不等式约束条件下经验似然法在两总体中位数检验中的应用

邓国华

江西财经大学统计学院, 南昌 330013

E-mail: dghpsq@163.com

收稿日期: 2012-10-30; 接受日期: 2013-03-28

国家自然科学基金 (批准号: 71161011) 资助项目

摘要 本文中, Owen 引入的经验似然方法被用于参数空间带不等式约束的两总体中位数的比较. 迄今为止, 还没有人研究过该问题. 这是因为, 在构造经验似然函数过程中所使用的辅助函数不是光滑函数, 因而不是凸函数, 从而使研究难度大大增加. 然而, 通过引入经验过程的办法, 本文很巧妙地解决了此问题. 根据经验过程, 本文证明了两中位数比较的经验似然比检验统计量的极限分布要么是单一的卡方分布, 要么是两个卡方分布的等权混合分布. 这一理论结果得到了模拟运算结果的有力支持.

关键词 两样本中位数 经验似然 不等式约束 最不利点集

MSC (2010) 主题分类 62G10

1 序言

中位数是统计分布的最重要特征量之一. 例如, 在经济研究中, 中位数 (而不是算术平均数) 被广泛用于衡量一国民众年收入水平或用于两国民众年收入水平之间的比较, 这是因为统计上中位数比算术平均数更稳健. 因此, 如果想知道美国民众是否比日本民众更富裕, 只要比较这两个国家之间民众年收入中位数就够了. 统计上, 这样的比较问题可被归纳为检验两中位数中的一个是否大于另一个的问题.

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是从总体 F_1 中抽取的一个 i.i.d. 样本, 而 $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 是从总体 F_2 中抽取的另一个 i.i.d. 样本. F_1 和 F_2 都是未知总体, 假设样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 与样本 $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 的抽取过程是彼此独立的. 本文感兴趣的是两个总体 F_1 与 F_2 之间的比较, 尤其感兴趣的是两总体 F_1 和 F_2 的中位数是否有序, 也就是说其中一个是否大于另一个的问题. 另外, 假使已经知道两个中位数是有序的, 我们想知道它们是否实际上又是相等的. 诸如此类的不等式约束条件下两总体中位数比较问题在实践中是显然大量存在的, 也因此成为本文的研究目标.

事实上, 在已有的文献中, 对中位数的比较问题是不缺乏关注的. 其中比较一般化的研究是对两总体分位数点的检验. 如果我们只是对不带任何约束的两总体分位数相等问题感兴趣, 传统的非参数检验统计量只需利用两样本的分位数差就可构造出来, 检验方案因此就可以使用正态近似的办法设计出来. 解决该问题的另一种非参数方法是 Owen^[1,2] 引入的经验似然方法. Qin 和 Zhao^[3] 第一次运用此方法为两总体分位数之差构造置信区间, 他们指出经验似然比检验统计量渐近服从卡方分布.

英文引用格式: Deng G H. Empirical likelihood method employed in the comparison of two sample medians under inequality constraints (in Chinese). Sci Sin Math, 2013, 43: 913–924, doi: 10.1360/012012-526

利用所谓“半经验似然”方法, Qin 和 Zhang^[4] 对缺失数据研究了相同问题; 进一步, Valeinis 等人^[5] 运用光滑经验似然方法对两分位数之差构造了联合置信带, 更多的关于此问题的研究可以从 Valeinis 等人^[5] 所列的参考文献中找到. 作为参数估计的对偶问题, 两中位数是否相等的检验方案便很容易构造出来. 另外, 基于有序的批量样本, Ozturk 和 Balakrishnan^[6] 对两样本分位数之差提出了一种精确的非参数检验法. 以上提及所有的基于经验似然比检验方法的研究全部是在两个分位数点不受任何约束的条件下进行的. 以下将考虑不等式约束条件下的经验似然比检验问题.

经验似然方法是一种流行的非参数方法. 自 Owen^[1] 引入以来, 得到广泛而深入的研究, 这一点读者只要阅读文献 [7] 这一专著就行. 与正态近似方法相比, 使用经验似然方法有如下两大优势: 其一, 不需要对方差进行估计; 其二, 置信域不必在几何图形上对称. 已有的对经验似然的大多数研究均集中于无约束参数空间中进行. El Barmi^[8] 首次在感兴趣的参数满足一系列不等式约束的条件下研究经验似然比检验问题. 他证明了经验似然比统计量服从加权混合卡方分布. 通过运用不同的方法, Chen 和 Shi^[9] 研究了不等式约束下均值似然比假设检验问题, 给出了双边经验似然比检验方法和局部功效的表示. Yu 等人^[10] 则推广到不等式约束下多样本均值的经验似然比检验问题. 正如所看到的那样, El Barmi^[8], Chen 和 Shi^[9] 以及 Yu 等人^[10] 在构造经验似然函数时都要求辅助函数是光滑的. 然而, 本文中的经验似然函数却是用非光滑函数构造的. 在使用非光滑辅助函数和带不等式约束的条件下, 我们感兴趣的不仅是来自于两总体的中位数是否有序, 更是已知它们有序而事实上它们是否相等的问题.

本文所使用的方法克服了 El Barmi^[8], Chen 和 Shi^[9] 以及 Yu 等人^[10] 研究中遇到的问题, 即他们的方法对非光滑函数不适用. 我们成功地解决此问题的办法是引入了经验过程的理论. 本文证明了两中位数比较的经验似然比检验统计量的极限分布要么是单一的卡方分布, 要么是两个卡方分布的等权混合分布.

