$\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 空间的 John-Nirenberg 型不等式与小波刻画

献给史济怀教授 80 华诞

鲍官龙, 乌兰哈斯*

汕头大学数学系, 汕头 515063

E-mail: glbaoah@163.com, wulan@stu.edu.cn

收稿日期: 2015-03-31; 接受日期: 2015-06-25; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371234) 资助项目

摘要 复平面单位圆盘上的解析 $\mathcal{Q}_K$ 空间理论已日趋完善. 本文研究实变量的 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 空间. 首先利用函数在分割后的方体上的平均振荡给出 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 空间的一个特征; 再应用该特征与 Calderón-Zygmund 分解的技巧建立 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 空间的 John-Nirenberg 型不等式; 最后得到 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 空间的小波刻画.

关键词 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 空间 John-Nirenberg 型不等式 小波

MSC (2010) 主题分类 42B35, 42C15

1 引言

近年来, 复平面单位圆盘上的解析 $\mathcal{Q}_K$ 空间理论已被广泛研究 (参见文献 [1–4]). 本文将在文献 [5] 的基础上继续研究 $\mathbb{R}^n$ 上的 $\mathcal{Q}_K$ 空间. 设 $K: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是一个单调递增的函数, 若 $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\|f\|_{\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)}^2 = \sup_{I \subset \mathbb{R}^n} \int_I \int_I \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{2n}} K\left(\frac{|x - y|}{\ell(I)}\right) dx dy < \infty,$$

则称 f 属于 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 空间. 这里及本文出现的 I 均为边平行于坐标轴的方体, $\ell(I)$ 表示 I 的边长.

如果 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 仅包含几乎处处为常数的函数, 则称 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 是平凡的. 在文献 [5] 中, 我们指出 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R})$ 一定是非平凡的. 当 $n \geq 2$ 时, $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 是非平凡的当且仅当

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{K(t)}{t^{n-1}} dt < \infty.$$

如果

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{K(t)}{t^{n+1}} dt < \infty,$$

那么 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 就是经典的有界平均振荡空间 $\text{BMO}(\mathbb{R}^n)$ [6]. 若令 $K(t) = t^{n-2\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 则 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 就是近年来被大量关注的 $\mathcal{Q}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ 空间 [7-10]. 研究解析 $\mathcal{Q}_K$ 空间或实变量 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 空间的一个重要辅助函数是

$$\varphi_K(s) = \sup_{0 < t \leq 1} \frac{K(st)}{K(t)}, \quad 0 < s < \infty,$$

以及 φ_K 满足的以下两个条件:

$$\int_1^\infty \varphi_K(s) \frac{ds}{s^{n+1}} < \infty, \quad (1.1)$$

$$\int_0^1 \varphi_K(s) \frac{ds}{s^{n-1}} < \infty, \quad n \geq 2. \quad (1.2)$$

我们在文献 [5] 中指出, 如果 K 满足 (1.1), 那么对所有的 $s > 0$, 有 $K(2s) \approx K(s)$. 这表示, 存在两个正常数 C_1 与 C_2 使得 $C_1 K(s) \leq K(2s) \leq C_2 K(s)$, 我们也记作 $K(s) \lesssim K(2s) \lesssim K(s)$.

本文是文献 [5] 的继续, 我们先给出 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 空间的一个平均振荡特征, 然后利用该特征建立 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 空间的 John-Nirenberg 型不等式与小波刻画.

2 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 空间的一个平均振荡特征

本节将利用函数在分割后的方体上的平均振荡给出 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 的一个特征. 我们先陈述一些记号. 令 $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$ 是所有的顶点是整数坐标的单位方体, $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$ 是形如 $J = \{2^{-k}x : x \in I\}$, 对某个 $I \in \mathcal{D}_0\}$ 的二进方体的集合, 所有二进方体的集合记作 $\mathcal{D} = \bigcup_{k=-\infty}^\infty \mathcal{D}_k$. 如果 I 是任意的一个方体, 我们用 $\mathcal{D}_k(I)$, $k \geq 0$ 记作对 I 进行连续 k 次二倍划分形成的边长为 $2^{-k}\ell(I)$ 的 2^{kn} 个小方体的集合, 并且令 $\mathcal{D}(I) = \bigcup_{k=0}^\infty \mathcal{D}_k(I)$. 对 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 令 $|x|_\infty = \max_k |x_k|$. 对 $\lambda > 0$, λI 表示中心与 I 相同、边长为 $\lambda\ell(I)$ 的方体. 对 $t \in \mathbb{R}^n$, $I+t$ 记作通常的平移方体. 若 $E \subset \mathbb{R}^n$, 我们用 $|E|$ 表示 E 的 Lebesgue 测度.

对方体 I 上的可测函数 f 以及增函数 K , 令 $f_I = |I|^{-1} \int_I f(x) dx$, 并且记

$$\Psi_{f,K}(I) = \sum_{J \in \mathcal{D}(I)} K\left(\frac{\ell(J)}{\ell(I)}\right) \Phi_f(J) = \sum_{k=0}^\infty \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \Phi_f(J),$$

其中

$$\Phi_f(J) = \frac{1}{|J|} \int_J |f(x) - f_J|^2 dx = \frac{1}{2|J|^2} \int_J \int_J |f(x) - f(y)|^2 dx dy.$$

那么

$$\Psi_{f,K}(I) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} A_I(x, y) |f(x) - f(y)|^2 dx dy,$$

其中

$$A_I(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^\infty \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K\left(\frac{1}{2^k}\right) 2^{2kn} |I|^{-2} \chi_J(x) \chi_J(y),$$

χ_E 是集合 E 上的特征函数.

下面这个定理是本节的主要结果, 它推广了文献 [7] 中关于 $\mathcal{Q}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ 的结果.

