时滞微分方程周期解的唯一性问题

献给张芷芬教授 90 华诞

庾建设

广州大学数学与信息科学学院, 广州 510006

E-mail: jsyu@gzhu.edu.cn

收稿日期: 2016-04-19; 接受日期: 2016-08-24; 网络出版日期: 2016-09-21

国家自然科学基金 (批准号: 11471085) 资助项目

摘要 考虑时滞微分方程

$$x'(t) = -f(x(t-1)),$$

其中 $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 是一个奇函数且满足 $xf(x) > 0$ ($x \neq 0$). 本文通过引进角速度函数以及应用移动直角三角形技巧, 给出了上述方程至多有一个周期为 4 的 Kaplan-Yorke 型周期解的充分条件, 首次改进了 Nussbaum (1979) 的唯一性结果. 最后, 本文还举例给出了定理的应用.

关键词 时滞微分方程 Kaplan-Yorke 型周期解 Hamilton 系统 角速度函数 移动三角形技巧**MSC (2010) 主题分类** 34K13, 58E50

1 引言

考虑时滞微分方程

$$x'(t) = -f(x(t-1)) \quad (1.1)$$

及其对应的微分方程组

$$\begin{cases} x'(t) = -f(y), \\ y'(t) = f(x), \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 是一个奇函数且满足 $xf(x) > 0$ ($x \neq 0$). 方程 (1.1) 的周期解存在性问题已被广泛研究, 如文献 [1–5] 等. Kaplan 和 Yorke^[1] 证明了以下周期解的存在定理:

定理 A (Kaplan-Yorke 定理) 假设

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad \text{和} \quad \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

存在 (可以为 0 或 ∞). 如果

$$\min\{\alpha, \beta\} < \frac{\pi}{2} < \max\{\alpha, \beta\}, \quad (1.3)$$

英文引用格式: Yu J S. Uniqueness of periodic solutions for delay differential equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 221–226, doi: 10.1360/N012016-00085

并且 $F(x) = \int_0^x f(s)ds \rightarrow \infty$ (当 $x \rightarrow \infty$ 时), 则方程 (1.1) 存在振动的周期解 x , 且周期为 4, 满足方程组 (1.2), 这里 $y(t) = x(t-1)$ 以及满足 $x(t-2) = -x(t)$.

这种形式的解我们称为 Kaplan-Yorke 型周期解. 后来, Nussbaum^[2] 证明了条件 $F(x) \rightarrow \infty$ (当 $x \rightarrow \infty$ 时) 可以去掉. 这一研究的两大特点在于, 一是提供了研究时滞微分方程周期解的新方法, 将方程 (1.1) 的 Kaplan-Yorke 周期解问题转化为研究常微分方程组 (1.2) 的 Kaplan-Yorke 周期解问题 (这一方法已得到广泛应用, 参见文献 [2, 3, 6-8] 等), 即证明了时滞微分方程 (1.1) 的 Kaplan-Yorke 型周期解与常微分方程组 (1.2) 的 Kaplan-Yorke 型周期解完全是等价的; 二是证明了所得周期解的周期是最小的. 但是, 条件 (1.3) 在定理的证明中起了十分重要的作用. 最近, 文献 [8] 证明了在 (1.3) 不成立的前提下, 方程 (1.1) 仍可能存在周期为 4 的 Kaplan-Yorke 周期解, 即当 $\max\{\alpha, \beta\} < \frac{\pi}{2}$, 或 $\min\{\alpha, \beta\} > \frac{\pi}{2}$, 或 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 或 $\beta = \frac{\pi}{2}$, 甚至 α 或 β 不存在时, 均给出了方程 (1.1) 至少有一个周期为 4 的 Kaplan-Yorke 周期解的充分条件. 相反, 研究 (1.1) 的周期解唯一性的工作却相当少. 早在 1979 年, Nussbaum^[9] 证明了下面定理:

定理 B^[9] (Nussbaum 唯一性定理) 假设 $f(x) = ax$ (对 $|x| \leq b$, 其中 $b \geq 0$ 且 a 是一个常数). 如果 $\frac{f(x)}{x}$ 对于 $x \geq b$ 是严格单调递增 (或严格单调递减) 的, 则 (1.1) 至多有一个周期为 4 的 Kaplan-Yorke 周期解.