全文安排如下: 文献综述放在第 1 节; 主要理论结果放在第 2 节; 模拟运算结果放在第 3 节; 定理的证明放在第 4 节. 在本文文中若未作特别说明, 我们约定所有的极限都是在假设 $n + m \rightarrow \infty$ 时, $n(n + m)^{-1} \rightarrow \eta \in (0, 1)$ 的条件下取得的.

2 主要结论

本节给出经验似然比检验统计量极限分布的三个定理.

设有两个独立样本: $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} F_1$ 和 $Y_1, Y_2, \dots, Y_m \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} F_2$. M_X 和 M_Y 分别是两样本中位数, 而 M_1 和 M_2 分别是两总体中位数. 本文假定当 $(n + m) \rightarrow \infty$ 时, $n(n + m)^{-1} \rightarrow \eta \in (0, 1)$.

定义 $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ 如下:

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \{(M_1, M_2) : M_1 = M_2, (M_1, M_2) \in \mathbb{R}^2\}, \\ \Omega_1 &= \{(M_1, M_2) : M_1 \geq M_2, (M_1, M_2) \in \mathbb{R}^2\}, \\ \Omega_2 &= \{(M_1, M_2) : (M_1, M_2) \in \mathbb{R}^2\}.\end{aligned}$$

我们感兴趣的是检验问题: $H_0 \leftrightarrow H_2 - H_0$, $H_0 \leftrightarrow H_1 - H_0$ 和 $H_1 \leftrightarrow H_2 - H_1$, 其中,

$$\begin{aligned}H_0 &: (M_1, M_2) \in \Omega_0, \\ H_1 &: (M_1, M_2) \in \Omega_1,\end{aligned}$$

$$H_2 : (M_1, M_2) \in \Omega_2.$$

根据 Owen^[1,2], Jing^[11] 和 Liu 等人^[12] 的研究, (M_1, M_2) 的两样本经验似然函数当如下定义:

$$L(M_1, M_2) = \sup_{(\{p_i\}_{i=1}^n, \{q_j\}_{j=1}^m) \in \Theta} \prod_{i=1}^n p_i \prod_{j=1}^m q_j, \quad (2.1)$$

其中,

$$\Theta = \left\{ (\{p_i\}_{i=1}^n, \{q_j\}_{j=1}^m) : \begin{array}{l} p_i \geq 0, q_j \geq 0, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1, \sum_{i=1}^n p_i \left(I(X_i \leq M_1) - \frac{1}{2} \right) = 0, \\ \sum_{j=1}^m q_j = 1, \sum_{j=1}^m q_j \left(I(Y_j \leq M_2) - \frac{1}{2} \right) = 0 \end{array} \right\}.$$

(2.1) 与 El Barmi^[8] 中所定义的经验似然函数形式上有些不同. 对任意固定的 $(M_1, M_2) \in \mathbb{R}^2$, 运用 Lagrange 乘数法我们可得如下结果:

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(M_1) = \frac{1}{n[1 + \lambda_1(I(X_i \leq M_1) - \frac{1}{2})]}, \quad 1 \leq i \leq n, \\ q_j &= q_j(M_2) = \frac{1}{m[1 + \lambda_2(I(Y_j \leq M_2) - \frac{1}{2})]}, \quad 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

这使得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \lambda_1(I(X_i \leq M_1) - \frac{1}{2})} &= n \sum p_i = n, \\ \sum_{j=1}^m \frac{1}{1 + \lambda_2(I(Y_j \leq M_2) - \frac{1}{2})} &= m \sum q_j = m, \end{aligned}$$

此处, λ_1 和 λ_2 是 Lagrange 乘子并满足

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{I(X_i \leq M_1) - \frac{1}{2}}{1 + \lambda_1(I(X_i \leq M_1) - \frac{1}{2})} &= 0, \\ \sum_{j=1}^m \frac{I(Y_j \leq M_2) - \frac{1}{2}}{1 + \lambda_2(I(Y_j \leq M_2) - \frac{1}{2})} &= 0. \end{aligned}$$

注意, λ_1 和 λ_2 分别是 M_1 和 M_2 的隐函数.

这样, (2.1) 能被改写成如下形式:

$$L(M_1, M_2) = \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1}{m}\right)^m \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + \lambda_1(I(X_i \leq M_1) - \frac{1}{2})} \prod_{j=1}^m \frac{1}{1 + \lambda_2(I(Y_j \leq M_2) - \frac{1}{2})}.$$

如果关于 (M_1, M_2) 没有任何约束条件, 以下表达式很容易被证明成立:

$$\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_2} L(M_1, M_2) = L(\hat{M}_1, \hat{M}_2)(1 + o(1)) = \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1}{m}\right)^m (1 + o(1)). \quad (2.2)$$

2.1 检验 $H_0 \leftrightarrow H_2 - H_0$

对于检验问题 $H_0 \leftrightarrow H_2 - H_0$, 对数经验似然比检验统计量定义如下:

$$T_{02} = -2 \log \frac{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_0} L(M_1, M_2)}{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_2} L(M_1, M_2)}.$$

考虑经验似然函数 $K(M) = \max_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \prod_{i=1}^n p_i \prod_{j=1}^m q_j$ 使得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i &= 1, & \sum_{i=1}^n p_i I(X_i \leq M) &= \frac{1}{2}, \\ \sum_{j=1}^m q_j &= 1, & \sum_{j=1}^m q_j I(Y_j \leq M) &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

令

$$\hat{M}_{n,m} = \operatorname{argmax}_M K(M). \quad (2.4)$$

记 $M_0 \stackrel{\text{def}}{=} M_1 = M_2$, 则在假设 H_0 为真的前提下如下定理成立, 该定理给出了检验统计量 T_{02} 的渐近零分布.