定理 2.1 假设 K 满足 (1.1) 并且 $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 那么 $f \in \mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当

$$\sup_{I \subset \mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \frac{1}{|J|} \int_J |f(x) - f_J|^2 dx < \infty.$$

事实上, 我们得到

$$\|f\|_{\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)}^2 \approx \sup_{I \subset \mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \frac{1}{|J|} \int_J |f(x) - f_J|^2 dx.$$

证明 充分性. 我们仅需证明存在一个与方体 I 无关的常数 C 使得下式成立,

$$\int_I \int_I \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{2n}} K\left(\frac{|x - y|}{\ell(I)}\right) dx dy \leq C \sup_{|t|_{\infty} < \ell(I)} \Psi_{f,K}(I + t).$$

因此, 我们仅需证明

$$\int_I \int_I \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{2n}} K\left(\frac{|x - y|}{\ell(I)}\right) dx dy \leq \frac{C}{|I|} \int_{|t|_{\infty} < \ell(I)} \Psi_{f,K}(I + t) dt + C \Psi_{f,K}(I).$$

由 Fubini 定理,

$$\frac{1}{|I|} \int_{|t|_{\infty} < \ell(I)} \Psi_{f,K}(I + t) dt = \frac{1}{|I|} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|t|_{\infty} < \ell(I)} A_{I+t}(x, y) dt |f(x) - f(y)|^2 dx dy,$$

所以只需证明对所有的 $x, y \in I$, 下式成立,

$$\frac{1}{|I|} \int_{|t|_{\infty} < \ell(I)} A_{I+t}(x, y) dt + A_I(x, y) \gtrsim K\left(\frac{|x - y|}{\ell(I)}\right) |x - y|^{-2n}. \quad (2.1)$$

首先, 假设 $x, y \in I$ 并且满足 $|x - y| > \frac{1}{2}\ell(I)$, 注意到 $|x - y| \leq \sqrt{n}\ell(I)$. 在 $A_I(x, y)$ 的定义中取 $k = 0$, 我们得到

$$A_I(x, y) \gtrsim |I|^{-2} \gtrsim K\left(\frac{|x - y|}{\ell(I)}\right) |x - y|^{-2n}.$$

因此, (2.1) 在这种情形下成立. 另一方面, 假设 $x, y \in I$ 并且满足 $|x - y|_{\infty} \leq \frac{1}{2}\ell(I)$. 取 $l \geq 0$ 使得

$$2^{-l-2}\ell(I) < |x - y|_{\infty} \leq 2^{-l-1}\ell(I).$$

如果 $|t|_{\infty} > \ell(I)$, 那么 $x \notin I + t$, 从而, $A_{I+t}(x, y) = 0$. 因此,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|} \int_{|t|_{\infty} < \ell(I)} A_{I+t}(x, y) dt &\geq \frac{1}{|I|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \sum_{J \in \mathcal{D}_l(I+t)} K\left(\frac{1}{2^l}\right) 2^{2ln} |I|^{-2} \chi_J(x) \chi_J(y) dt \\ &\approx |I|^{-3} K\left(\frac{1}{2^l}\right) 2^{2ln} \sum_{J \in \mathcal{D}_l(I)} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{J+t}(x) \chi_{J+t}(y) dt. \end{aligned}$$

注意到

$$\chi_{J+t}(x) \chi_{J+t}(y) = \chi_{J-x}(-t) \chi_{J-y}(-t).$$

从而, $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{J+t}(x) \chi_{J+t}(y) dt$ 等于 $(J - x) \cap (J - y)$ 的体积. 因为

$$|(J - x) \cap (J - y)|^{1/n} \geq \ell(J) - |x - y|_{\infty} \geq \frac{1}{2}\ell(J),$$

所以,

$$\frac{1}{|I|} \int_{|t|_\infty < \ell(I)} A_{I+t}(x, y) dt \gtrsim |I|^{-2} K\left(\frac{1}{2^l}\right) 2^{2ln} \gtrsim K\left(\frac{|x-y|}{\ell(I)}\right) |x-y|^{-2n}.$$

因此, (2.1) 成立.

必要性. 注意到 $A_I(x, y) = 0$ 除非 $x, y \in I$. 若 $x, y \in J \in \mathcal{D}_k(I)$, 则 $2^k \leq \ell(I)/|x-y|_\infty$. 从而,

$$A_I(x, y) \leq \sum_{2^k \leq \ell(I)/|x-y|_\infty} K\left(\frac{1}{2^k}\right) 2^{2kn} |I|^{-2}.$$

因为 K 满足 (1.1), 我们可以假设 $K(t)/t^n$ 是减函数 (参见文献 [5]). 因此,

$$\begin{aligned} A_I(x, y) &\leq K\left(\frac{|x-y|_\infty}{\ell(I)}\right) \left(\frac{\ell(I)}{|x-y|_\infty}\right)^n |I|^{-2} \sum_{2^k \leq \ell(I)/|x-y|_\infty} 2^{kn} \\ &\lesssim K\left(\frac{|x-y|_\infty}{\ell(I)}\right) \left(\frac{\ell(I)}{|x-y|_\infty}\right)^{2n} |I|^{-2} \\ &\approx K\left(\frac{|x-y|}{\ell(I)}\right) |x-y|^{-2n}. \end{aligned}$$

所以,

$$\Psi_{f,K}(I) \lesssim \int_I \int_I \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{2n}} K\left(\frac{|x-y|}{\ell(I)}\right) dx dy.$$

定理 2.1 证明完毕. $\square$

3 John-Nirenberg 型不等式

本节利用定理 2.1, 将建立 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 上的 John-Nirenberg 型不等式. 设 I 为一个方体, 令 $\lambda_I(t)$ 为 $f - f_I$ 在 I 上的分布函数, 即

$$\lambda_I(t) = |\{x \in I : |f(x) - f_I| > t\}|.$$

先回顾 $\text{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 上经典的 John-Nirenberg 不等式^[6]. 存在两个正常数 B 和 b 使得若 $f \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 那么对所有的方体 I 及 $t > 0$,

$$\lambda_I(t) \leq B|I| \exp\left(-\frac{bt}{\|f\|_{\text{BMO}}}\right)$$

成立. 反过来, 如果对任意的方体 I 以及 $t > 0$, 存在正常数 C 与 c 使得

$$\lambda_I(t) \leq C|I| \exp(-ct),$$

那么 $f \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

Yue 和 Dafni^[9] 得到了如下的 $\mathcal{Q}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ 上的 John-Nirenberg 型不等式.