这是到目前为止, 仅有的关于 (1.1) 的 Kaplan-Yorke 周期解唯一性的工作. 这个结果的显著特点是条件简洁且易于验证, 但不足之处是对 $\frac{f(x)}{x}$ 的单调性条件太强. 本文目的是减弱其单调性, 即不要要求 $\frac{f(x)}{x}$ 具有整体单调性. 为方便起见, 我们记 $\phi(x) = \frac{f(x)}{x}$ (对于 $x \neq 0$), $\phi(0) = \liminf_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$. 本文的主要结果如下:

定理 1 假设存在常数 $0 < b_1 < b$ 使得 $2F(b_1) \leq F(b)$, $\phi(x) \leq \frac{\pi}{2}$ (对于 $0 < x \leq b$), 并且 $\phi(x)$ 在原点的任何邻域不恒等于 $\frac{\pi}{2}$. 如果对每个 $\alpha \in (0, 1)$, 函数 $\phi(x) + \alpha^2 \phi(\alpha x)$ 对于 $x \in [b_1, \frac{b_1}{\alpha}]$ 是单调递增的, 那么 (1.1) 至多有一个周期为 4 的 Kaplan-Yorke 周期解.

注 1 由定理的条件可知, $\phi(x)$ 在 $x \in [b_1, \infty)$ 上是单调递增的 (令 $\alpha \rightarrow 0$ 即可). 与 Nussbaum 唯一性定理比较, 除函数 $\phi(x)$ 在区间 $(0, b_1]$ 内可以不单调递增外, 在 $x \geq b_1$ 上的单调性也不一定是严格的.

类似地, 我们有以下定理:

定理 2 假设存在常数 $0 < b_1 < b$ 使得 $2F(b_1) \leq F(b)$, $\phi(x) \geq \frac{\pi}{2}$ (对于 $0 < x \leq b$), 并且 $\phi(x)$ 在原点的任何邻域不恒等于 $\frac{\pi}{2}$. 如果对每个 $\alpha \in (0, 1)$, 函数 $\phi(x) + \alpha^2 \phi(\alpha x)$ 对于 $x \in [b_1, \frac{b_1}{\alpha}]$ 是单调递减的, 那么 (1.1) 至多有一个周期为 4 的 Kaplan-Yorke 周期解.

下面的推论显然成立.

推论 1 假设存在常数 $0 < b_1 < b$ 使得 $2F(b_1) \leq F(b)$, $\phi(x) \leq$ (或 $\geq$) $\frac{\pi}{2}$ (对于 $0 < x \leq b$), 并且 $\phi(x)$ 在原点的任何邻域不恒等于 $\frac{\pi}{2}$. 如果函数 $\phi(x)$ 对于 $x \geq b_1$ 是单调递增 (或递减) 的, 那么 (1.1) 至多有一个周期为 4 的 Kaplan-Yorke 周期解.

2 预备知识

为了证明本文的定理, 我们需要建立几个概念与引理, 它们将在定理的证明中起到十分重要的作用. 为方便起见, 对 $(x, y) \neq (0, 0)$, 定义

$$I(x, y) = \frac{x^2 \phi(x) + y^2 \phi(y)}{x^2 + y^2}. \quad (2.1)$$

补充定义 $I(0,0) = \phi(0)$. 显然, $I \in C(\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}, \mathbb{R})$. 令 $H(x,y) = F(x) + F(y)$, 则对任意的 $c > 0$, 系统 (1.2) 的满足初始条件 $x(0) = c, y(0) = 0$ 的解是周期的, 并且其对应的轨道 $\Gamma_c = \{A_c(t) = (x_c(t), y_c(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ 关于 x 轴、 y 轴以及直线 $y = x$ 和 $y = -x$ 是对称的, 并且还满足

