phi Q \Phi^*)}$ 时, 该空间是一个 Hilbert 空间. Φ^* 表示 Φ 的伴随算子.

定义 2.1 方程 (1.1) 的平凡解称为均方指数稳定的, 若对任意满足初始条件 $\phi \in C_{\mathcal{F}_0^b}$ 的解 $u = u(t, x, \omega)$, 存在 $\kappa, \gamma > 0$ 使得

$$E\|u(t)\|^2 \leq \kappa e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad t \geq t_0. \quad (2.1)$$

引理 2.1 [18] (Poincaré 不等式) 若 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个有界开区域, 则

$$\|u\| \leq \beta^{-1} \|u\|, \quad u \in H^1(\mathcal{O})^n, \quad (2.2)$$

其中

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{O}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx},$$

常数 $\beta > 0$ 依赖于区域 $\mathcal{O}$ 的大小.

3 Mild 解的全局存在唯一性

定义如下线性算子:

$$A: \mathcal{D}(A) \rightarrow L^2(\mathcal{O})^n, \quad Au = \nabla \cdot (D(x) \circ \nabla u), \quad u \in \mathcal{D}(A), \quad (3.1)$$

其中 $\mathcal{D} = H^2(\mathcal{O})^n \cap H_0^1(\mathcal{O})^n \subset L^2(\mathcal{O})^n$. 方程 (1.1) 可改写为如下等价形式:

$$\begin{cases} du = (Au + f(t, u_t))dt + G(t, u_t)dW, & t \geq t_0 \geq 0, \\ u_{t_0} = u(t_0 + \theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-r, 0]. \end{cases} \quad (3.2)$$

首先作如下假设:

(H1) 存在 $\alpha > 0$, 使得 $D_{ik}(x) \geq \alpha, i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m, x \in \mathcal{O}$.

若 A 是闭算子 $S(t)$ 的强连续半群的无穷小生成元, 则 $S(t)$ 满足以下性质.

命题 3.1 考虑如下方程:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au, \\ u(t_0) = \psi(0). \end{cases} \quad (3.3)$$

对于任意 $\psi \in \mathcal{D}(A)$, 令 $u(t) = S(t)\psi(0)$ 为方程 (3.3) 的解, 则 $S(t)$ 是 $L^2(\mathcal{O})^n$ 中的压缩映射.

证明 显然, 方程 (3.3) 的解为 $u(t) = e^{A(t-t_0)}\psi(0)$, 故 $S(t) = e^{A(t-t_0)}$. 由 Gauss 定理和假设 (H1) 可知, 对任意 $u \in H_0^1(\mathcal{O})^n$ [23],

$$\sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{O}} u_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial(D_{ij}(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_j})}{\partial x_j} dx = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{O}} D_{ij}(x) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \leq -\alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{O}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx, \quad (3.4)$$

即

$$(u, Au) \leq -\alpha \|u\|^2, \quad \forall u \in H_0^1(\mathcal{O})^n.$$

进而, 计算方程 (3.3) 和 $u(t)$ 在 $L^2(\mathcal{O})^n$ 中的内积, 有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + \alpha \|u(t)\|^2 \leq 0.$$

又由 Poincaré 不等式可得

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + 2\alpha\beta^2 \|u(t)\|^2 \leq 0,$$

并且

$$\|u(t)\|^2 \leq e^{-2\alpha\beta^2(t-t_0)} \|\psi(0)\|^2 \leq \|\psi(0)\|^2, \quad t \geq t_0.$$

故 $S(t)$ 是 $L^2(\mathcal{O})^n$ 中的压缩映射. 证毕. □

考虑如下积分方程:

$$\begin{cases} u(t) = S(t_0)\phi(0) + \int_{t_0}^t S(t-s+t_0)f(s, u_s)ds + \int_{t_0}^t S(t-s+t_0)G(s, u_s)dW, & t \geq t_0, \\ u_{t_0} = \phi(\theta), & \theta \in [-r, 0]. \end{cases} \quad (3.5)$$

定义 3.1 若 $u(t)$ 满足方程 (3.5), 则称其为方程 (1.1) 的 Mild 解.

下面作如下假设:

(H2) (拟局部 Lipschitz 条件) 对于任意 $n > 0$, 存在 $N_n \geq 0$, 使得

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \vee \|G(t, u) - G(t, v)\| \leq N_n \|u - v\|, \quad \|u\| \leq n, \quad \|v\| \leq n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

注 3.1 拟局部 Lipschitz 条件是比较全局 Lipschitz 条件弱的条件.