定理 A 设 $0 \leq \alpha < 1$ ($n \geq 2$) 或 $0 \leq \alpha \leq 1/2$ ($n = 1$).

(1) 对于 $0 \leq p < 2$, 如果存在正常数 B, C 与 c 使得对所有的方体 $I \subseteq \mathbb{R}^n$ 以及 $t > 0$ 有

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{(2\alpha-n)k} \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} \frac{\lambda_J(t)}{|J|} \leq B \max\left\{1, \left(\frac{C}{t}\right)^p\right\} \exp(-ct),$$

那么 $f \in \mathcal{Q}_\alpha(\mathbb{R}^n)$;

(2) 如果 $f \in \mathcal{Q}_\alpha(\mathbb{R}^n)$, 那么存在仅与 n 有关的正常数 B 和 b 使得对所有的 $I \subseteq \mathbb{R}^n$ 及 $t > 0$, 下式

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{(2\alpha-n)k} \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} \frac{\lambda_J(t)}{|J|} \leq B \max \left\{ 1, \left(\frac{\|f\|_{\mathcal{Q}_\alpha(\mathbb{R}^n)}}{t} \right)^2 \right\} \exp \left(\frac{-bt}{\|f\|_{\mathcal{Q}_\alpha(\mathbb{R}^n)}} \right)$$

成立.

当 $0 < \alpha < 1/2$ 时, Yue 和 Dafni^[9] 指出, 定理 A(1) 中的参数 p 不能取到 2, 定理 A(2) 中不等式的右边的常数 2 不能被 $[0, 2)$ 中的任何数替代.

为了建立 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 上的 John-Nirenberg 型不等式, 我们需要下面关于 Calderón-Zygmund 分解的结果, 参见文献 [11, 12].

引理 B 假设 f 是 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中的一个非负函数, ξ 是一个正常数, 那么存在一个分解 $\mathbb{R}^n = P \cup \Omega$, $P \cap \Omega = \emptyset$, 使得

- (1) $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, 这里 $\{I_k\}$ 是一列内部互不相交的方体;
- (2) $f(x) \leq \xi$, $x \in P$, a.e.;
- (3) 对任意的 $I \in \{I_k\}$,

$$\xi < \frac{1}{|I|} \int_I f(x) dx \leq 2^n \xi;$$

- (4) 若 J 是 $\{I_k\}$ 中的任意方体的并, 那么

$$\xi |J| \leq \int_J f(x) dx \leq 2^n \xi |J|.$$

众所周知, Calderón-Zygmund 分解也可在任一方体 I 上进行. 下面是本节的主要结果, 即 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 上的 John-Nirenberg 型不等式.

定理 3.1 假设 K 满足 (1.1), $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

- (1) 对于 $p < 2$, 如果存在正常数 B, C 和 c 使得对所有的方体 $I \subseteq \mathbb{R}^n$ 以及 $t > 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \frac{\lambda_J(t)}{|J|} \leq B \max \left\{ 1, \left(\frac{C}{t} \right)^p \right\} \exp(-ct),$$

那么 $f \in \mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$;

- (2) 对于 $p \geq 2$, 如果 $f \in \mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$, 则存在仅与 n 有关的正常数 B 和 b 使得对所有的方体 $I \subseteq \mathbb{R}^n$ 和 $t > 0$, 下式

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \frac{\lambda_J(t)}{|J|} \leq B \max \left\{ 1, \left(\frac{\|f\|_{\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)}}{t} \right)^p \right\} \exp \left(\frac{-bt}{\|f\|_{\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)}} \right)$$

成立.

证明 (1) 对于方体 I 及 $J \in \mathcal{D}_k(I)$,

$$\int_J |f(x) - f_J|^2 dx = 2 \int_0^\infty t \lambda_J(t) dt.$$

因此,

$$\Psi_{f,K}(I) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \frac{1}{|J|} \int_0^\infty t \lambda_J(t) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^\infty t \left(\sum_{k=0}^\infty \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \frac{\lambda_J(t)}{|J|} \right) dt \\
 &\leq 2B \int_0^\infty t \left(1 + \left(\frac{C}{t}\right)^p \right) \exp(-ct) dt \\
 &= 2Bc^{-2}\Gamma(2) + 2BC^p c^{p-2}\Gamma(2-p).
 \end{aligned}$$

由定理 2.1, 我们知道 $f \in \mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$.

(2) 令 $\rho = \sup_I (\Psi_{f,K}(I))^{1/2}$. 由定理 2.1 可知, $\rho \approx \|f\|_{\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)}$. 假设 I 为一个方体, $J \in \mathcal{D}_k(I)$, 由 Chebychev 不等式, 对 $t > 0$,

$$\lambda_J(t) \leq \frac{1}{t^2} \int_J |f(x) - f_J|^2 dx.$$

所以,

$$\sum_{k=0}^\infty \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \frac{\lambda_J(t)}{|J|} \leq t^{-2} \rho^2.$$

因此, 当 $t \leq \rho$ 时, 令 $B = e$ 以及 $b = 1$, 那么

$$\sum_{k=0}^\infty \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \frac{\lambda_J(t)}{|J|} \leq B \max \left\{ 1, \left(\frac{\rho}{t}\right)^p \right\} \exp \left(\frac{-bt}{\rho} \right).$$

接下来考虑 $t > \rho$ 时的情形. 对函数 $|f(x) - f_J|$ 在 J 上应用 Calderón-Zygmund 分解, 令 $\xi = t$, $t > 0$, 用 $\Omega_J(t)$ 代替引理 B 中的 Ω , $J \setminus \Omega_J(t)$ 代替 P . 令 $t' = t + 2^{n+1}\rho$, 那么由文献 [9, 定理 2] 的证明过程, 我们知道

$$|\Omega_J(t')| \leq 2^{-n} |\Omega_J(t)|.$$

由引理 B(2),

$$\lambda_J(t) \leq |\Omega_J(t)|.$$

令 j 是 $\frac{t-\rho}{2^{n+1}\rho}$ 的整数部分, 并且设 $s = (1 + j2^{n+1})\rho$, 那么 $\rho \leq s \leq t$ 并且