定理 2.1 设对于总体 F_1 和 F_2 分别存在唯一的中位数 M_1 和 M_2 . F_1 和 F_2 在 M_1 和 M_2 附近分别同时存在正的密度函数且有有限的二阶导数. 记 $f_1(M_1) = F_1'(M_1) > 0$, $f_2(M_2) = F_2'(M_2) > 0$ 并沿用前述记号, 则有

$$\sqrt{n f_1^2(M_0) + m f_2^2(M_0)} (\hat{M}_{n,m} - M_0) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{4}\right), \quad \text{若 } n, m \rightarrow \infty, \quad (2.5)$$

这使得

$$T_{02} \xrightarrow{d} \chi_1^2, \quad \text{若 } n, m \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

由定理 2.1, 对于给定的显著性水平 α , 如果 $T_{02} > c_\alpha$, 则拒绝原假设 H_0 , 其中 c_α 由 $P(\chi_1^2 \geq c_\alpha) = \alpha$ 决定.

2.2 检验 $H_0 \leftrightarrow H_1 - H_0$

对于检验问题 $H_0 \leftrightarrow H_1 - H_0$, 对数经验似然比检验统计量定义如下:

$$T_{01} = -2 \log \frac{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_0} L(M_1, M_2)}{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_1} L(M_1, M_2)}.$$

定理 2.2 在与定理 2.1 相同的条件下, 如果 $(M_1, M_2) \in \Omega_0$, 则

$$T_{01} \xrightarrow{d} \frac{1}{2} \chi_1^2 + \frac{1}{2} \chi_0^2,$$

此处, χ_0^2 是在零点处具有质量 1 的退化随机变量.

由定理 2.2, 对于给定的显著性水平 α , 如果 $T_{01} > c_\alpha$, 则拒绝原假设 H_0 , 其中 c_α 由下式决定,

$$\frac{1}{2} P(\chi_0^2 \geq c_\alpha) + \frac{1}{2} P(\chi_1^2 \geq c_\alpha) = \alpha.$$

容易推出 $c_\alpha = \chi_{1, 1-2\alpha}^2$.

2.3 检验 $H_1 \leftrightarrow H_2 - H_1$

对于检验问题 $H_1 \leftrightarrow H_2 - H_1$, 对数经验似然比检验统计量定义如下:

$$T_{12} = -2 \log \frac{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_1} L(M_1, M_2)}{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_2} L(M_1, M_2)}.$$

检验统计量 T_{12} 的渐近分布比检验统计量 T_{01} 的渐近分布复杂得多, 这取决于 (M_1, M_2) 位于 Ω_1 中的何处.

定理 2.3 在与定理 2.1 相同的条件下, 对于任何固定的 $(M_1, M_2) \in \Omega_1$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{T_{12} > c_\alpha\} = \begin{cases} \alpha, & \text{如果 } (M_1, M_2) \in \Omega_0, \\ 0, & \text{如果 } (M_1, M_2) \in \Omega_1 \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

由定理 2.3, 为控制第一类错误, 对于给定的显著性水平, 如果 $T_{12} > c_\alpha$, 则拒绝 H_1 . 很显然, Ω_0 是 Ω_1 中的最不利点集.

3 模拟运算

本节将给出对数经验似然比统计量 T_{02} , T_{01} 和 T_{12} 的模拟运算结果.

在下面三个表中, 样本所在的总体都具有相同的中位数 1. 其中样本 X 全部抽自于中位数为 1 的正态总体, 样本 Y 则抽自彼此不同但中位数也为 1 的总体. 表 1 中, 样本 Y 抽自于正态总体; 表 2 中, 样本 Y 抽自于均值 $\mu = 1.4427$ (如此, 则其中位数恰好为 1) 的指数分布总体; 而表 3 中, 样本 Y 则抽

表 1 $X \sim N(1, 1)$ vs $Y \sim N(1, 2)$

N	M	有约束经验似然	无约束经验似然	t -检验
60	60	0.033	0.036	0.037
60	200	0.023	0.032	0.038
60	600	0.032	0.031	0.033
60	2000	0.048	0.045	0.041
200	60	0.040	0.038	0.033
200	200	0.035	0.030	0.036
200	600	0.035	0.032	0.049
200	2000	0.029	0.025	0.023
600	60	0.037	0.047	0.032
600	200	0.055	0.043	0.033
600	600	0.041	0.035	0.042
600	2000	0.037	0.035	0.035
2000	60	0.064	0.061	0.047
2000	200	0.050	0.044	0.038
2000	600	0.047	0.039	0.048
2000	2000	0.041	0.039	0.036