对于所有 $u \in L^2(\mathcal{O})^n$, 定义

$$f_n(t, u) = \begin{cases} f(t, u), & \|u\| \leq n, \\ f\left(t, n \frac{u}{\|u\|}\right), & \|u\| > n, \end{cases} \quad (3.6)$$

$$G_n(t, u) = \begin{cases} G(t, u), & \|u\| \leq n, \\ G\left(t, n \frac{u}{\|u\|}\right), & \|u\| > n. \end{cases} \quad (3.7)$$

命题 3.2 $f_n(t, u)$ 和 $G_n(t, u)$ 满足如下全局 Lipschitz 条件:

$$\|f_n(t, u_1) - f_n(t, u_2)\| \vee \|G_n(t, u_1) - G_n(t, u_2)\|_2 \leq 2N_n \|u_1 - u_2\|, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u, v \in L^2(\mathcal{O})^n. \quad (3.8)$$

证明 显然, $f_n(t, u)$ 和 $G_n(t, u)$ 是关于 u 连续的.

(i) 若 $\|u_1\| \leq n, \|u_2\| \leq n$, 则

$$\|f_n(t, u_1) - f_n(t, u_2)\| = \|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leq N_n \|u_1 - u_2\|.$$

(ii) 若 $\|u_1\| > n, \|u_2\| > n$, 则

$$\begin{aligned} \|f_n(t, u_1) - f_n(t, u_2)\| &= \left\| f\left(t, n \frac{u_1}{\|u_1\|}\right) - f\left(t, n \frac{u_2}{\|u_2\|}\right) \right\| \\ &\leq N_n n \left\| \frac{u_1}{\|u_1\|} - \frac{u_2}{\|u_2\|} \right\| = \frac{N_n n}{\|u_1\| \|u_2\|} \|u_1 \|u_2\| - u_2 \|u_1\| \| \\ &= \frac{N_n n}{\|u_1\| \|u_2\|} \|u_1 \|u_2\| - u_2 \|u_2\| + u_2 \|u_2\| - u_2 \|u_1\| \| \\ &\leq \frac{N_n n}{\|u_1\|} \|u_1 - u_2\| + \frac{N_n n}{\|u_1\|} \| \|u_1\| - \|u_2\| \| \leq 2N_n \|u_1 - u_2\|. \end{aligned}$$

(iii) 若 $\|u_1\| \leq n, \|u_2\| > n$, 则存在 $\eta \in L^2(\mathcal{O})^n$ 和 $\lambda \in [0, 1]$ 满足 $\|\eta\| = n, \eta = (1 - \lambda)u_1 + \lambda u_2$, 使得

$$\begin{aligned} \|f_n(t, u_1) - f_n(t, u_2)\| &\leq \|f_n(t, u_1) - f_n(t, \eta)\| + \|f_n(t, \eta) - f_n(t, u_2)\| \\ &\leq N_n \|u_1 - \eta\| + 2N_n \|\eta - u_2\| = N_n (\|u_1 - \eta\| + \|\eta - u_2\|) + N_n \|\eta - u_2\| \\ &= N_n \|u_1 - u_2\| + N_n \|\eta - u_2\| \leq 2N_n \|u_1 - u_2\|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

同理可得

$$\|G_n(t, u_1) - G_n(t, u_2)\| \leq 2N_n \|u_1 - u_2\|, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u_1, u_2 \in L^2(\mathcal{O})^n.$$

综上, $f_n(t, u)$ 和 $G_n(t, u)$ 满足全局 Lipschitz 条件 (3.8). 证毕. $\square$

接下来作如下假设:

(H3) (有限增长条件)

$$\|f(t, x)\|^2 \vee \|g(t, x)\|^2 \leq K^2(1 + |x|^2), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq t_0.$$

令 $X_T \triangleq L^2(\Omega, C([t_0 - r, T] \times \mathcal{O}, L^2(\mathcal{O}^n)), T \geq t_0$. 当 X_T 的模定义为 $\|u\|_{X_T} = (\sup_{t \in [t_0 - r, T]} E\|u(t)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ 时, X_T 是一个 Banach 空间. 令 $0 < M < \infty$, 记

$$\Sigma(M, T) = \{u(t) \in X_T : \|u\|_{X_T} \leq M\}.$$

由 $C = C([-r, 0], L^2(\mathcal{O}^n))$ 和 $\|u_t\|_C$ 的定义可知,

$$\|u\|_{X_T}^2 = \sup_{t \in [t_0 - r, T]} E\|u(t)\|^2 = \sup_{t \in [t_0, T]} \sup_{\theta \in [-r, 0]} E\|u(t + \theta)\|^2 = \sup_{t \in [t_0, T]} E\|u_t\|_C^2.$$

考虑如下补充方程:

$$\begin{cases} du = (Au + f_n(t, u_t))dt + G_n(t, u_t)dW, \\ u(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-r, 0], \quad \phi \in C_{\mathcal{F}_0}^b. \end{cases} \quad (3.10)$$

引理 3.1 若假设 (H1)–(H3) 成立, 则对任意 $M > 0$, 存在 $T_M \geq t_0$, 当 $E\|\phi\|_C^2 < \frac{M^2}{6}$ 时, 补充方程 (3.10) 具有属于 $\Sigma(M, T_M)$ 的唯一的 Mild 解 $u(t)$.

