数字电路互信息分析

李晓倩*, 胡剑浩*

电子科技大学通信抗干扰国家级重点实验室, 成都 611731

* 通信作者. E-mail: lixq_email@163.com, jhhu@uestc.edu.cn

收稿日期: 2016-01-06; 接受日期: 2016-04-14; 网络出版日期: 2016-10-25

国家自然科学基金 (批准号: 61371104) 和国家高技术研究发展计划 (863) (批准号: 2014AA01A707) 资助项目

摘要 信息论是研究信息流通系统的有效工具, 其信息熵表征了信息的不确定度, 互信息表征了通信前后系统不确定度的减少量. 通信中常用互信息来表征通信系统的处理能力, 并且其与信道容量以及电路功率息息相关, 因此本论文考虑利用信息论的观点分析数字电路. 通过对电路抽象建模, 将电路分为了对称信道、非对称信道、无反馈以及反馈电路 4 种模型. 分别讨论了不同模型下, 互信息的变化趋势以及影响因素, 并证明出反馈对电路具有容错增益以及互信息增益. 本文的分析方法适用于其他电路, 且由于不涉及具体的电路形式, 可以为之后的电路设计提供理论基础.

关键词 信息论, 信息熵, 互信息, 对称信道, 反馈电路

1 引言

信息论最初是在狭义的通信系统基础上总结提高而发展起来的, 但在其不停的发展中, 其意义早已远远超出了原来的范围, 所有的信息流通系统都可用信息论观点进行分析^[1]. Shannon^[2]在1948年发表的文章中曾说过: 通信的基本问题是要在某一端准确或近似地再现从另一端选择出来的消息. 这句话恰如其分地表达了信息论的研究目的就是为了提高通信系统的可靠性和有效性. 因此, 本论文考虑以信息论的观点分析数字电路, 研究数字电路系统中的可靠性以及有效性.

以信息论的观点分析电路现有工作有: 从信息论角度看待电路功率以及输出的相关性问题^[3~6], 以信息论观点指导电路设计^[7,8], 以及利用互信息分析电路的供电电压下界, 分析电路的容错特性以及基于互信息对电路的有效性以及功率进行折衷^[9~13]. 但是在现有工作中仅有简单的举例说明或仅将电路简化为对称电路, 对模块电路的互信息分析并未得到系统化的解决. 基于此, 本文考虑将数字电路系统模块化、抽象化, 并根据电路的概率特性, 将信道分为对称信道与非对称信道, 根据电路的连接方式, 将电路分为反馈电路以及非反馈电路. 通过概率模型的建立, 从通信系统中的互信息出发, 分析了模块电路中的互信息在这 4 种模型下的变化及其影响因素, 并且将其与文献^[9~13]中的方法相结合, 可以得到电路的供电电压下界或功耗下界与容错特性之间的关系, 为提高电路容错性、有效性以及之后的电路设计提供理论基础.

引用格式: 李晓倩, 胡剑浩. 数字电路互信息分析. 中国科学: 信息科学, 2017, 47: 127–143, doi: 10.1360/N112015-00213

Li X Q, Hu J H. Mutual information analysis for digital circuits (in Chinese). Sci Sin Inform, 2017, 47: 127–143, doi: 10.1360/N112015-00213

图 1 典型通信系统的方框图表示

Figure 1 The block diagram of communication system

 图 2 通信系统的等价变换 Γ

 Figure 2 Equivalent transformation Γ of communication system

信息论中利用信息熵中包含的信息量来度量消息, 它表征了信息的不确定度, 利用互信息 $I(X, Y)$ 表示接收到符号集 Y 后平均每个符号获得的关于 X 的信息量, 它表征了通信前后系统不确定度的减少量^[1]. 由于通信中常用互信息来表征通信系统的处理能力^[14~16], 并且其与信道容量以及电路功率息息相关^[9~11], 因此本论文考虑从互信息角度出发, 利用信息论的观点分析电路的互信息特性, 为之后分析电路的信道容量以及功率等提供理论基础. 并由于受近几年新理论反馈结构通信 (feedback communication) 的影响, 其从信息论角度证明了反馈结构对于通信具有容错特性^[17~19], 因此本文也对反馈电路的互信息以及容错特性进行了分析证明.

本文基于信息论的观点对电路的互信息进行了详细的分析证明以及仿真, 通过将电路划分为对称信道以及非对称信道两类, 分别证明出其互信息关于其正确概率以及非对称因子的变化规律, 可以为电路设计提供理论基础. 在此基础上, 本文还分析了反馈电路对互信息的影响, 证明通过反馈可以增加其电路的正确概率以及降低其非对称因子, 从而增加了其电路的互信息. 本文完成了对数字电路系统互信息规律的研究, 这些规律可以为数字电路系统设计以及大规模集成电路分析提供理论基础.

本文结构如下所示. 第 2 节将简要介绍本研究的理论基础, 包括信息论的基本知识以及本研究的基本模型与基本思路. 第 3~5 节是本文的主体, 分别对电路中的对称信道电路, 非对称信道电路以及反馈电路进行了详细分析与证明, 并进行了仿真验证. 第 6 节是对全文的总结.