表 2 $X \sim N(1, 1)$ vs $Y \sim \text{Exp}(1.4427)$

N	M	有约束经验似然	无约束经验似然	t - 检验
60	60	0.039	0.033	0.057
60	200	0.035	0.027	0.000
60	600	0.042	0.042	0.000
60	2000	0.045	0.046	0.000
200	60	0.034	0.028	0.154
200	200	0.046	0.052	0.069
200	600	0.040	0.031	0.003
200	2000	0.043	0.041	0.000
600	60	0.028	0.022	0.230
600	200	0.039	0.035	0.152
600	600	0.031	0.041	0.061
600	2000	0.048	0.044	0.002
2000	60	0.036	0.033	0.257
2000	200	0.049	0.038	0.242
2000	600	0.040	0.040	0.142
2000	2000	0.061	0.046	0.054

自于均匀分布 $U(0, 2)$ 总体. 在所有这些表中, 重抽样次数均为 1000 次. 样本 X 的容量分别为 $N = 60, 200, 600, 2000$, 样本 Y 的容量也分别为 $N = 60, 200, 600, 2000$. 表中介于 0 和 1 之间的数是两样本在不同样本容量组合下检验对零假设 H_0 为真时的拒绝概率. 容易看出, 当两个总体均为对称分布总体时, 不论有无约束条件, 经验似然方法的检验结果均略逊色于参数统计下的 t - 检验结果; 但一旦两总体中至少有一个为非正态总体尤其是为非对称总体时, 经验似然方法的检验结果则显著优于参数统计下的 t - 检验结果, 而这正是我们所期望的.

为了显示三种检验的功效, 我们画出了三个功效比较图. 对于每一个图, 从具有相同中位数的正态总体中随机抽取两个数据组进行模拟运算, 样本容量为 1000. 事实上, 数据组 X 来自于中位数为 1 的正态分布, 而数据组 Y 来自于中位数为 $1 + \tau$ 的正态分布, 此处 $\tau \in [0, 0.5]$ 或者 $[-0.5, 0.5]$, 重复抽样次数为 1000 次.

图 1(a) 显示了检验 $H_0 \leftrightarrow H_2 - H_0$ 的功效曲线. 可以看出, 只有当 M_2 与 M_1 非常接近时, T_{02} 拒绝零假设的概率才很小 (接近于 0.05), 一旦 M_2 远离 M_1 , 则不论是从哪个方向远离, 上述拒绝概率都将急剧变大. 从图 1(b) 可以看出对数经验似然比统计量 T_{01} 的功效曲线. 在此图中, 我们对不等式约束条件下两样本中位数经验似然比检验、无约束条件下对应经验似然比检验和参数统计下对应 t 检验的三条功效曲线进行了比较. 可以看出, 我们的检验 $H_0 \leftrightarrow H_1$ 比通常的检验更有效. 至于检验 $H_1 \leftrightarrow H_2 - H_1$, 如果 $M_2 > M_1$, 则检验统计量 T_{12} 拒绝零假设的概率很小, 但一旦 $M_2 < M_1$, 则该概率将急剧变大. 图 1(c) 清楚地显示了这一趋势. 从图 1(c) 中我们很容易能得出这样的结论, 即 $M_1 = M_2$ 是检验的最不利点, 这可以被表示为 ($\alpha = 0.05$)

$$P\{T_{12}(M_1, M_2) > c_\alpha\} \begin{cases} = \alpha, & \text{如果 } M_1 = M_2, \\ < \alpha, & \text{如果 } M_1 > M_2. \end{cases}$$

表 3 $X \sim N(1, 1)$ vs $Y \sim U(0, 2)$

N	M	有约束经验似然	无约束经验似然	t -检验
60	60	0.040	0.039	0.043
60	200	0.040	0.039	0.049
60	600	0.038	0.045	0.033
60	2000	0.031	0.041	0.030
200	60	0.028	0.025	0.049
200	200	0.041	0.044	0.051
200	600	0.040	0.045	0.036
200	2000	0.047	0.034	0.026
600	60	0.041	0.036	0.065
600	200	0.040	0.037	0.046
600	600	0.041	0.038	0.044
600	2000	0.045	0.039	0.046
2000	60	0.031	0.035	0.061
2000	200	0.035	0.033	0.045
2000	600	0.042	0.037	0.041
2000	2000	0.042	0.042	0.043

图 1 (a) 检验 $H_0 \leftrightarrow H_2 - H_0$ 的势函数曲线; (b) 检验 $H_0 \leftrightarrow H_1 - H_0$ 的势函数曲线; (c) 检验 $H_1 \leftrightarrow H_2 - H_1$ 的势函数曲线

4 定理的证明

引理 4.1 设 (2.1) 定义的函数为连续函数, 则其具有如下数学性质:

$$\sup_{M_1 \geq M_2} L(M_1, M_2) = I(\hat{M}_1 \geq \hat{M}_2) \sup_{(M_1, M_2) \in \mathbb{R}^2} L(M_1, M_2) + I(\hat{M}_1 < \hat{M}_2) \sup_{\substack{M_1 = M_2 \\ (M_1, M_2) \in \mathbb{R}^2}} L(M_1, M_2),$$

此处, $I(\cdot)$ 是示性函数, $\hat{M}_1$ 满足下式:

$$l(\hat{M}_1) = \sup l(M_1) = \sup \prod_{i=1}^n p_i \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n p_i I(X_i \leq M_1) = \frac{1}{2},$$

$\hat{M}_2$ 满足下式:

$$l(\hat{M}_2) = \sup l(M_2) = \sup \prod_{j=1}^m q_j \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^m q_j = 1, \quad \sum_{j=1}^m q_j I(Y_j \leq M_2) = \frac{1}{2},$$

其中, $l(\cdot)$ 是一维情况下的经验似然函数.