证明 对于任意 $u \in \Sigma(M, T)$, 定义 $z = \mathcal{T}u$ 为

$$z(t) = \begin{cases} S(t_0)\phi(0) + \int_{t_0}^t S(t-s+t_0)f_n(s, u_s)ds + \int_{t_0}^t S(t-s+t_0)G_n(s, u_s)dW, & t_0 \leq t \leq T, \\ \phi(t-t_0), & t_0 - r \leq t \leq t_0. \end{cases}$$

由 $(\sum_{i=1}^n a_i)^p \leq n^{p-1} \sum_{i=1}^n a_i^p$, $p \geq 2$ 可知,

$$E\|z(t)\|^2 \leq 3E\|S(t)\phi(0)\|^2 + 3E\left\|\int_{t_0}^t S(t-s+t_0)f_n(s, u_s)ds\right\|^2 + 3E\left\|\int_{t_0}^t S(t-s+t_0)G_n(s, u_s)dW\right\|^2.$$

又因为 $S(t)$ 是压缩映射, 则

$$3E\|S(t)\phi(0)\|^2 \leq 3E\|\phi(0)\|^2 \leq 3E\|\phi\|_C^2. \quad (3.11)$$

由命题 3.1、Hölder 不等式、(H2) 和 (H3) 可得

$$\begin{aligned} & 3E\left\|\int_{t_0}^t S(t-s+t_0)f_n(s, u_s)ds\right\|^2 \\ & \leq 3 \sup_{t \in [t_0, T]} (t-t_0)E \int_{t_0}^t \|f_n(s, u_s) - f_n(t, 0) + f_n(t, 0)\|^2 ds \\ & \leq 6(T-t_0) \int_{t_0}^T (E\|f_n(t, 0)\|^2 + N_n^2 E\|u_t\|^2) ds \\ & \leq 6(T-t_0) \int_{t_0}^T (E\|f_n(t, 0)\|^2 + N_n^2 E\|u\|_{X_T}^2) ds \\ & \leq 6(T-t_0)^2(K^2 + N_n^2 M^2). \end{aligned} \quad (3.12)$$

又由 Itô 积分的保矩变换^[19]、命题 3.1、(H1) 和 (H3) 可知,

$$\begin{aligned}
 & 3E \left\| \int_{t_0}^t S(t-s+t_0)G_n(s, u_s) dW \right\|^2 \\
 &= 3 \int_{t_0}^t E \|S(t-s+t_0)G_n(s, u_s)\|^2 ds \\
 &\leq 3 \int_{t_0}^t E \|G_n(s, u_s) - G_n(s, 0) + G_n(s, 0)\|^2 ds \\
 &\leq 6 \int_{t_0}^T (E \|G_n(t, 0)\|^2 + n_n^2 \|u\|_{X_T}^2) ds \\
 &\leq 6(T-t_0)(K^2 + N_n^2 M^2).
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

结合 (3.11)–(3.13), 即得

$$\|z(t)\|_{X_T}^2 \leq 3[E\|\phi\|_C^2 + 2(T-t_0)(K^2 + N_n^2 M^2) + 2(T-t_0)^2(K^2 + N_n^2 M^2)]. \tag{3.14}$$

因此, 对任意 $E\|\phi\|_C^2 < \frac{M^2}{6}$, 有 $\|z\|_{X_{T^*}}^2 \leq M^2$, 其中

$$\frac{M^2}{6} = 2(T^* - t_0)^2(K^2 + N_n^2 M^2) + 2(T^* - t_0)(K^2 + N_n^2 M^2). \tag{3.15}$$

由 (3.15) 可知,

$$T^* - t_0 = \frac{1}{2} \left[-1 + \left(1 + \frac{4M^2}{3(K^2 + N_n^2 M^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \right] > 0. \tag{3.16}$$

令 $u_1, u_2 \in \Sigma(M, T^*)$, $z_i(t) = \mathcal{T}u^i(t)$, $E\|z_{t_0}^i\|_C^2 < \frac{M^2}{6}$, $i = 1, 2$, $z = z_1 - z_2$, 则当 $t \in [t_0, T^*]$ 时, 有

$$z(t) = \int_{t_0}^t S(t-s+t_0)(f_n(s, u_s^1) - f_n(s, u_s^2)) ds + \int_{t_0}^t S(t-s+t_0)(G_n(s, u_s^1) - G_n(s, u_s^2)) dW.$$