2 基本原理

2.1 理论基础

典型的通信系统如图 1 所示, 该系统由输入 X 、输出 Y 、编码器、译码器、物理信道以及信道中的噪声构成. 本论文进行等价分析, 如图 2 所示, 将编码器、译码器、物理信道等模块或信号处理单元看作变换 Γ . 因此通过等价, 当把电路中模块电路等价为变换 Γ , 电路中的噪声 (串扰、热噪声等影响的软噪声以及器件工艺等影响的硬噪声) 等价于信道噪声后, 通信系统中信息论观点同样可以用于电路系统中. 由此, 通过图 2 的等价, 将电路看作通信中的信道, 以两输入一输出的与非门为例, 可以建立电路的传输信道如图 3 所示. 由图 3 可得其信道矩阵为

图 3 电路传输信道

Figure 3 Circuit transmission channel

图 4 分析模型

Figure 4 The analysis model

$$\begin{bmatrix} 1 - p_{S_0} & p_{S_0} \\ 1 - p_{S_1} & p_{S_1} \\ 1 - p_{S_2} & p_{S_2} \\ p_{S_3} & 1 - p_{S_3} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中 p_{S_i} 为输入状态 S_i 输出正确的转移概率 ($i = 0, 1, 2, 3$).

为了后续表述方便, 本论文引入对称、非对称信道矩阵概念, 即对于所有输入状态, 其输出正确的转移概率相等, 则为对称信道, 否则为非对称信道. 以式 (1) 为例, 若 $p_{S_0} = p_{S_1} = p_{S_2} = p_{S_3}$, 则为对称信道. 而实际电路中, 存在一些因素如低供电电压等, 使得电路并不是对所有状态的容错特性是等同的, 即为非对称信道. 由于对称、非对称信道在实际电路中均有可能, 因此后文将针对这两种信道, 分析其互信息影响因素以及变化趋势. 在分析之前, 先给出互信息的定义如式 (2) 所示.

设随机变量 $X = x_0, x_1, \dots, x_{L-1}$, $Y = y_0, y_1, \dots, y_{L-1}$, 则 X, Y 的互信息为^[1]

$$I(X; Y) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} p(x, y) \log \frac{p(x|y)}{p(x)}, \quad (2)$$

并且有^[1]

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X), \quad (3)$$

其中 $H(X) = -\sum_{i=0}^{L-1} p(x_i) \log p(x_i)$ 为 X 的信息熵, $H(X|Y) = -\sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} p(x, y) \log p(x|y)$ 为已知 Y 条件下, 随机变量 X 的条件熵.

为了简便, 本文将二元离散随机变量的熵函数定义为 $H(p)$ 函数, 如式 (4) 所示:

$$-p \log p - (1 - p) \log(1 - p) \stackrel{\text{def}}{=} H(p). \quad (4)$$

2.2 基本模型

本文以信息论的观点分析电路, 探讨电路中的互信息影响因素以及变化趋势. 为简单起见, 本论文以图 4 所示的多输入单输出电路为分析模型, 将电路抽象化, 假设输入 $X = x_1 \cdots x_n$, 讨论其互信息的性质.

假设已知输入 X 的概率分布 p_x , 转移概率 $p_{y|x}$, 由概率论知识以及信息论知识得到

$$\begin{cases} p_c = \sum_{x,y_c} p_x p_{y_c|x}, \\ H(Y|X) = \sum_x p_x H(p_{y_c|x}), \\ H(Y) = H\left(\sum_{x,y_0} p_x p_{y_0|x}\right), \\ I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X), \end{cases} \quad (5)$$

其中, p_c 为系统的正确概率, $p_{y_c|x}$ 为输入 x 下, 输出正确 y 的转移概率, $p_{y_0|x}$ 为输入 x 下, 输出 $y = 0$ 的转移概率.

由此可见互信息为输入概率 p_x , 以及条件概率 $p_{y|x}$ 的函数, 将其定义为 φ 函数, 如式 (6) 所示:

$$I(X,Y) = \varphi(p_x, p_{y|x}). \quad (6)$$

由于条件概率 $p_{y|x}$ 在实际电路中并不利于量化, 因此考虑从系统或者模块电路的正确概率 p_c , 也即是误码率 (Bit error rate, BER) 出发. 由于有

$$p_c = \sum_{x,y_c} p_x p_{y_c|x}. \quad (7)$$

因此本文思路为通过将式 (6) 和 (7) 联合, 从而求解出互信息, 并探讨 p_c 对互信息的影响. 下文将通过对不同电路模型的分析对此方法进行具体阐述.

3 对称信道电路分析

3.1 分析思路

由 2.1 小节定义可知, 当对于所有输入状态, 其输出正确的转移概率相等, 则为对称信道. 因此对于对称信道, 由式 (7) 可得

$$p_c = p_{y_c|x}, \quad (8)$$

即电路的正确概率与输出正确的转移概率相等. 由此式 (6) 转化为

$$I(X,Y) = \varphi(p_x, p_c). \quad (9)$$

由于电路的互信息只与输入概率以及正确概率相关, 因此对于对称信道电路, 只需研究其正确概率对互信息的影响, 以非门、与非门为例, 其具体分析如 3.2 小节所示. 本文完成了对称信道电路中的互信息规律分析且得出了对称信道电路信息论中的普遍结论, 其分析思路适用于所有电路, 并且本研究方法不涉及电路的具体形式, 可以为电路设计提供理论基础.