证明 在 $\hat{M}_1 < \hat{M}_2$ 的条件下只要下式成立, 则引理必成立,

$$\sup_{M_1 \geq M_2} L(M_1, M_2) = \sup_{M_1 = M_2} L(M_1, M_2),$$

否则

$$\sup_{M_1 \geq M_2} L(M_1, M_2) > \sup_{M_1 = M_2} L(M_1, M_2).$$

记 $L(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2) = \sup_{M_1 \geq M_2} L(M_1, M_2)$, 则有 $\tilde{M}_1 > \tilde{M}_2$. 由于

$$L(\hat{M}_1, \hat{M}_2) = \sup_{(M_1, M_2) \in \mathbb{R}^2} L(M_1, M_2) \geq \sup_{M_1 \geq M_2} L(M_1, M_2) = L(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2),$$

显然, $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2$ 必定位于 $\hat{M}_1$ 与 $\hat{M}_2$ 之间, 即 $\hat{M}_1 \leq \tilde{M}_2 < \tilde{M}_1 \leq \hat{M}_2$. 易知, 固定 $\tilde{M}_2$ 时, $L(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2)$ 在区间 $(-\infty, \hat{M}_2]$ 内是增函数. 因此可以得到

$$L(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2) \leq L(\tilde{M}_1, \tilde{M}_1) \leq \sup_{M_1 = M_2} L(M_1, M_2),$$

但这显然是一个矛盾. □

定理 2.1 的证明 假设 $X_1, X_1, \dots, X_n$ 和 $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 的样本中位数分别是 M_X 和 M_Y , 由 (2.3) 可以看出, 函数 $L(M)$ 在 $(-\infty, \min(M_X, M_Y))$ 上递增, 在 $(\max(M_X, M_Y), +\infty)$ 上递减. 所以, $\hat{M}_{n,m}$ 介于 M_X 和 M_Y 之间. 因此,

$$\hat{M}_{n,m} - M_0 = O_p((\min(n, m))^{-\frac{1}{2}}). \quad (4.1)$$

利用 Lagrange 乘子, (2.3) 可写成如下形式:

$$L(M) = \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1}{m}\right)^m \prod_{i=1}^n \frac{1}{(1 + \lambda_1(I(X_i \leq M) - \frac{1}{2}))} \prod_{j=1}^m \frac{1}{(1 + \lambda_2(I(Y_j \leq M) - \frac{1}{2}))}, \quad (4.2)$$

此处, Lagrange 乘子满足限制

$$\sum_{i=1}^n \frac{I(X_i \leq M) - \frac{1}{2}}{1 + \lambda_1(I(X_i \leq M) - \frac{1}{2})} = 0, \quad (4.3)$$

$$\sum_{j=1}^m \frac{I(Y_j \leq M) - \frac{1}{2}}{1 + \lambda_2(I(Y_j \leq M) - \frac{1}{2})} = 0. \quad (4.4)$$

由 (4.1) 和 (4.3), 我们得到

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (I(X_i \leq \hat{M}_{n,m}) - \frac{1}{2})}{\sum_{i=1}^n (I(X_i \leq \hat{M}_{n,m}) - \frac{1}{2})^2} + o_p(n^{-\frac{1}{2}}) = \frac{4 \sum_{i=1}^n (I(X_i \leq \hat{M}_{n,m}) - \frac{1}{2})}{n} + o_p(n^{-\frac{1}{2}}). \quad (4.5)$$

与此类似, 由 (4.1) 和 (4.4), 我们得到

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{4 \sum_{j=1}^m (I(Y_j \leq \hat{M}_{n,m}) - \frac{1}{2})}{m} + o_p(m^{-\frac{1}{2}}). \quad (4.6)$$

因为

$$\begin{aligned} T_{02} &= -2 \log \frac{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_0} L(M_1, M_2)}{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_2} L(M_1, M_2)} = -2 \log \frac{L(M)}{n^{-n} m^{-m} (1 + o(1))} \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \lambda_1 \left(I(X_i \leq M) - \frac{1}{2} \right) \right) + 2 \sum_{j=1}^m \log \left(1 + \lambda_2 \left(I(Y_j \leq M) - \frac{1}{2} \right) \right) + o_p(1), \end{aligned}$$

关于 λ 展开 T_{02} , 并把 $\hat{\lambda}_1$ 和 $\hat{\lambda}_2$ 代入 (4.5) 和 (4.6) 中, 有

$$T_{02} = 4 \left\{ \frac{(\sum_{i=1}^n (I(X_i \leq \hat{M}_{n,m}) - \frac{1}{2}))^2}{n} + \frac{(\sum_{j=1}^m (I(Y_j \leq \hat{M}_{n,m}) - \frac{1}{2}))^2}{m} \right\} + o_p(1). \quad (4.7)$$

下面的讨论需要使用经验过程和 Donsker 类, 关于这些内容的详细讨论参见文献 [13]. 现在引入经验过程:

$$E_{1n}(t) = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n (I(X_i \leq t) - F_1(t)), \quad E_{2m}(t) = m^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^m (I(Y_j \leq t) - F_2(t)). \quad (4.8)$$