由 Jenson 不等式可得

$$\begin{aligned}
 \|z(t)\|_{X_{T^*}}^2 &\leq 2 \sup_{t \in [t_0, T^*]} E \left\| \int_{t_0}^t S(t-s+t_0)(f_n(s, u_s^1) - f_n(s, u_s^2)) ds \right\|^2 \\
 &\quad + 2 \sup_{t \in [t_0, T^*]} E \left\| \int_{t_0}^t S(t-s+t_0)(G_n(s, u_s^1) - G_n(s, u_s^2)) dW \right\|^2.
 \end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式、 $S(t)$ 的压缩性质和 (H2) 可以得到

$$\begin{aligned}
 & 2 \sup_{t \in [t_0, T^*]} E \left\| \int_{t_0}^t S(t-s+t_0)(f_n(s, u_s^1) - f_n(s, u_s^2)) ds \right\|^2 \\
 &\leq 2 \sup_{t \in [t_0, T^*]} (t-t_0) E \int_{t_0}^t \|S(t-s+t_0)(f_n(s, u_s^1) - f_n(s, u_s^2))\|^2 ds \\
 &\leq 2 \sup_{t \in [t_0, T^*]} (t-t_0) \int_{t_0}^t E \|(f_n(s, u_s^1) - f_n(s, u_s^2))\|^2 ds \\
 &\leq 2(T^* - t_0) \int_{t_0}^{T^*} E \|f_n(s, u_s^1) - f_n(s, u_s^2)\|^2 ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2(T^* - t_0)^2 N_n^2 \sup_{t \in [t_0, T^*]} E \|u_t^1 - u_t^2\|_C^2 \\ &= 2(T^* - t_0)^2 N_n^2 E \|u^1 - u^2\|_{X_{T^*}}^2. \end{aligned}$$

同理, 由 Itô 积分的保矩变换、 $S(t)$ 的压缩性和 (H2) 可知,

$$2 \sup_{t \in [r_0, T^*]} E \left\| \int_{t_0}^t S(t-s+t_0)(G_n(s, u_s^1) - f_n(s, u_s^2)) dW \right\|^2 \leq 2N_n^2(T^* - t_0) \|u^1 - u^2\|_{X_{T^*}}^2.$$

从而,

$$\|\mathcal{T}u^1(t) - \mathcal{T}u^2(t)\|_{X_{T^*}}^2 \leq 2N_n^2(T^* - t_0)(T^* - t_0 + 1) \|u^1 - u^2\|_{X_{T^*}}^2. \quad (3.17)$$

因此, 我们令 $T^* - t_0$ 足够小, 使其满足

$$2N_n^2(T^* - t_0)(T^* - t_0 + 1) < 1. \quad (3.18)$$

显然, 存在正数 T^{**} 满足 (3.18). 令 $T_M = T^* \wedge T^{**}$, 则 $\mathcal{T}$ 是 $\Sigma(M, T_M)$ 上的严格压缩映射, 并且具有唯一的不动点 $u(t)$. 显然, $u(t)$ 是补充方程 (3.10) 属于 $\Sigma(M, T_M)$ 的 Mild 解. 证毕. $\square$

引理 3.2 若假设 (H1)–(H3) 成立, 则补充方程 (3.10) 的 Mild 解满足如下先验估计:

$$E \|u_t\|_C^2 \leq B(T_M), \quad t \in [t_0, T_M],$$

其中 $B(T_M)$ 是依赖于 T_M 的正数.

证明 令 $u(t)$ 是补充方程 (3.10) 的 Mild 解, 定义 Lyapunov 函数 $V(t) = e^{\lambda(t-t_0)} \|u\|^2$, $\lambda \geq 2\alpha\beta^2$, $t_0 \leq t \leq T_M$. 由 Itô 公式可得

$$dV = \mathcal{L}V dt + 2e^{\lambda(t-t_0)}(u, G_n dW), \quad (3.19)$$

其中微分算子 $\mathcal{L}V$ [19] 定义为

$$\mathcal{L}V = (\lambda V + 2e^{\lambda(t-t_0)}(u, Au) + 2e^{\lambda(t-t_0)}(u, f_n(t, u_t)) + e^{\lambda(t-t_0)} \text{tr}(G_n Q G_n^*)).$$

对 (3.19) 两边同时积分并取期望, 得

$$\begin{aligned} EV(t) &= E \|\phi(0)\|^2 + \lambda \int_{t_0}^t EV(s) ds + 2 \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} E(u, Au) ds \\ &\quad + 2 \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} E(u, f_n(s, u_s)) ds + \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} E \|G_n(s, u_s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

由 (H1)、引理 2.1 和命题 3.1 中的如下公式:

$$(u, Au) \leq -\alpha \|u\|^2, \quad \forall u \in H_0^1(\mathcal{O})^n, \quad (3.20)$$