$$H(x_c(t), y_c(t)) = F(x_c(t)) + F(y_c(t)) = F(c), \quad t \in [0, T(c)].$$

让 $T(c)$ 表示轨道 Γ_c 的最小周期, 则轨道 Γ_c 与 x 轴和 y 轴按逆时针方向的四个交点分别是 $A_c(0) = (x_c(0), y_c(0)) = (c, 0)$, $A_c(\frac{T(c)}{4}) = (0, c)$, $A_c(\frac{T(c)}{2}) = (-c, 0)$ 和 $A_c(\frac{3T(c)}{4}) = (0, -c)$. 同样, 通过 L_c 关于 $y = x$ 和 $y = -x$ 的对称性, 容易看出, L_c 与直线 $y = x$ 和 $y = -x$ 依逆时针方向的四个交点分别是 $A_c(\frac{T(c)}{8}) = (F^{-1}(\frac{1}{2}F(c)), F^{-1}(\frac{1}{2}F(c)))$, $A_c(\frac{3T(c)}{8}) = (-F^{-1}(\frac{1}{2}F(c)), F^{-1}(\frac{1}{2}F(c)))$, $A_c(\frac{5T(c)}{8}) = (-F^{-1}(\frac{1}{2}F(c)), -F^{-1}(\frac{1}{2}F(c)))$ 和 $A_c(\frac{7T(c)}{8}) = (F^{-1}(\frac{1}{2}F(c)), -F^{-1}(\frac{1}{2}F(c)))$. 由于前面提到的对称性, 因此, 轨道 Γ_c 完全可以由它的八分之一部分, 即由 $\{A_c(t) \mid t \in [0, \frac{T(c)}{8}]\}$ 部分来决定.

对于 $(x,y) \neq (0,0)$, 让 $\theta(x,y)$ 表示从正 x 轴按逆时针方向到连接原点 $(0,0)$ 和 (x,y) 的线段所成的夹角. 现在, 记 $\theta_c(t) = \theta(A_c(t)) = \theta(x_c(t), y_c(t))$, 则 $\tan(\theta_c(t)) = \frac{y_c(t)}{x_c(t)}$, 并且从 (1.2) 和 (2.1), 我们得到

$$\theta'_c(t) = \frac{x_c^2(t)\phi(x_c(t)) + y_c^2(t)\phi(y_c(t))}{x_c^2(t) + y_c^2(t)} = I(A_c(t)).$$

这表明 $I(A_c(t))$ 就是轨线 Γ_c 在点 $A_c(t)$ 的旋转速度或角速度. 因此, 我们称 $I(x,y)$ 为系统 (1.2) 的角速度函数. 它将在定理的证明中起十分重要的作用. 下面的引理 1 取自文献 [8].

引理 1 [8] 假设 $\phi(x) \leq \frac{\pi}{2}$ (或 $\geq \frac{\pi}{2}$) 且 $\frac{f(x)}{x}$ 在原点的任何邻域不恒等于 $\frac{\pi}{2}$, 那么 (1.2) 没有周期为 4 的 Kaplan-Yorke 型周期解.

引理 2 假设存在 $h > 0$ 使得 $\phi(x)$ 在 $x \geq h$ 上是单调递增的, 那么对满足 $x_0 \geq h, y_0 \geq h$ 的 (x_0, y_0) , $I(\alpha x_0, \alpha y_0)$ 关于 $\alpha \geq 1$ 是单调递增的.

证明 由于 $I(\alpha x_0, \alpha y_0) = \frac{x_0^2\phi(\alpha x_0) + y_0^2\phi(\alpha y_0)}{x_0^2 + y_0^2}$ 以及 $\phi(x)$ 的单调性, 故 $I(\alpha x_0, \alpha y_0)$ 关于 $\alpha \geq 1$ 是单调递增的. 证毕. $\square$

另外, 对于 $c > 0$ 以及 $t \in [0, \frac{T(c)}{8}]$, 令 $\beta_{c,t} = \frac{y_c(t)}{x_c(t)}$, 则 $\beta_{c,t} \in [0, 1]$. 这样, 在直线 $y = \beta_{c,t}x$ 上, 它的角速度函数为

$$I_{\beta_{c,t}}(x) = \frac{\phi(x) + \beta_{c,t}^2\phi(\beta_{c,t}x)}{1 + \beta_{c,t}^2}.$$

引理 3 假设存在常数 $0 < b_1 < b$ 使得 $2F(b_1) \leq F(b)$ 以及对每个 $\alpha \in (0, 1)$, 函数 $\phi(x) + \alpha^2\phi(\alpha x)$ 对于 $x \in [b_1, \frac{b_1}{\alpha}]$ 是单调递增的, 则 $T(c)$ 在 $c \geq b$ 上是单调递减的.