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^\infty \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \frac{\lambda_J(t)}{|J|} &\leq \sum_{k=0}^\infty \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \frac{\lambda_J(s)}{|J|} \\
 &\leq \sum_{k=0}^\infty \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \frac{|\Omega_J((1 + j2^{n+1})\rho)|}{|J|} \\
 &\leq 2^{-nj} \sum_{k=0}^\infty \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \frac{|\Omega_J(\rho)|}{|J|}.
 \end{aligned}$$

从引理 B(4) 得到

$$\rho |\Omega_J(\rho)| \leq \int_{\Omega_J(\rho)} |f(x) - f_J| dx.$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\rho^2 |\Omega_J(\rho)| \leq \int_{\Omega_J(\rho)} |f(x) - f_J|^2 dx \leq \int_J |f(x) - f_J|^2 dx.$$

因此,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \frac{\lambda_J(t)}{|J|} &\leq 2^{-nj} \rho^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \frac{1}{|J|} \int_J |f(x) - f_J|^2 dx \\ &\leq 2^{-n(\frac{t-\rho}{2^{n+1}\rho}-1)}. \end{aligned}$$

令 $B = 2^{\frac{n}{2^{n+1}}+n}$, $b = \frac{n}{2^{n+1}} \ln 2$, 那么

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \frac{\lambda_J(t)}{|J|} \leq B \max\left\{1, \left(\frac{\rho}{t}\right)^p\right\} \exp\left(\frac{-bt}{\rho}\right).$$

这样, 我们完成了定理 3.1 的证明. $\square$

注 3.2 定理 3.1 中的参数范围比定理 A 中的相关参数范围要广. 具体地讲, 定理 A(1) 中的 $0 \leq p < 2$ 可以改为 $p < 2$; 定理 A(2) 中不等式右边的常数 2 可以被参数 p ($p \geq 2$) 代替.

4 小波刻画

本节将利用小波给出 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 空间的一个刻画. Meyer 的经典著作 [13] 的第 3 章展示了一种构造 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的小波正交基的方法. 设 $\Lambda = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n \times \{1, \dots, 2^n - 1\}$ 以及 $\lambda = (j, \hat{k}, l) \in \Lambda$. 对任意的 $\lambda \in \Lambda$, 用 $I(\lambda)$ 记作如下的二进方体:

$$I(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^j x - \hat{k} \in [0, 1)^n\}.$$

为了方便, 我们记 $\ell(\lambda) = \ell(I(\lambda))$. 设

$$\psi_\lambda(x) = \psi_{j, \hat{k}, l}(x) = 2^{jn/2} \psi_l(2^j x - \hat{k}), \quad \lambda \in \Lambda$$

为文献 [13] 中的 r -正则 ($r \in \mathbb{N}$) 的小波正交基. 在这一节, 我们仅考虑具有紧支撑的小波, 从而, $\{\psi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 满足文献 [13] 中的以下条件:

- (1) $\{\psi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的正交小波基;
- (2) 存在一个固定的常数 m , 使得 $\text{supp} \psi_\lambda \subseteq mI(\lambda)$;
- (3) $|\partial^\beta \psi_\lambda| \leq C 2^{j|\beta|} 2^{jn/2}$, 其中

$$\begin{aligned} \beta &= (\beta_1 \cdots \beta_n), \quad |\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n, \quad |\beta| \leq r, \\ \partial^\beta &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\beta_n}; \end{aligned}$$

- (4) 当 $|\beta| \leq r$ 时, $\int_{\mathbb{R}^n} x^\beta \psi_\lambda(x) dx = 0$.

我们仍然用 $\mathcal{D}$ 记作全体的二进方体. 文献 [13] 中有 $\text{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 的一个如下刻画.

定理 C 设 $f \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 那么它的小波系数

$$a(\lambda) = (f, \psi_\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\psi_\lambda(x)} dx$$

满足

$$\sup_{I \in \mathcal{D}} |I|^{-1} \sum_{I(\lambda) \subseteq I} |a(\lambda)|^2 < \infty. \quad (4.1)$$

另一方面, 若一个序列 $\{a(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ 满足 (4.1), 则该序列是 $\text{BMO}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{C}$ 中唯一一个函数的小波系数列.

关于 $\mathcal{Q}_\alpha(\mathbb{R}^n)$, 文献 [7] 中也有一个类似的刻画.

定理 D 设 $0 < \alpha < 1$, $f \in \mathcal{Q}_\alpha(\mathbb{R}^n)$, 那么它的小波系数

$$a(\lambda) = (f, \psi_\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\psi_\lambda(x)} dx$$

满足

$$\sup_{I \in \mathcal{D}} |I|^{-1} \sum_{I(\lambda) \subseteq I} \left(\frac{\ell(I)}{\ell(\lambda)} \right)^{2\alpha} |a(\lambda)|^2 < \infty. \quad (4.2)$$

另一方面, 若一个序列 $\{a(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ 满足 (4.2), 那么该序列是 $\mathcal{Q}_\alpha(\mathbb{R}^n)/\mathbb{C}$ 中唯一一个函数的小波系数列.

本节将利用小波系数来刻画 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ 空间. 对 $I \in \mathcal{D}$ 以及序列 $\mathbf{a} = \{a(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$, 令

$$T_{\mathbf{a}, K}(I) = \sum_{I(\lambda) \subseteq I} K\left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(I)}\right) \frac{|a(\lambda)|^2}{\ell(\lambda)^n}.$$

我们先证明一个引理.