可得

$$2 \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} E(u, Au) ds \leq -2\alpha \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} E \|u\|^2 ds \leq -2\alpha\beta^2 \int_{t_0}^t EV(s) ds. \quad (3.21)$$

利用 Young 不等式、(H2) 和 (H3) 可以得出

$$2 \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} E(u, f_n(s, u_s)) ds$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} (E\|u\|^2 + E\|f_n(s, u_s) - f_n(t, 0) + f_n(t, 0)\|^2) ds \\
 &\leq \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} (E\|u\|^2 + E2N_n^2\|u_s\|^2 + 2E\|f_n(t, 0)\|^2) ds \\
 &\leq \int_{t_0}^t EV(s) ds + 2N_n^2 e^{\lambda r} \int_{t_0}^t EV_s ds + e^{\lambda(T_M-t_0)} \int_{t_0}^t 2E\|f_n(t, 0)\|^2 ds \\
 &\leq \int_{t_0}^t EV(s) ds + 2N_n^2 e^{\lambda r} \int_{t_0}^t EV_s ds + 2K^2(T_M - t_0)e^{\lambda(T_M-t_0)}, \quad t_0 \leq t \leq T_M. \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

又由 (H2) 和 (H3) 知,

$$\int_{t_0}^t e^{\lambda s} E\|G_n(s, u_s)\|_2^2 ds \leq 2N_n^2 e^{\lambda r} \int_{t_0}^t EV_s ds + 2K^2(T_M - t_0)e^{\lambda(T_M-t_0)}, \quad t_0 \leq t \leq T_M.$$

显然,

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^t EV_s ds &= \int_{t_0}^t e^{\lambda(s+\theta-t_0)} E\|u(s+\theta)\|^2 ds \leq \int_{t_0-r}^t e^{\lambda(s-t_0)} E\|u(s)\|^2 ds \\
 &\leq \int_{t_0-r}^{t_0} E\|\phi(s)\|^2 ds + \int_{t_0}^t EV(s) ds \leq rE\|\phi\|_C^2 + \int_{t_0}^t EV(s) ds. \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

由 (3.21)–(3.23) 可以看出,

$$EV(t) \leq c_1 \int_{t_0}^t EV(s) ds + c_2,$$

其中

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \lambda - 2\alpha\beta^2 + 4N_n^2 e^{\lambda r} + 1 > 0, \\
 c_2 &= 4K^2(T_M - t_0)e^{\lambda(T_M-t_0)} + (1 + 4rN_n^2 e^{\lambda r})E\|\phi\|_C^2 > 0.
 \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式得

$$EV(t) \leq c_2 e^{c_1(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, T_M],$$

即

$$E\|u(t)\|^2 \leq c_2 e^{(c_1-\lambda)(t-t_0)} = c_2 e^{(-2\alpha\beta^2+4N_n^2 e^{\lambda r}+1)(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, T_M]. \quad (3.24)$$

综上所述, 存在常数 $B(T_M) \geq 0$ 使得

$$E\|u_t\|_C^2 \leq B(T_M), \quad t \in [t_0, T_M].$$

证毕. $\square$

命题 3.3 给定 $\phi \in C_{\mathcal{F}_0}^b$, 若方程 (1.1) 满足 (H1)–(H3), 则补充方程 (3.10) 存在全局 Mild 解 u .

证明 由引理 3.1 和 3.2 可知, 补充方程 (3.10) 存在有界的唯一 Mild 解 $u(t)$, $t \in [t_0, T_M]$, 故对任意 $T > 0$, $u(t)$ 可以延拓到 $[t_0, T]$ 上. 因为 $u(t)$ 在 $[t_0, \infty)$ 的每个子区间 $[t_0, T]$ 上都有定义, 所以, 补充方程 (3.10) 具有定义在 $[t_0, \infty)$ 上的唯一的全局解 $u(t)$ (参见文献 [16]). 证毕. $\square$

定理 3.1 假设 $\phi \in C_{\mathcal{F}_0}^b$, 若方程 (1.1) 满足假设 (H1)–(H3), 则补充方程 (3.10) 的解 $u(t)$ 几乎必然收敛于方程 (1.1) 的全局 Mild 解 $u^*(t)$, 即方程 (1.1) 几乎必然存在唯一的全局 Mild 解 $u^*(t)$.