根据定理条件, 存在 M_0 的邻域 U , 使得 F_1 和 F_2 在 U 上连续. 记 $\mathcal{F}$ 为 U 上所有右连续非降函数的集合, 在其上定义度量 $\rho(H_1, H_2) = \sup_x |H_1(x) - H_2(x)|$. 那么 $(E_{1n}(\cdot), E_{2m}(\cdot))$ 在 $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ 中取值. 因为 $\mathcal{F}$ 是 Donsker 类, 又由于 Donsker 类对乘法封闭, 因此 $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ 也是 Donsker 类. 所以 $(E_{1n}(\cdot), E_{2m}(\cdot))$ 依分布收敛到一个 Gauss 过程, 记为 $(E_1(\cdot), E_2(\cdot))$. 由于通过 (4.1) 我们已经证明了 $\hat{M}_{n,m}$ 依概率收敛到 M_0 , 因此 $(E_{1n}(\cdot), E_{2m}(\cdot), \hat{M}_{n,m})$ 依分布收敛到 $(E_1(\cdot), E_2(\cdot), M_0)$.

注意到对任意的 x_1, x_2 , $(E_1(x_1), E_2(x_1)), (E_1(x_2), E_2(x_2))$ 的协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \text{Cov}(E_1(x_1), E_2(x_1)), (E_1(x_2), E_2(x_2))) &= \text{Cov}(E_{1n}(x_1), E_{2m}(x_1)), (E_{1n}(x_2), E_{2m}(x_2))) \\ &= \begin{pmatrix} F_1(x_1)F_1(x_2) & 0 \\ 0 & F_2(x_1)F_2(x_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

这个矩阵函数关于 x_1, x_2 是连续的, 从而 $(E_1(\cdot), E_2(\cdot))$ 具有连续轨道的修正. 不失一般性, 我们可以假定 $(E_1(\cdot), E_2(\cdot))$ 的轨道是连续的. 定义从 $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \times U$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的映射

$$f(H_1, H_2, a) = (H_1(a), H_2(a)). \quad (4.9)$$

容易看出这个映射在与 ρ 相容的度量下是连续的. 从而根据连续映射定理, 有

$$(E_{1n}(\hat{M}_{n,m}), E_{2m}(\hat{M}_{n,m})) \xrightarrow{d} (E_1(M_0), E_2(M_0)) \stackrel{d}{=} N\left(0, \frac{1}{4} \mathbf{I}_2\right), \quad (4.10)$$

其中, $\mathbf{I}_2$ 是一个 2 阶单位矩阵.

设 $f_1, f_2, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2$ 是 $f_1(M_0), f_2(M_0), E_{1n}(\hat{M}_{n,m}), E_{2m}(\hat{M}_{n,m})$ 的简记形式并把 (4.8) 代入 (4.7), 则有

$$T_{02} = 4\{[\tilde{E}_1 + n^{\frac{1}{2}}(F_1(\hat{M}_{n,m}) - F_1(M_0))]^2 + [\tilde{E}_2 + m^{\frac{1}{2}}(F_2(\hat{M}_{n,m}) - F_2(M_0))]^2\} + o_p(1)$$

$$\begin{aligned}
 &= 4\{[\tilde{E}_1 + n^{\frac{1}{2}}(f_1(\hat{M}_{n,m} - M_0))]^2 + [\tilde{E}_2 + m^{\frac{1}{2}}(f_2(\hat{M}_{n,m} - M_0))]^2\} + o_p(1) \\
 &= 4\{(nf_1^2 + mf_2^2)[\hat{M}_{n,m} - M_0 + (nf_1^2 + mf_2^2)^{-1}(n^{\frac{1}{2}}f_1\tilde{E}_1 + m^{\frac{1}{2}}f_2\tilde{E}_2)]^2 \\
 &\quad - (nf_1^2 + mf_2^2)^{-1}(n^{\frac{1}{2}}f_1\tilde{E}_1 + m^{\frac{1}{2}}f_2\tilde{E}_2)^2 + \tilde{E}_1^2 + \tilde{E}_2^2\} + o_p(1) \\
 &= 4\{(nf_1^2 + mf_2^2)[\hat{M}_{n,m} - M_0 + (nf_1^2 + mf_2^2)^{-\frac{1}{2}}U]^2 \\
 &\quad - (nf_1^2 + mf_2^2)^{-1}(n^{\frac{1}{2}}f_1\tilde{E}_1 + m^{\frac{1}{2}}f_2\tilde{E}_2)^2 + \tilde{E}_1^2 + \tilde{E}_2^2\} + o_p(1), \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

其中, $U =: (nf_1^2 + mf_2^2)^{-\frac{1}{2}}(n^{\frac{1}{2}}f_1\tilde{E}_1 + m^{\frac{1}{2}}f_2\tilde{E}_2) \xrightarrow{d} N(0, \frac{1}{4})$.

由于 $\hat{M}_{n,m}$ 使经验似然函数取最大值, 故它能使二次函数 (4.11) 中的二次项为 0, 然后可得

$$(nf_1^2 + mf_2^2)^{\frac{1}{2}}(\hat{M}_{n,m} - M_0) = -U \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{4}\right). \tag{4.12}$$

于是, (2.5) 证毕.