引理 4.1 假设 K 满足 (1.1), 那么

$$T_{\mathbf{a}, K}(I) \approx \sum_{k=0}^{\infty} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} \frac{1}{|J|} \sum_{I(\lambda) \subseteq J} |a(\lambda)|^2.$$

证明 注意到

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} \frac{1}{|J|} \sum_{I(\lambda) \subseteq J} |a(\lambda)|^2 &= \sum_{J \in \mathcal{D}(I)} K\left(\frac{\ell(J)}{\ell(I)}\right) \frac{1}{|J|} \sum_{I(\lambda) \subseteq J} |a(\lambda)|^2 \\ &= \sum_{I(\lambda) \subseteq I} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}(I) \\ J \supseteq I(\lambda)}} \frac{1}{|J|} |a(\lambda)|^2 K\left(\frac{\ell(J)}{\ell(I)}\right). \end{aligned}$$

如果 $J \in \mathcal{D}(I)$, $J \supseteq I(\lambda)$, 那么存在一个与 $I(\lambda)$ 有关的整数 $k \geq 0$, 使得 $\ell(\lambda) = 2^{-k} \ell(I)$. 从而,

$$\sum_{\substack{J \in \mathcal{D}(I) \\ J \supseteq I(\lambda)}} \frac{1}{|J|} K\left(\frac{\ell(J)}{\ell(I)}\right) = \sum_{i=0}^k 2^{-in} \ell(\lambda)^{-n} K\left(\frac{2^i \ell(\lambda)}{\ell(I)}\right).$$

因为 K 满足 (1.1), 由文献 [5] 知, 存一个充分小的常数 $c > 0$ 使得

$$\varphi_K(s) \lesssim s^{n-c}, \quad s \geq 1.$$

从而,

$$\sum_{i=0}^k 2^{-in} K\left(\frac{2^i \ell(\lambda)}{\ell(I)}\right) \leq K\left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(I)}\right) \sum_{i=0}^k 2^{-in} \varphi_K(2^i) \lesssim \frac{2^c}{2^c - 1} K\left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(I)}\right).$$

因此,

$$\sum_{k=0}^{\infty} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} \frac{1}{|J|} \sum_{I(\lambda) \subseteq J} |a(\lambda)|^2 \lesssim \frac{2^c}{2^c - 1} \sum_{I(\lambda) \subseteq I} K\left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(I)}\right) \frac{|a(\lambda)|^2}{\ell(\lambda)^n}.$$

另一方面, 因为 K 是增函数, 所以,

$$\sum_{i=0}^k 2^{-in} K\left(\frac{\ell(\lambda)2^i}{\ell(I)}\right) \geq K\left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(I)}\right) \sum_{i=0}^k 2^{-in} \geq K\left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(I)}\right).$$

从而,

$$\sum_{k=0}^{\infty} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} \frac{1}{|J|} \sum_{I(\lambda) \subseteq J} |a(\lambda)|^2 \geq \sum_{I(\lambda) \subseteq I} K\left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(I)}\right) \frac{|a(\lambda)|^2}{\ell(\lambda)^n}.$$

引理 4.1 证毕. $\square$

定理 4.2 当 $n = 1$ 时, 假设 K 满足条件 (1.1). 当 $n \geq 2$ 时, 假设 K 满足条件 (1.1) 与 (1.2). 若 $f \in \mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$, 那么它的小波系数

$$a(\lambda) = (f, \psi_\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\psi_\lambda(x)} dx$$

满足

$$\sup_{I \in \mathcal{D}} \sum_{I(\lambda) \subseteq I} K\left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(I)}\right) \frac{|a(\lambda)|^2}{\ell(\lambda)^n} < \infty. \quad (4.3)$$

另一方面, 若一个序列 $\{a(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ 满足 (4.3), 则该序列是 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)/\mathbb{C}$ 中唯一一个函数 f 的小波系数列, 并且

$$\|f\|_{\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)}^2 \approx \sup_{I \in \mathcal{D}} \sum_{I(\lambda) \subseteq I} K\left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(I)}\right) \frac{|a(\lambda)|^2}{\ell(\lambda)^n}.$$

证明 假设 $f \in \mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$, $I \in \mathcal{D}$, $J \in \mathcal{D}_k(I)$, 令

$$f = f_{mJ} + (f - f_{mJ})\chi_{mJ} + (f - f_{mJ})\chi_{\mathbb{R}^n \setminus mJ} =: f_1 + f_2 + f_3.$$

因为 $\text{supp} \psi_\lambda \subseteq mI(\lambda)$, 所以, 若 $I(\lambda) \subseteq J$, 则 $(f_3, \psi_\lambda) = 0$. 注意到 $(f_1, \psi_\lambda) = 0$, 因此,

$$\sum_{I(\lambda) \subseteq J} |a(\lambda)|^2 = \sum_{I(\lambda) \subseteq J} |(f_2, \psi_\lambda)|^2 \leq \sum_{\lambda} |(f_2, \psi_\lambda)|^2 = \frac{1}{2|mJ|} \int_{mJ} \int_{mJ} |f(x) - f(y)|^2 dx dy.$$

由引理 4.1, 我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{I(\lambda) \subseteq I} K\left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(I)}\right) \frac{|a(\lambda)|^2}{\ell(\lambda)^n} &\approx \sum_{k=0}^{\infty} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} \frac{1}{|J|} \sum_{I(\lambda) \subseteq J} |a(\lambda)|^2 \\ &\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} \frac{1}{|J|} \frac{1}{|mJ|} \int_{mJ} \int_{mJ} |f(x) - f(y)|^2 dx dy. \end{aligned}$$

由定理 2.1 的证明过程可得

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} K\left(\frac{1}{2^k}\right) \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} \frac{1}{|J|} \frac{1}{|mJ|} \int_{mJ} \int_{mJ} |f(x) - f(y)|^2 dx dy \\ &\lesssim \int_{mI} \int_{mI} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{2n}} K\left(\frac{|x - y|}{\ell(I)}\right) dx dy \lesssim \|f\|_{\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

所以,

$$\sup_{I \in \mathcal{D}} \sum_{I(\lambda) \subseteq I} K\left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(I)}\right) \frac{|a(\lambda)|^2}{\ell(\lambda)^n} \lesssim \|f\|_{\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)}^2.$$

另一方面, 假设 $\{a(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ 满足

$$\sup_{I \in \mathcal{D}} \sum_{I(\lambda) \subseteq I} K\left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(I)}\right) \frac{|a(\lambda)|^2}{\ell(\lambda)^n} < \infty.$$