证明 由命题 3.3 知, 补充方程 (3.10) 存在全局 Mild 解 $u(t)$, 故对任意 $T > 0$ 存在 $B(T) > 0$ 使得 $E\|u(t)\|^2 \leq B(T)$, $t \in [t_0, T]$. 对于 $n \in \mathbb{N}$, 定义停时^[19] 为

$$\tau_n = T \wedge \inf\{t \in [t_0, T] : \|u(t)\| \geq n\},$$

其中 $\inf \emptyset = \infty$. 令 $u_n(t) = u(t)$, $t \in [t_0, \tau_n]$, 则 $u_n(t)$ 是补充方程 (3.10) 和 (1.1) 的 Mild 解. 下面证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n(t)$ 几乎必然收敛于方程 (1.1) 的 Mild 解 $u^*(t)$. 由 Chebyshev 不等式可得

$$P\{\tau_n \leq T\} \leq P\left\{\sup_{t \in [t_0, T]} \|u_n(t)\| \geq n\right\} \leq \frac{E \sup_{t \in [t_0, T]} \|u_n(t)\|^2}{n^2} \leq \frac{B(T)}{n^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{a.s.}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} P\{\tau_n \leq T\}$ 是收敛级数, 应用 Borel-Contelli 引理有

$$P\{\tau_{\infty} \leq T\} = 0,$$

其中 $\tau_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$. 若 $n \leq n'$, 则 $\tau_n \leq \tau_{n'}$ 几乎必然成立 (参见文献 [17]), 故 $\tau_{\infty} = T$ 几乎必然成立. 对于 $t \in [t_0, T]$, 定义 $u^*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$, 则 $u^*(t)$ 是方程 (1.1) 在 $[t_0, T]$ 上唯一的 Mild 解. 由于 $u^*(t)$ 定义在 $[t_0, \infty)$ 的每一个有限子区间 $[t_0, T]$ 上, 所以, 方程 (1.1) 具有定义在 $[t_0, \infty)$ 上唯一的 Mild 解几乎必然成立 (参见文献 [16]). 证毕. $\square$

注 3.1 在比全局 Lipschitz 条件和有限增长条件更弱的条件下, 我们利用截距法证明了方程 (1.1) 全局 Mild 解的存在唯一性, 故本文的结论和截距法对 SPFDEs 十分重要.

4 Mild 解的渐近行为

进一步作如下假设:

(H4) (全局 Lipschitz 条件) 存在常数 $N \geq 0$, 使得 $\|f(t, u) - f(t, v)\| \vee \|G(t, u) - G(t, v)\|_2 \leq N\|u - v\|$, $t \in \mathbb{R}$, $u, v \in L^2(\mathcal{O})^n$.

(H5) $\lambda = 2\alpha\beta^2 - 1 - 4N^2 > 0$, $0 \leq r \leq \frac{\ln \frac{\lambda+4N^2}{\lambda}}{\lambda}$.

定理 4.1 若方程 (1.1) 满足假设 (H1) 和 (H3)–(H5), 则方程 (1.1) 的平凡解是全局均方指数稳定的.

证明 因为假设 (H2) 是比假设 (H4) 更弱的条件, 所以, 由定理 3.1 知, 在假设 (H1)、(H3) 和 (H4) 下, 方程 (1.1) 存在唯一的全局 Mild 解, 记为 $u(t)$. 定义如下 Lyapunov 函数:

$$V(t) = e^{\lambda(t-t_0)} \|u(t)\|^2.$$

由 Itô 定理^[16] 可知,

$$dV(t) = \mathcal{L}V dt + e^{\lambda(t-t_0)}(u, GdW), \quad (4.1)$$

其中微分算子定义为

$$\mathcal{L}V = \lambda V + 2e^{\lambda(t-t_0)}(u, Au) + 2e^{\lambda(t-t_0)}(u, f(t, u_t)) + e^{\lambda(t-t_0)} \text{tr}(GQG^*). \quad (4.2)$$

对 (4.2) 两端积分并取期望, 得

$$EV(t) = E\|\phi(0)\|^2 + \lambda \int_{t_0}^t EV(s) ds + 2 \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} E(u, Au) ds$$

$$+ 2 \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} E(u, f(s, u_s)) ds + \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} E\|G(s, u_s)\|^2 ds. \quad (4.3)$$

由 (3.20) 和引理 2.1 可得

$$2 \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} E(u, Au) ds \leq -2\alpha\beta^2 \int_{t_0}^t EV(s) ds. \quad (4.4)$$

因为方程 (1.1) 有平凡解, 所以, $f(t, 0) = 0$, $G(t, 0) = 0$. 由 Cauchy 不等式和全局 Lipschitz 条件可知,

$$\begin{aligned} 2 \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} E(u, f(s, u_s)) ds &\leq \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} E(\|u(s)\|^2 + \|f(s, u_s)\|^2) ds \\ &= \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} E(\|u(s)\|^2 + \|f(s, u_s) - f(s, 0) + f(s, 0)\|^2) ds \\ &\leq \int_{t_0}^t EV(s) ds + 2N^2 e^{\lambda r} \int_{t_0}^t EV_s ds, \end{aligned} \quad (4.5)$$

并且

$$\int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} E\|G(s, u_s)\|^2 ds = \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} E\|G(s, u_s) - G(s, 0) + G(s, 0)\|^2 ds \leq 2N^2 e^{\lambda r} \int_{t_0}^t EV_s ds. \quad (4.6)$$