证明 对任意的 $b \leq c_1 < c_2$, 我们只需证明 $T(c_1) \geq T(c_2)$. 我们比较相应的两条轨道 Γ_{c_1} 和 Γ_{c_2} . 这样, 对每个 $t \in [0, T(c_1)]$, 存在唯一的 $s \in [0, T(c_2)]$ 使得

$$\theta_{c_1}(t) = \theta_{c_2}(s).$$

由于 $\theta_{c_1}(t)$ 是严格单调递增的, 故它的逆映射 $\theta_{c_1}^{-1}$ 存在, 记上式定义的函数为

$$t = \theta_{c_1}^{-1}\theta_{c_2}(s) = w_{c_1, c_2}(s), \quad s \in [0, T(c_2)]. \quad (2.2)$$

容易看到, 由 (2.2) 定义的函数 $t = w_{c_1, c_2}(s)$ 是连续可微且严格单调递增的, 而且

$$\frac{dt}{ds} = w'_{c_1, c_2}(s) = \frac{\theta'_{c_2}(s)}{\theta'_{c_1}(t)} = \frac{I(A_{c_2}(s))}{I(A_{c_1}(t))}, \quad s \in [0, T(c_2)].$$

显然, $\beta_{c_1,t} = \beta_{c_2,s}$. 于是由上式, 可得

$$\frac{dt}{ds} = w'_{c_1,c_2}(s) = \frac{\phi(x_{c_2}(s)) + \beta_{c_1,t}^2 \phi(\beta_{c_1,t} x_{c_2}(s))}{\phi(x_{c_1}(t)) + \beta_{c_1,t}^2 \phi(\beta_{c_1,t} x_{c_1}(t))} = \frac{I_{\beta_{c_1,t}}(x_{c_2}(s))}{I_{\beta_{c_1,t}}(x_{c_1}(t))}.$$

由于对每个 $s \in [0, \frac{T(c_2)}{8}]$, 有 $b_1 \leq x_{c_1}(t) < x_{c_2}(s)$, 故根据引理的条件, 我们得到

$$I_{\beta_{c_1,t}}(x_{c_2}(s)) \geq I_{\beta_{c_1,t}}(x_{c_1}(t)),$$

从而,

$$\frac{dt}{ds} = w'_{c_1,c_2}(s) \geq 1, \quad s \in \left[0, \frac{T(c_2)}{8}\right].$$

对上式从 0 到 $\frac{T(c_2)}{8}$ 求积分, 得 $\frac{T(c_1)}{8} \geq \frac{T(c_2)}{8}$, 即 $T(c_1) \geq T(c_2)$, 故结论成立. 证毕. $\square$

3 定理的证明

定理 1 的证明 如果 $\phi(x) \leq \frac{\pi}{2}$ (对于所有 $x \geq b$), 那么应用引理 1, 此时 (1.2) 没有周期为 4 的 Kaplan-Yorke 型周期解. 现在假设存在某个 $h \geq b$ 使得 $\phi(h) = \frac{\pi}{2}$ 且 $\phi(x) > \frac{\pi}{2}$ (对于 $x > h$). 不妨假设 $h = b$. 我们仅需要证明 (1.2) 有且仅有一个周期为 4 的 Kaplan-Yorke 型周期解. 从文献 [8], 可得 $T(c) > 4$ (对于 $c \in (0, b]$) 及 $T(\infty) < 4$. 因此, 必定存在 $c_1 > b$ 使得 $T(c_1) = 4$ 及 $T(c) > 4$ (对于 $0 < c < c_1$). 根据引理 3, $T(c)$ 在 $c \geq b$ 上是单调递减的. 反设定理的结论不成立, 则必存在 $c_2 > c_1$ 使得

$$T(m) \equiv 4, \quad m \in [c_1, c_2], \quad (3.1)$$

以及 $T(m) < 4$ (对于 $m > c_2$). 下面将应用移动三角形技巧证明 (3.1) 是不可能的. 现假设 (3.1) 是正确的. 我们考虑轨道 Γ_m 和 Γ_{c_2} . 对每个 $s \in [0, \frac{T(c_2)}{8}]$, 存在唯一的 $t \in [0, \frac{T(m)}{8}]$ 使得 $\theta_m(t) = \theta_{c_2}(s)$. 因此, $I(x, y)$ 在每个连接 $A_m(t)$ 和 $A_{c_2}(s)$ 的线段上取常值, 即存在 $r_t > 0$ 使得

$$I_{\beta_{m,t}}(x) = \frac{\phi(x) + \beta_{m,t}^2 \phi(\beta_{m,t} x)}{1 + \beta_{m,t}^2} \equiv r_t, \quad x \in [x_m(t), x_{c_2}(s)].$$

