某些与 Liouville 数有关的数的代数无关性

Mordoukhay-Boltovskoy (*Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, **52** (1946), 483—486, 及 *Math. Reviews*, **8**(1948), 317g) 试图证明下列命题: 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是代数数, $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_r, y]$ 不为零. 如果无理数 η 适合方程 $P(\alpha_1^q, \dots, \alpha_r^q, \eta) = 0$, 那么存在两个正数 λ 和 μ , 使对所有有理数 $p/q (q > 0)$, 不等式 $|\eta - p/q| > \exp(-\lambda q^\mu \log q)$ 成立.

本文中, 我们发展了这个主题, 证明了下列一般性的

基本定理 设 s, t 是有理整数, $0 \leq s \leq t$. 设 $\varphi_1, \dots, \varphi_t$ 是单复变半纯函数, $\eta_1, \dots, \eta_t$ 是一些复数, 且 η_ν 不是 φ_ν 的极点 ($1 \leq \nu \leq t$). 还设 ψ 是正整数变量的正函数, 单调趋于无穷. 设不等式

$$\max_{1 \leq \nu \leq t} |\eta_\nu q - p_\nu| < \exp(-\psi(q))$$

有无穷多组解 $(p_1, \dots, p_t, q) \in \mathbb{Z}^{t+1}, q > 0$, 将它们记作 $(p_{1n}, \dots, p_{tn}, q_n), 0 < q_1 < q_2 < \dots < q_n < \dots$. 如果对于任何多项式 $R \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_t, y_1, \dots, y_t]$, 且 $R(\eta_1, \dots, \eta_t, y_1, \dots, y_t)$ 在 $\mathbb{Z}[\eta_1, \dots, \eta_t][y_1, \dots, y_t]$ 中不为零, 存在一个整数 n_0 (与 $R, \eta_1, \dots, \eta_t, \varphi_1, \dots, \varphi_t$ 有关), 使当所有 $n \geq n_0$,

$$|R(p_{1n}/q_n, \dots, p_{tn}/q_n, \varphi_1(p_{1n}/q_n), \dots, \varphi_t(p_{tn}/q_n))| \geq \exp(-\psi(q_n)),$$

那么数 $\varphi_1(\eta_1), \dots, \varphi_t(\eta_t)$ 在 $Q(\eta_1, \dots, \eta_t)$ 上代数无关.

由此定理及其推论, 并应用 Kummer 理论的基本结果或某些数类的超越度量, 我们

可得下面一些类型的代数无关性结果:

1. 若 η 是一个 Liouville 数, 使不等式 $0 < |\eta q - p| < \exp(-q^m (\log q) \tau(q))$ 有无穷多组解 $(p, q) \in \mathbb{Z}^2, q > 0$, 其中 $\tau(q)$ 是任意正函数, 当 $q \rightarrow \infty$ 时单调趋于无穷. 又设 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 是乘性无关的代数数. 那么数 $\eta, \alpha_1^q, \dots, \alpha_m^q$ 在 Q 上代数无关. 这表明对这种 Liouville 数, 上述 Mordoukhay-Boltovskoy 命题确实成立.

2. 对某些 Liouville 数 η , 当 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 是乘性无关的代数数, α, β 是非零代数数, $\log \alpha \neq 0$, 则数 $\eta, \alpha_1^q, \dots, \alpha_m^q, \alpha^{\beta \eta}$ 在 Q 上代数无关.

3. 对某些 Q 线性无关的 Liouville 数 $\eta_1, \dots, \eta_t$, 数 $e^{\eta_1}, \dots, e^{\eta_t}$ 在域 $Q(\eta_1, \dots, \eta_t)$ 上代数无关. 由此可构造 $2t$ 个数 $\eta_1, \dots, \eta_t, e^{\eta_1}, \dots, e^{\eta_t}$ 在 Q 上代数无关的例子, 这个特例自然比 Schanuel 猜想要强些.

4. 对于某些 Q 线性无关的 Liouville 数 $\eta_1, \dots, \eta_t$, 当 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 是乘性无关的代数数时, 数 $\alpha_\mu^{\eta_\nu}, e^{\eta_\nu} (1 \leq \mu \leq m, 1 \leq \nu \leq t)$ 在域 $Q(\eta_1, \dots, \eta_t)$ 上代数无关.

5. 设 $\mathcal{P}$ 是具有代数不变量的 Weierstrass 椭圆函数, 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 是乘性无关的代数数, β 是非零代数数. 还设非零复数 u 或者是 $\mathcal{P}$ 的极点, 或者使 $\mathcal{P}(u)$ 为代数数. 那么对于某些 Liouville 数 η , 数 $\eta, \alpha_1^q, \dots, \alpha_m^q, \mathcal{P}(\beta^q u)$ 在 Q 上代数无关.

姆·瓦尔特施密特

(庞加勒研究所, 巴黎)

朱尧辰

(中国科学院应用数学研究所, 北京)