将 (4.4)–(4.6) 代入 (4.3), 有

$$EV(t) \leq \|\phi\|_C^2 + (\lambda - 2\alpha\beta^2 + 1) \int_{t_0}^t EV(s) ds + 4N^2 e^{\lambda r} \int_{t_0}^t EV_s ds, \quad t \geq t_0. \quad (4.7)$$

又由 (3.23) 可得

$$\int_{t_0}^t EV_s ds \leq r E\|\phi\|_C^2 + \int_{t_0}^t EV(s) ds. \quad (4.8)$$

故

$$EV(t) \leq (1 + 4rN^2 e^{\lambda r}) E\|\phi\|_C^2 + (\lambda - 2\alpha\beta^2 + 4N^2 e^{\lambda r} + 1) \int_{t_0}^t EV(s) ds, \quad t \geq t_0. \quad (4.9)$$

记 $\delta = 2\alpha\beta^2 - 4N^2 e^{\lambda r} - 1$. 由假设 (H5) 可知, $\lambda - \delta = 4N^2(e^{\lambda r} - 1) \geq 0$. 对 (4.9) 应用 Gronwall 不等式有

$$EV(t) \leq (1 + 4rN^2 e^{\lambda r}) E\|\phi\|_C^2 e^{(\lambda - \delta)(t - t_0)}, \quad (4.10)$$

即

$$E\|u(t)\|^2 \leq (1 + 4rN^2 e^{\lambda r}) E\|\phi\|_C^2 e^{-\delta(t - t_0)}. \quad (4.11)$$

又因为 $0 \leq r < \frac{\ln \frac{\lambda + 4N^2}{4N^2}}{\lambda}$, 则 $-\delta = -2\alpha\beta^2 + 4N^2 e^{\lambda r} + 1 < -2\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta^2 - 1 + 1 = 0$, 故方程 (1.1) 的平凡解是全局均方指数稳定的. 证毕. $\square$

注 4.1 定理 4.1 揭示了方程 (1.1) 平凡解的稳定性依赖于黏性常数 α 、Poincaré 常数 β 、Lipschitz 常数 N 和时滞常数 r , 所以定理 4.1 十分重要.

5 例子

例 5.1 考虑如下 SPFDEs:

$$\begin{cases} du = (\alpha \Delta u + f(u_t))dt + G(u_t)dW(t), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial m} \right|_{\partial \mathcal{O}} = 0, \quad t \geq t_0 = 0, \quad u(t_0 + \theta, x, \omega) = \varphi(\theta, x, \omega) \in C_{\mathcal{F}_0}^b, \\ -1 \leq \theta \leq 0, \quad x \in \mathcal{O} = (0, 1), \quad \omega \in \Omega. \end{cases} \quad (5.1)$$

其中

$$\begin{aligned} u &= (u_1(t, x, \omega), u_2(t, x, \omega))^T, \quad u_t = (u_1(t + \theta, x, \omega), u_2(t + \theta, x, \omega))^T, \\ f(u_t) &= \left(\sin \frac{u_1(t + \theta, x, \omega)}{2^{\frac{1}{2}}}, \frac{1 - \cos u_2(t + \theta, x, \omega)}{2^{\frac{1}{2}}} \right)^T, \\ G(u_t) &= (u_1(t + \theta, x, \omega), u_2(t + \theta, x, \omega))^T, \end{aligned}$$

$D_{ij} = \alpha > \frac{5}{2}$ ($i, j = 1, 2$), $L^2(\mathcal{O})^n = L^2(\mathcal{O})^2$, $L^2(\mathcal{O})^m = \mathbb{R}$, $\text{tr} Q = 1$, $\beta \geq 1$, $\nabla \cdot (D(x) \circ \nabla u) = \alpha \Delta u$, Δ 表示 Laplace 算子, $W(t)$ 是一维标准 Brown 运动, $\mathcal{O} = (0, 1) \in \mathbb{R}$, 则方程 (5.1) 的平凡解是均方指数稳定的.

证明 线性算子 $A = \alpha \Delta u$ ($u \in D(A) = H^2(\mathcal{O})^2 \cap H_0^1(\mathcal{O})^2$) 对应于一个强连续的解析半群 $S(t)$, 并且 $\|S(t)\| \leq 1$. 由

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(v)\|^2 &= \int_0^1 \left[\left(\frac{\sin(u_1) - \sin(v_1)}{2^{\frac{1}{2}}} \right)^2 + \left(\frac{\cos(u_2) - \cos(v_2)}{2^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \right] dx \leq \|u - v\|^2, \\ \|G(u) - G(v)\|^2 &= \int_0^1 [(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2] dx = \|u - v\|^2, \end{aligned}$$