现在证明 r_t 等于一个常数. 令 $r = r_{\frac{T(m)}{8}}$, 则可以证明 $r_t \equiv r$ 并且

$$\phi(x) \equiv r, \quad x \in [0, c_2]. \quad (3.2)$$

如图 1 所示, 现在我们开始构造直角三角形序列 $\{\triangle A_n B_n C_n\}$. 让 $A_1 = A_m(\frac{T(m)}{8})$, $B_1 = A_{c_2}(\frac{T(c_2)}{8})$

图 1 移动直角三角形序列 $\{\triangle A_n B_n C_n\}$ 示意图

且 C_1 是直线 $y = y_m(\frac{T(m)}{8})$ 与 $x = x_{c_2}(\frac{T(m)}{8})$ 的交点. 这样, $\triangle A_1 B_1 C_1$ 就是位于 Γ_m 与 Γ_{c_2} 之间的一个直角三角形. 连接原点 $O = (0, 0)$ 与 C_1 的直线 $\overline{OC_1}$ 分别与轨道 Γ_m 和 Γ_{c_2} 要相交, 记它们的交点分别为 A_2 和 B_2 . 因此存在 $t_1 \in (0, \frac{T(m)}{8})$ 和 $s_1 \in (0, \frac{T(c_2)}{8})$ 使得 $A_2 = A_m(t_1) = (x_m(t_1), y_m(t_1))$, $B_2 = (x_{c_2}(s_1), y_{c_2}(s_1))$. 让 C_2 是直线 $y = y_m(t_1)$ 与 $x = x_{c_2}(s_1)$ 的交点, 则获得了第二个直角三角形 $\triangle A_2 B_2 C_2$, 它也位于 Γ_m 与 Γ_{c_2} 之间. 通过类似的方法, 我们可以构造直角三角形序列 $\{\triangle A_n B_n C_n\}$, 其中 $A_{n+1} = A_m(t_n) = (x_m(t_n), y_m(t_n))$, $B_{n+1} = (x_{c_2}(s_n), y_{c_2}(s_n))$, $C_n = (x_{c_2}(s_n), y_m(t_n))$, $0 < t_{n+1} < t_n < \frac{T(m)}{8}$, $\theta_m(t_n) = \theta_{c_2}(s_n)$, $n = 1, 2, \dots$. 这个三角形序列的构造在定理的证明中将起着十分重要的作用, 我们称这种方法为移动三角形技巧. 显然, 序列 $\{x_m(t_n)\}$ 是严格单调递增的, 而序列 $\{y_m(t_n)\}$ 是严格单调递减的. 容易证明

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_m(t_n) &= m, & \lim_{n \rightarrow \infty} y_m(t_n) &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{c_2}(s_n) &= c_2, & \lim_{n \rightarrow \infty} y_{c_2}(s_n) &= 0.\end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \triangle A_n B_n C_n = [m, c_2].$$

由于在线段 $\overline{A_1 B_1}$ 上, 有 $I(x, y) = \phi(x) = r$, 因此可得 $\phi(x) = r$ (对于 $x \in [x_m(\frac{T(m)}{8}), x_{c_2}(\frac{T(c_2)}{8})]$). 为方便起见, 记 $d_1 = x_m(\frac{T(m)}{8})$, $h_1 = x_{c_2}(\frac{T(c_2)}{8})$, 那么 $A_1 = (d_1, d_1)$, $B_1 = (h_1, h_1)$ 以及 $C_1 = (h_1, d_1)$, 从而有

$$\phi(x) \equiv r, \quad \text{对于 } x \in [d_1, h_1]. \quad (3.3)$$

进一步地, 可得

$$I(x, y) \equiv r, \quad \text{对于 } (x, y) \in \triangle A_1 B_1 C_1.$$

于是,

$$r_t \equiv r \quad \text{对于 } t \in \left[t_1, \frac{T(m)}{8}\right].$$

现在, 令 $d_2 = y_m(t_1)$, $h_2 = x_{c_2}(s_1)$, 则对每个 $x \in [d_2, d_1]$, 存在 $t(x) \in [t_1, \frac{T(m)}{8}]$ 使得 $x = y_m(t(x))$. 由于 $x_m(t(x)) \in [d_1, h_1]$, 所以 $\phi(x_m(t(x))) = r$, 从而可得 $\phi(x) = r$, 这就证明了

$$\phi(x) \equiv r, \quad \text{对于 } x \in [d_2, d_1].$$

同理, 可以证明

$$\phi(x) \equiv r, \quad \text{对于 } x \in [h_1, h_2].$$

结合 (3.3), 可得

$$\phi(x) \equiv r, \quad \text{对于 } x \in [d_2, h_2]. \quad (3.4)$$

以此类推, 通过归纳法并结合 (3.4), 可得

$$\phi(x) \equiv r, \quad \text{对于 } x \in [d_n, h_n], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