现在对数经验似然比统计量 T_{02} 变成了

$$\begin{aligned}
 T_{02} &= 4\{-(nf_1^2 + mf_2^2)^{-1}(n^{\frac{1}{2}}f_1\tilde{E}_1 + m^{\frac{1}{2}}f_2\tilde{E}_2)^2 + \tilde{E}_1^2 + \tilde{E}_2^2\} + o_p(1) \\
 &= -4(nf_1^2 + mf_2^2)^{-1}(mf_2^2\tilde{E}_1^2 - 2n^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}f_1f_2\tilde{E}_1\tilde{E}_2 + nf_1^2\tilde{E}_2^2) + o_p(1) \\
 &= (2\tilde{E}_1, 2\tilde{E}_2) A \begin{pmatrix} 2\tilde{E}_1 \\ 2\tilde{E}_2 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

其中,

$$A = \frac{1}{nf_1^2 + mf_2^2} \begin{pmatrix} mf_2^2 & -n^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}f_1f_2 \\ -n^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}f_1f_2 & nf_1^2 \end{pmatrix}.$$

可以验证 $A^2 = A$ 且 $\text{tr}(A) = 1$. 利用 (4.10), 则可证出 (2.6).

定理 2.1 证毕. □

定理 2.2 的证明 由引理 4.1, 有

$$\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_1} L(M_1, M_2) = \begin{cases} \sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_2} L(M_1, M_2), & \text{如果 } \hat{M}_1 \geq \hat{M}_2, \\ \sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_0} L(M_1, M_2), & \text{如果 } \hat{M}_1 < \hat{M}_2. \end{cases}$$

这暗含着 $L(M_1, M_2)$ 在 Ω_1 上的最大值要么是 $\mathbb{R}^2$ 上的全局最大值 (如果 $\hat{M}_1 \geq \hat{M}_2$), 要么是在 Ω_0 的边界上求到的值 (如果 $\hat{M}_1 < \hat{M}_2$).

于是,

$$\begin{aligned}
 T_{01} &= -2 \log \frac{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_0} L(M_1, M_2)}{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_1} L(M_1, M_2)} \\
 &= -2 \log \frac{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_0} L(M_1, M_2)}{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_2} L(M_1, M_2)} I(\hat{M}_1 \geq \hat{M}_2) \\
 &\quad - 2 \log \frac{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_0} L(M_1, M_2)}{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_0} L(M_1, M_2)} I(\hat{M}_1 < \hat{M}_2)
 \end{aligned}$$

$$= T_{02}I(\hat{M}_1 \geq \hat{M}_2),$$

其中, $I(\cdot)$ 是示性函数.

记 $F_{1n}(t)$ 是 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的经验分布 $n^{-1} \sum_{i=1}^n (I(X_i \leq t))$, 由于 $F_1(M_0) = \frac{1}{2}$, $F_{1n}(\hat{M}_1) = \frac{1}{2}$, 且 $E_{1n}(t) = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n (I(X_i \leq t) - F_1(t)) = n^{\frac{1}{2}}(F_{1n}(t) - F_1(t))$, 故下式成立,

$$\begin{aligned} 0 &= F_{1n}(\hat{M}_1) - F_1(M_0) = n^{-\frac{1}{2}} E_{1n}(\hat{M}_1) + F_1(\hat{M}_1) - F_1(M_0) \\ &= n^{-\frac{1}{2}} E_{1n}(\hat{M}_1) + f_1(M_0)(\hat{M}_1 - M_0) + o_p(\hat{M}_1 - M_0). \end{aligned}$$

这样, 我们有 $\hat{M}_1 - M_0 = -n^{-\frac{1}{2}} f_1^{-1}(M_0) E_{1n}(\hat{M}_1) + o_p(\hat{M}_1 - M_0) \stackrel{d}{\sim} -n^{-\frac{1}{2}} f_1^{-1} \tilde{E}_1$, 而根据 (4.10), 可以得到 $-n^{-\frac{1}{2}} f_1^{-1} \tilde{E}_1 \stackrel{d}{\sim} -n^{-\frac{1}{2}} f_1^{-1} E_1(\hat{M}_1)$, 即有 $\hat{M}_1 - M_0 \stackrel{d}{\sim} -n^{-\frac{1}{2}} f_1^{-1} \tilde{E}_1 \stackrel{d}{\sim} -n^{-\frac{1}{2}} f_1^{-1} E_1(\hat{M}_1)$. 类似地, 有 $\hat{M}_2 - M_0 \stackrel{d}{\sim} -m^{-\frac{1}{2}} f_2^{-1} \tilde{E}_2 \stackrel{d}{\sim} -m^{-\frac{1}{2}} f_2^{-1} E_2(\hat{M}_2)$. 从而下式成立,

$$\hat{M}_1 - \hat{M}_2 \stackrel{d}{\sim} -\left\{ \frac{\tilde{E}_1}{n^{\frac{1}{2}} f_1} - \frac{\tilde{E}_2}{m^{\frac{1}{2}} f_2} \right\} = -\frac{m^{\frac{1}{2}} f_2 \tilde{E}_1 - n^{\frac{1}{2}} f_1 \tilde{E}_2}{n^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} f_1 f_2} =: -\frac{(nf_1^2 + mf_2^2)^{\frac{1}{2}}}{2(n^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} f_1 f_2)} Z,$$

其中, $Z = 2 \frac{m^{\frac{1}{2}} f_2 \tilde{E}_1 - n^{\frac{1}{2}} f_1 \tilde{E}_2}{(nf_1^2 + mf_2^2)^{\frac{1}{2}}}$.