因为 K 满足 (1.1), 我们可以假设 $K(t)/t^n$ 是减函数. 从而, 当 $I(\lambda) \subseteq I$ 时,

$$K\left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(I)}\right) \frac{\ell(I)^n}{\ell(\lambda)^n} \gtrsim K(1).$$

所以,

$$\sup_{I \in \mathcal{D}} |I|^{-1} \sum_{I(\lambda) \subseteq I} |a(\lambda)|^2 \lesssim \sup_{I \in \mathcal{D}} \sum_{I(\lambda) \subseteq I} K\left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(I)}\right) \frac{|a(\lambda)|^2}{\ell(\lambda)^n} < \infty.$$

由文献 [13, 第 5.6 节], 我们得到

$$f = \sum_{\lambda} a(\lambda) \psi_{\lambda} \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n).$$

接下来, 我们将证明 $\|f\|_{\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)} < \infty$. 设 I 是任意一个二倍长的方体 (即边长为 2^k 的方体, k 为一个整数), $J \in \mathcal{D}(I)$. 令

$$\Lambda_0(J) = \{\lambda \in \Lambda : mI(\lambda) \cap J \neq \emptyset\}.$$

利用文献 [7] 中的技巧, 我们将 $\Lambda_0(J)$ 划分成

$$\Lambda_1 = \Lambda_1(J) = \{\lambda \in \Lambda_0(J) : |I(\lambda)| \leq |J|\},$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_2(J) = \{\lambda \in \Lambda_0(J) : |J| < |I(\lambda)| \leq |I|\},$$

$$\Lambda_3 = \Lambda_3(J) = \{\lambda \in \Lambda_0(J) : |I| < |I(\lambda)|\}.$$

注意到除了 $\lambda \in \Lambda_0$ 之外, ψ_{λ} 在 J 上取值都为零. 当 $x \in J$ 时, 令 $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, 其中

$$f_i = \sum_{\lambda \in \Lambda_i} a(\lambda) \psi_{\lambda}.$$

因为

$$\Phi_f(J) = \frac{1}{|J|} \int_J |f(x) - f_J|^2 dx = \frac{1}{2|J|^2} \int_J \int_J |f(x) - f(y)|^2 dx dy,$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式得到

$$\Phi_f(J) \lesssim \sum_{i=1}^3 \Phi_{f_i}(J).$$

接下来, 我们将分别估计这三部分. 首先,

$$\Phi_{f_1}(J) = \frac{1}{|J|} \int_J |f_1(x) - f_{1,J}|^2 dx \leq \frac{1}{|J|} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^2 dx = \frac{1}{|J|} \sum_{\lambda \in \Lambda_1} |a(\lambda)|^2.$$

其次, 小波满足条件 (3) 可推出 $|\frac{\partial}{\partial x_i} \psi_\lambda| \lesssim 2^j 2^{jn/2}$, $i = 1, 2, \dots, n$. 再结合 $\ell(\lambda) = 2^{-j}$, 我们得到

$$|\nabla \psi_\lambda| \lesssim 2^j 2^{jn/2} \lesssim \ell(\lambda)^{-1-\frac{n}{2}}.$$

因此,

$$|f_2(x) - f_2(y)| \lesssim \sum_{\lambda \in \Lambda_2} \ell(\lambda)^{-1-\frac{n}{2}} |a(\lambda)| |x - y|.$$

因为 K 满足条件 (1.1) 与 (1.2), 那么由文献 [5], 我们可假设存在一个足够小的常数 $c > 0$ 使得 $K(t)/t^{n-c}$ 是减函数以及 $K(t)/t^{n-2+c}$ 是增函数, $n \geq 1$. 利用 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned} \Phi_{f_2}(J) &= \frac{1}{2} \frac{1}{|J|^2} \int_J \int_J |f_2(x) - f_2(y)|^2 dx dy \\ &\lesssim \ell(J)^2 \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_2} \ell(\lambda)^{-1-\frac{n}{2}} |a(\lambda)| \right)^2 \\ &\lesssim \ell(J)^2 \sum_{\lambda \in \Lambda_2} \ell(\lambda)^{-2-n} |a(\lambda)|^2 \left(\frac{\ell(J)}{\ell(\lambda)} \right)^{-c/6} \sum_{\lambda \in \Lambda_2} \left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(J)} \right)^{-c/6}. \end{aligned}$$

若 $\lambda \in \Lambda_2$, 则 $mI(\lambda) \cap J \neq \emptyset$. 从而, 二进方体 $I(\lambda)$ 包含在一个方体 I_0 中, I_0 可这样取得: I_0 与 J 有相同的中心, I_0 的边长为 $(m+1)\ell(\lambda) + \ell(J)$. 显然,

$$(m+1)\ell(\lambda) + \ell(J) \leq (m+2)\ell(\lambda).$$

因此, 对任意的 $k \geq 1$, 至多有 $(m+2)^n$ 个这样的方体 $I(\lambda)$ 满足 $\ell(\lambda) = 2^k \ell(J)$. 并且不同的 λ 所对应的这样的方体的个数为 $2^n - 1$. 所以, 对每个 $k \geq 1$,

$$\text{Card}\{\lambda \in \Lambda_2 : \ell(\lambda) = 2^k \ell(J)\} \lesssim 1.$$

于是,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_2} \left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(J)} \right)^{-c/6} \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kc/6} < \infty.$$

从而,

$$\Phi_{f_2}(J) \lesssim \ell(J)^2 \sum_{\lambda \in \Lambda_2} \ell(\lambda)^{-2-n} |a(\lambda)|^2 \left(\frac{\ell(J)}{\ell(\lambda)} \right)^{-c/6}.$$

类似地, 可得到

$$|f_3(x) - f_3(y)| \lesssim \sum_{\lambda \in \Lambda_3} \ell(\lambda)^{-1-n/2} |a(\lambda)| |x - y|.$$