可知

$$\|f(u) - f(v)\| \vee \|G(u) - G(v)\|_2 \leq \|u - v\|, \quad \|f(u)\|^2 \vee \|G(u)\|_2^2 \leq 1 + \|u\|^2, \quad u \in \mathbb{R}^2.$$

因为 $\beta \geq 1$, $\alpha > \frac{5}{2}$, $N > 1$, 所以, 由定理 4.1 知, 若 $0 \leq r < \frac{\ln \frac{\lambda+4}{4}}{\lambda}$, 则方程 (5.1) 的平凡解是均方指数稳定的. 证毕. $\square$

参考文献

- 1 Bergé B, Chueshov I D, Vuillermot P A. On the behavior of solutions to certain parabolic SPDE's driven by Wiener processes. Stochastic Process Appl, 2001, 92: 237–263
- 2 Charaballo T. Asymptotic Exponential Stability of Stochastic Partial Differential Equations with Delay. New York: Stochastica, 1976
- 3 Chow P L. Stability of nonlinear stochastic evolutions. J Math Anal Appl, 1982, 89: 400–409
- 4 Liu K. On stability for a class of semilinear stochastic evolution equations. Stochastic Process Appl, 1997, 70: 219–241
- 5 Peter K. Existence, uniqueness and smoothness for a class of function valued stochastics partial differential equations. Stochastics, 1992, 41: 177–199
- 6 Manthey R, Maslowski B. Qualitative behaviour of solutions of stochastic reaction-diffusion equations. Stochastic Process Appl, 1992, 43: 265–289
- 7 Peng S, Zhu X. Necessary and sufficient condition for comparison theorem of 1-dimensional stochastic differential equations. Stochastic Process Appl, 2006, 116: 370–380

- 8 Zhang X. Regularities for semilinear stochastic partial differential equations. *J Funct Anal*, 2007, 249: 454–476
- 9 Liu K. Uniform stability of autonomous linear stochastic functional equations in infinite dimensions. *Stochastic Process Appl*, 2005, 115: 1131–1165
- 10 Mao X. *Exponential Stability of Stochastic Differential Equations*. New York: Marcel Dekker, 1994
- 11 Mohammed S E A. *Stochastic Functional Differential Equations*. Boston: Pitman Advanced Publishing Program, 1984
- 12 Shen Y, Luo Q, Mao X. The improved LaSalle-type theorems for stochastic functional differential equations. *J Math Anal Appl*, 2006, 318: 134–154
- 13 Wang L. *Delayed Recurrent Neural Networks*. Beijing: Science Press, 2008
- 14 Xu D, Wang X, Yang Z. Further results on existence-uniqueness for stochastic functional differential equations. *Sci China Math*, 2013, 56: 1169–1180
- 15 Xu D, Yang Z, Huang Y. Existence-uniqueness and continuation theorems for stochastic functional equations. *J Differential Equations*, 2008, 245: 1681–1703
- 16 Arnold L. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. New York: Wiley, 1974
- 17 Kunita H. *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990
- 18 Jahanipur R. Stochastic functional evolution equations with monotone nonlinearity: Existence and stability of the mild solutions. *J Differential Equations*, 2010, 248: 1230–1255
- 19 Mao X. *Stochastic Differential Equations and Applications*. 2nd ed. Cambridge: Woodhead Publishing, 2010
- 20 Taniguchi T. Almost sure exponential stability for stochastic partial functional differential equations. *Stochastic Process Appl*, 1998, 16: 965–975
- 21 Wang L, Xu D. Global exponential stability of Hopfield reaction-diffusion neural networks with time-varying delays. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2003, 46: 466–474
- 22 Wang L, Zhang Z, Wang Y. Stochastic exponential stability of the delayed reaction-diffusion recurrent neural networks with Markovian jumping parameters. *Phys Lett A*, 2008, 372: 3201–3209
- 23 Wang L, Xu D. Asymptotic behavior of a class of reaction-diffusion equations with delays. *J Math Anal Appl*, 2003, 281: 439–453

Global well-posedness and stability of the mild solutions for a class of stochastic partial functional differential equations

WANG LinShan

Abstract The aim of this paper is to develop some theories of stochastic partial functional differential equations (SPFDEs) driven by infinite dimensional Wiener processes under the quasi-local Lipschitz condition and the restriction growth condition. Firstly, we establish the existence-uniqueness theorem of the global mild solutions for SPFDEs by using the intercept technique. Then, we discuss asymptotic behavior of the solutions. Furthermore, some criteria of exponential stability in the mean square are obtained by using Lyapunov method. An example is provided to show the effectiveness of the theoretical results.

Keywords stochastic partial functional differential equations, mild solution, existence-uniqueness, stability

MSC(2010) 34A01, 34A02, 34K20, 34K50

doi: 10.1360/012016-14