根据 (4.10), 容易验证 Z 是标准正态分布, 且 $Z^2 = -2\log L(\hat{M}_{n,m}) + o_p(1)$, 因此可以得到

$$P\{T_{01} > t\} = P\{T_{02} > t, \hat{M}_1 \geq \hat{M}_2\} = P\left\{Z^2 > t, -\frac{(nf_1^2 + mf_2^2)^{\frac{1}{2}}}{2(n^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} f_1 f_2)} Z \geq 0\right\} + o_p(1) \rightarrow \frac{1}{2} P\{\chi_1^2 > t\}.$$

定理 2.2 证毕. □

定理 2.3 的证明 由 (4.10), 我们有

$$\begin{aligned} T_{12} &= -2 \log \frac{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_1} L(M_1, M_2)}{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_2} L(M_1, M_2)} \\ &= -2 \log \frac{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_2} L(M_1, M_2)}{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_2} L(M_1, M_2)} I(\hat{M}_1 \geq \hat{M}_2) \\ &\quad - 2 \log \frac{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_0} L(M_1, M_2)}{\sup_{(M_1, M_2) \in \Omega_2} L(M_1, M_2)} I(\hat{M}_1 < \hat{M}_2) \\ &= T_{02}I(\hat{M}_1 < \hat{M}_2). \end{aligned}$$

对于固定的 $(M_1, M_2) \in \Omega_1$, 若 $(M_1, M_2) \in \Omega_0$, 亦即 $M_{10} = M_{20}$, 运用定理 2.2 中相同的证法可以得到 $T_{12} \xrightarrow{d} \frac{1}{2} \chi_1^2 + \frac{1}{2} \chi_0^2$. 因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{T_{12} > c_\alpha\} = \alpha$.

对于 $(M_1, M_2) \in \Omega_1 \setminus \Omega_0$, 亦即 $M_{10} > M_{20}$, 根据 (4.9) 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{T_{12} > c_\alpha\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\hat{M}_1 < \hat{M}_2\} = 0.$$

定理 2.3 证毕. □

致谢 对审稿人在审稿过程中提出的修改建议以及给予过的帮助深表感谢, 其建议对本文质量的提高有莫大的帮助. 特别表示对中国科学院数学与系统科学研究院博士研究生度睿的谢意, 其提供的证明思路对文中引理的证明起了关键性的作用.

参考文献

- 1 Owen A B. Empirical likelihood ratio confidence intervals for a single functional. *Biometrika*, 1988, 75: 237–249
- 2 Owen A B. Empirical likelihood ratio confidence regions. *Ann Statist*, 1990, 18: 90–120
- 3 Qin Y, Zhao L. Empirical likelihood ratio confidence intervals for the differences of quantiles of two populations. *Acta Math Sin*, 1997, 18: 687–694
- 4 Qin Y, Zhang J. Semi-empirical likelihood confidence intervals for the differences of quantiles with missing data. *Acta Math Sin*, 2009, 25: 845–854
- 5 Valeinis J, Cers E, Cielens J. Two-sample problems in statistical data modelling. *Math Model Anal*, 2010, 15: 137–151
- 6 Ozturk O, Balakrishnan N. Exact two-sample nonparametric test for quantile difference between two populations based on ranked set samples. *Ann Inst Statist Math*, 2009, 61: 235–249
- 7 Owen A B. *Empirical Likelihood*. New York: Chapman & Hall/CRC, 2001
- 8 El Barmi H. Empirical likelihood ratio test for or against a set of inequality constraints. *J Statist Plann Inference*, 1996, 55: 191–204
- 9 Chen L, Shi J. Empirical likelihood hypothesis test on mean with inequality constraints. *Sci China Math*, 2011, 54: 1847–1857
- 10 Yu W, El Barma H, Ying Z. Restricted one way analysis of variance using the empirical likelihood ratio test. *J Multivariate Anal*, 2011, 102: 629–640
- 11 Jing B. Two-sample empirical likelihood method. *Statist Probab Lett*, 1995, 24: 315–319
- 12 Liu Y, Zou C, Zhang R. Empirical likelihood for the two-sample mean problem. *Statist Probab Lett*, 2008, 78: 548–556
- 13 Kosorok M R. *Introduction to Empirical Processes and Semiparametric Inference*. New York: Springer, 2008

Empirical likelihood method employed in the comparison of two sample medians under inequality constraints

DENG GuoHua

Abstract In this article, the empirical likelihood introduced by Owen is applied to test the medians from two populations with inequality constraints imposed on the parameter space. So far, no research work in this area has ever touched the issue since the auxiliary function in the construction of empirical likelihood function is not smooth and thus is not convex. This makes the research work much more complicated. However, we solve the problem by introduce in empirical processes. Theoretically, we proved that the limiting distribution of the empirical likelihood ratio test statistic is either a single chi-square distribution or the equally weighted mixture of two chi-square distributions. What is more, this theory is convincingly supported by commendable simulation results.

Keywords two-sample median, empirical likelihood, inequality constraint, least favorable set

MSC(2010) 62G10

doi: 10.1360/012012-526