对 $\lambda \in \Lambda_3$, 我们有

$$\infty > \sum_{I(\lambda_1) \subseteq I(\lambda)} K\left(\frac{\ell(\lambda_1)}{\ell(\lambda)}\right) \frac{|a(\lambda_1)|^2}{\ell(\lambda_1)^n} \geq K(1) \frac{|a(\lambda)|^2}{\ell(\lambda)^n}.$$

所以,

$$|f_3(x) - f_3(y)| \lesssim \sum_{\lambda \in \Lambda_3} \ell(\lambda)^{-1} |x - y|.$$

由相同的原因, 对每个 $k \geq 1$, $\text{Card}\{\lambda \in \Lambda_3 : \ell(\lambda) = 2^k \ell(I)\} \lesssim 1$ 成立. 从而,

$$|f_3(x) - f_3(y)| \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \ell(I)^{-1} |x - y| \lesssim \ell(I)^{-1} |x - y|.$$

因此,

$$\Phi_{f_3}(J) = \frac{1}{2} \frac{1}{|J|^2} \int_J \int_J |f_3(x) - f_3(y)|^2 dx dy \lesssim \ell(J)^2 \ell(I)^{-2}.$$

所以,

$$\Phi_f(J) \lesssim \sum_{i=1}^3 \Phi_{f_i}(J) \lesssim \frac{1}{|J|} \sum_{\lambda \in \Lambda_1} |a(\lambda)|^2 + \ell(J)^2 \ell(I)^{-2} + \ell(J)^2 \sum_{\lambda \in \Lambda_2} \ell(\lambda)^{-2-n} |a(\lambda)|^2 \left(\frac{\ell(J)}{\ell(\lambda)} \right)^{-c/6}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \Psi_{f,K}(I) &= \sum_{J \in \mathcal{D}(I)} K \left(\frac{\ell(J)}{\ell(I)} \right) \Phi_f(J) \\ &\lesssim \sum_{J \in \mathcal{D}(I)} K \left(\frac{\ell(J)}{\ell(I)} \right) \frac{1}{|J|} \sum_{\lambda \in \Lambda_1(J)} |a(\lambda)|^2 + \sum_{J \in \mathcal{D}(I)} K \left(\frac{\ell(J)}{\ell(I)} \right) \ell(J)^2 \ell(I)^{-2} \\ &\quad + \sum_{J \in \mathcal{D}(I)} K \left(\frac{\ell(J)}{\ell(I)} \right) \ell(J)^2 \sum_{\lambda \in \Lambda_2(J)} \ell(\lambda)^{-2-n} |a(\lambda)|^2 \left(\frac{\ell(J)}{\ell(\lambda)} \right)^{-c/6}. \end{aligned}$$

上式中的第二个和式

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \mathcal{D}(I)} K \left(\frac{\ell(J)}{\ell(I)} \right) \ell(J)^2 \ell(I)^{-2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{J \in \mathcal{D}_k(I)} K \left(\frac{1}{2^k} \right) \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} K \left(\frac{1}{2^k} \right) 2^{kn} \frac{1}{2^{2k}} \\ &\approx \int_0^1 K(s) \frac{ds}{s^{n-1}} < \infty. \end{aligned}$$

对第一个与第三个和式, 我们交换求和的顺序. 当 $\lambda \in \Lambda_1(J)$ 以及 $\lambda \in \Lambda_2(J)$ 时, $\ell(\lambda) \leq \ell(I)$ 并且 $mI(\lambda) \cap I \neq \emptyset$. 令

$$\mathbf{E}(I) = \{I' \in \mathcal{D} : |I'| = |I| \text{ 并且 } mI' \cap I \neq \emptyset\},$$

那么存在 $I' \in \mathbf{E}(I)$ 使得 $I(\lambda) \in \mathcal{D}(I')$. 从而存在非负整数 k 使得 $\ell(\lambda) = 2^{-k} \ell(I') = 2^{-k} \ell(I)$. 当 $j \leq k$ 时, 只有有限个方体 $J \in \mathcal{D}_j(I)$ 并且 $\lambda \in \Lambda_1(J)$; 当 $j > k$ 时, 有至多 $C2^{(j-k)n}$ 个方体 $J \in \mathcal{D}_j(I)$ 且满足 $\lambda \in \Lambda_2(J)$. 所以,

$$\sum_{J \in \mathcal{D}(I)} K \left(\frac{\ell(J)}{\ell(I)} \right) \frac{1}{|J|} \sum_{\lambda \in \Lambda_1(J)} |a(\lambda)|^2 \lesssim \sum_{I' \in \mathbf{E}(I)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{I(\lambda) \in \mathcal{D}_k(I')} \sum_{j=0}^k K(2^{-j}) 2^{nj} \ell(I)^{-n} |a(\lambda)|^2.$$

因为

$$\sum_{j=0}^k K(2^{-j}) 2^{nj} = \sum_{j=0}^k K(2^{-j}) 2^{j(n-c+c)} \leq K(2^{-k}) 2^{k(n-c)} \sum_{j=0}^k 2^{jc} \lesssim K(2^{-k}) 2^{kn},$$

得到

$$\sum_{J \in \mathcal{D}(I)} K \left(\frac{\ell(J)}{\ell(I)} \right) \frac{1}{|J|} \sum_{\lambda \in \Lambda_1(J)} |a(\lambda)|^2 \lesssim \sum_{I' \in \mathbf{E}(I)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{I(\lambda) \in \mathcal{D}_k(I')} K(2^{-k}) 2^{kn} \ell(I)^{-n} |a(\lambda)|^2$$

$$\lesssim \sum_{I' \in \mathbf{E}(I)} \sum_{I(\lambda) \subseteq I'} K\left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(I')}\right) \frac{|a(\lambda)|^2}{\ell(\lambda)^n}.$$

注意到 $\mathbf{E}(I)$ 中元素的个数仅与 m 以及 n 相关, 从而,

$$\sum_{J \in \mathcal{D}(I)} K\left(\frac{\ell(J)}{\ell(I)}\right) \frac{1}{|J|} \sum_{\lambda \in \Lambda_1(J)} |a(\lambda)|^2 < \infty.$$