其中 $d_n = y_m(t_{n-1})$, $h_n = x_{c_2}(s_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$ 并补充定义 $t_0 = \frac{T(m)}{8}$, $s_0 = \frac{T(c_2)}{8}$. 显然, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $d_n \rightarrow 0$ 和 $h_n \rightarrow c_2$. 于是, 对 (3.5) 求极限, 得到 $\phi(x) \equiv r$, 对于 $x \in [0, c_2]$. 这就证明了 (3.2) 成立, 这显然是不可能的, 故 (3.1) 不成立. 证毕. $\square$

4 一个例子

例 1 令 $f(x) = x(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\beta} - x^2 + \beta x^4)$, 其中 $\beta > \frac{17}{2\pi}$ 是一个常数. 令 $b_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}}$, 那么通过一个简单的计算, 我们得到 $2F(b_1) < F(b)$ 以及 $\phi(b) = \frac{\pi}{2}$. 容易证明 $\phi(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\beta} - x^2 + \beta x^4$ 在区间 $(0, \frac{1}{\sqrt{2\beta}}]$ 上是严格单调递减的, 在区间 $[b_1, \infty)$ 上是严格单调递增的. 通过计算, $\phi(x) + \alpha^2 \phi(\alpha x) = (\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\beta})(1 + \alpha^2) - (1 + \alpha^4)x^2 + \beta(1 + \alpha^6)x^4$ 在 $[b_1, \frac{b_1}{\alpha}]$ 上是严格单调递增的. 因此根据定理 1, 方程 (1.1) 至多有一个周期为 4 的 Kaplan-Yorke 型周期解. 另一方面, 根据文献 [1], 方程 (1.1) 至少有一个周期为 4 的 Kaplan-Yorke 型周期解. 因此, 我们就证明了方程 (1.1) 只有一个周期为 4 的 Kaplan-Yorke 型周期解. 但是, 它不满足 Nussbaum 唯一性定理的条件.

参考文献

- 1 Kaplan J L, Yorke J A. Ordinary differential equations which yield periodic solution of delay equations. J Math Anal Appl, 1974, 48: 317–324
- 2 Nussbaum R D. Periodic solutions of special differential-delay equations: An example in non-linear functional analysis. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 1978, 81: 131–151
- 3 Hale J K. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1977
- 4 李森林, 温立志. 泛函微分方程. 长沙: 湖南科技出版社, 1987
- 5 郑祖庠. 泛函微分方程理论. 合肥: 安徽教育出版社, 1994
- 6 Guo Z M, Yu J S. Multiplicity results for periodic solutions to delay differential equations via critical point theory. J Differential Equations, 2005, 218: 15–35
- 7 Yu J S, Guo Z M. A survey on the periodic solutions to Kaplan-Yorke type delay differential equations-I. Ann Differential Equations, 2014, 30: 97–114
- 8 Yu J S. A note on periodic solutions for the delay differential equation $x'(t) = -f(x(t-1))$. Proc Amer Math Soc, 2013, 141: 1281–1288
- 9 Nussbaum R D. Uniqueness and nonuniqueness for periodic solutions of $x'(t) = -g(x(t-1))$. J Differential Equations, 1979, 34: 25–54

Uniqueness of periodic solutions for delay differential equations

YU JianShe

Abstract Consider the following delay differential equation $x'(t) = -f(x(t-1))$, where $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ is odd and satisfies $xf(x) > 0$ for $x \neq 0$. By introducing the angular speed function and developing a novel technique, the moving triangle technique, we obtain sufficient conditions for the above equation to have at most one Kaplan-Yorke periodic solution with period 4. This is the first time to improve the uniqueness result obtained by Nussbaum in 1979. Finally, an example is given to illustrate our results.

Keywords delay differential equations, Kaplan-Yorke periodic solutions, Hamiltonian system, angular speed function, moving triangle technique

MSC(2010) 34K13, 58E50

doi: 10.1360/N012016-00085