类似地,

$$\begin{aligned} & \sum_{J \in \mathcal{D}(I)} K\left(\frac{\ell(J)}{\ell(I)}\right) \ell(J)^2 \sum_{\lambda \in \Lambda_2(J)} \ell(\lambda)^{-2-n} |a(\lambda)|^2 \left(\frac{\ell(J)}{\ell(\lambda)}\right)^{-c/6} \\ & \lesssim \sum_{I' \in \mathbf{E}(I)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{I(\lambda) \in \mathcal{D}_k(I')} \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{(j-k)n} K(2^{-j}) 2^{-2j} \ell(I)^2 2^{k(2+n)} \ell(I)^{-2-n} |a(\lambda)|^2 2^{(j-k)c/6} \\ & \lesssim \sum_{I' \in \mathbf{E}(I)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{I(\lambda) \in \mathcal{D}_k(I')} \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{kn} 2^{(j-k)(n-2+\frac{c}{6})} \ell(I)^{-n} |a(\lambda)|^2 K(2^{-j}). \end{aligned}$$

因为 K 满足 (1.2), 我们得到

$$\varphi_K(s) \lesssim s^{n+c-2}, \quad 0 < s \leq 1, \quad n \geq 1.$$

从而,

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{(j-k)(n-2+\frac{c}{6})} K(2^{-j}) &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i(n-2+\frac{c}{6})} K(2^{-(i+k)}) \leq K(2^{-k}) \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i(n-2+\frac{c}{6})} \varphi_K(2^{-i}) \\ &\leq K(2^{-k}) \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i5c/6} \lesssim K(2^{-k}). \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} & \sum_{J \in \mathcal{D}(I)} K\left(\frac{\ell(J)}{\ell(I)}\right) \ell(J)^2 \sum_{\lambda \in \Lambda_2(J)} \ell(\lambda)^{-2-n} |a(\lambda)|^2 \left(\frac{\ell(J)}{\ell(\lambda)}\right)^{-c/6} \\ & \lesssim \sum_{I' \in \mathbf{E}(I)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{I(\lambda) \in \mathcal{D}_k(I')} K(2^{-k}) 2^{kn} \ell(I)^{-n} |a(\lambda)|^2 \\ & \lesssim \sum_{I' \in \mathbf{E}(I)} \sum_{I(\lambda) \subseteq I'} K\left(\frac{\ell(\lambda)}{\ell(I')}\right) \frac{|a(\lambda)|^2}{\ell(\lambda)^n} < \infty. \end{aligned}$$

所以, 我们证出了对所有的二倍长的方体 I ,

$$\Psi_{f,K}(I) = \sum_{J \in \mathcal{D}(I)} K\left(\frac{\ell(J)}{\ell(I)}\right) \Phi_f(J) < C.$$

因为每个方体 I_1 可以包含在一个二倍长的方体 I_2 中, 并且 $\ell(I_2) < 2\ell(I_1)$. 由定理 2.1 得 $f \in \mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$.

若 $f, g \in \mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n) \subseteq \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 有相同的小波系数, 则它们定义了 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上相同的线性泛函, 由文献 [13] 知, f 与 g 仅相差一个常数, 所以在 $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)/\mathbb{C}$ 中具有相同小波系数的函数是唯一的. 这样, 我们完成了定理 4.2 的证明. $\square$

致谢 作者衷心感谢审稿人提出的有价值的意见.

参考文献

- 1 Essén M, Wulan H. On analytic and meromorphic function and spaces of $\mathcal{Q}_K$ -type. *Illinois J Math*, 2002, 46: 1233–1258
- 2 Essén M, Wulan H, Xiao J. Several function-theoretic characterizations of Möbius invariant $\mathcal{Q}_K$ spaces. *J Funct Anal*, 2006, 230: 78–115
- 3 Wulan H, Ye F. Universal Teichmüller space and $\mathcal{Q}_K$ spaces. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 2014, 39: 691–709
- 4 Wulan H, Zhou J. Decomposition theorems for $\mathcal{Q}_K$ spaces and applications. *Forum Math*, 2014, 26: 467–495
- 5 Bao G, Wulan H. $\mathcal{Q}_K$ spaces of several real variables. *Abstr Appl Anal*, 2014, 2014: 931937
- 6 John F, Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation. *Comm Pure Appl Math*, 1961, 14: 415–426
- 7 Essén M, Janson S, Peng L, et al. $\mathcal{Q}$ spaces of several real variables. *Indiana Univ Math J*, 2000, 49: 575–615
- 8 Dafni G, Xiao J. Some new tent spaces and duality theorems for fractional Carleson measures and $\mathcal{Q}_\alpha(\mathbb{R}^n)$. *J Funct Anal*, 2004, 208: 377–422
- 9 Yue H, Dafni G. A John-Nirenberg type inequality for $\mathcal{Q}_\alpha(\mathbb{R}^n)$. *J Math Anal Appl*, 2009, 351: 428–439
- 10 Peng L, Yang Q. Predual spaces for $\mathcal{Q}$ spaces. *Acta Math Sci Ser B Engl Ed*, 2009, 29: 243–250
- 11 Calderón A, Zygmund A. On the existence of certain singular integrals. *Acta Math*, 1952, 88: 85–139
- 12 Neri U. Some properties of functions with bounded mean oscillation. *Studia Math*, 1977, 66: 63–75
- 13 Meyer Y. *Wavelets and Operators*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992

John-Nirenberg type inequality and wavelet characterization for $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ spaces

BAO GuanLong & WULAN Hasi

Abstract The theory of analytic $\mathcal{Q}_K$ spaces in the unit disk is becoming more complete. In this paper, $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ spaces of several real variables are investigated. We give a characterization of $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ spaces in terms of the mean oscillation of functions over cubes. Applying the characterization and the Calderón-Zygmund decomposition, we establish John-Nirenberg type inequality for $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$. We also show that $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ spaces can be characterized in the sense of the wavelet coefficients.

Keywords $\mathcal{Q}_K(\mathbb{R}^n)$ spaces, John-Nirenberg type inequality, wavelet

MSC(2010) 42B35, 42C15

doi: 10.1360/N012015-00149