3.2 电路实例分析

由式 (9) 可知, 对于对称信道其互信息只与输入概率以及正确概率相关, 当输入等概时, 其仅为正确概率的函数, 因此对于对称信道只需要研究其正确概率对其互信息的影响.

由于篇幅限制以及为了不引入复杂结构可能带来的其他因素,下文将以最简单的非门、与非门为例,例化本文的分析方法,而对于其他更为复杂的电路,其分析思路类似. 通过将电路抽象化,考虑图 4 所示的抽象电路实现的是非门、与非门功能的前提下,分析其互信息关于正确概率的变化趋势,而电路的正确概率与电路的结构以及环境息息相关.

3.2.1 非门

以图 4 为分析模型,若已知整个电路的正确概率 p_c ,整个电路实现的是非门功能(具体电路形式可认为是多样化的),且信道矩阵是对称矩阵,即有

$$p(y=0|x=1)=p(y=1|x=0)=p_c. \quad (10)$$

令 $p_x = p(x=1)$, 则有

$$\begin{cases} H(Y) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p) \triangleq H(p), \\ H(Y|X) = -p_c \log_2 p_c - (1-p_c) \log_2 (1-p_c) \triangleq H(p_c), \\ I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(p) - H(p_c), \end{cases} \quad (11)$$

其中 $p = 1 - p_x - p_c + 2p_x p_c$, 且 $H(p)$ 的定义如式 (4) 所示. 不失一般性,假设 $p_x = 0.5$, 即输入等概,可证得对称信道非门有如下性质.

性质 1 当输入等概时,对称信道非门输出信息熵 $H(Y)$ 恒为最大值 1, 而条件熵 $H(Y|X)$ 随 p_c ($0.5 \leq p_c \leq 1$) 单调递减.

性质 2 当输入等概时,对称信道非门互信息 $I(X,Y)$ 随 p_c ($0.5 \leq p_c \leq 1$) 单调递增.

证明 证明 由于 p_c 为电路的正确概率即误码率 BER, 因此理论上认为其在 $[0.5, 1]$ 区间, 本文的分析均基于此假设, 后文将不再赘述. 由于 $p = 1 - p_x - p_c + 2p_x p_c$, 当输入等概时, 可知 $p = 0.5$, 因此可知 $H(Y)$ 恒为 1. 且由式 (11) 可知, 条件熵 $H(Y|X)$ 随 p_c ($0.5 \leq p_c \leq 1$) 单调递减. 又由于 $I(X,Y) = 1 - H(p_c)$, 因此当 $0.5 \leq p_c \leq 1$, 显然有 $I(X,Y)$ 随 p_c 单调递增.

3.2.2 与非门

与非门分析类似,以图 4 为分析模型,当已知整个电路的正确概率 p_c ,整个电路实现的是与非门功能(具体电路形式可认为是多样化的),且信道矩阵为对称矩阵,即有 $p(y=1|x_1 x_2=00)=p(y=1|x_1 x_2=01)=p(y=1|x_1 x_2=10)=p(y=0|x_1 x_2=11)=p_c$. 假设输入等概,则有

$$\begin{cases} H(Y) = -p^* \log_2 p^* - (1-p^*) \log_2 (1-p^*) \triangleq H(p^*), \\ H(Y|X) = -p_c \log_2 p_c - (1-p_c) \log_2 (1-p_c) \triangleq H(p_c), \\ I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(p^*) - H(p_c), \end{cases} \quad (12)$$

其中 $p^* = 0.75(1 - p_c) + 0.25p_c$. 同样地,可证得对称信道与非门有如下性质.

性质 3 当输入等概时,对称信道与非门输出信息熵 $H(Y)$ 随 p_c ($0.5 \leq p_c \leq 1$) 单调递减, 条件熵 $H(Y|X)$ 随 p_c ($0.5 \leq p_c \leq 1$) 单调递减.

性质 4 当输入等概时,对称信道与非门互信息 $I(X,Y)$ 随 p_c ($0.5 \leq p_c \leq 1$) 单调递增.

证明 由于 $H(Y) = H(p^*)$, $p^* = 0.75(1 - p_c) + 0.25p_c$, $H(Y|X) = H(p_c)$, 因此在 $0.5 \leq p_c \leq 1$ 区间, $H(Y)$, $H(Y|X)$ 随 p_c 单调递减.

而对于互信息 $I(X, Y)$, 对其关于 p_c 求偏导可得

$$\frac{\partial I(X; Y)}{\partial p_c} = -0.5 \log_2 \frac{1-p^*}{p^*} - \log_2 \frac{1-p_c}{p_c}. \quad (13)$$

由于在 $0.5 \leq p_c \leq 1$ 区间, $-0.5 \log_2 \frac{1-p^*}{p^*} - \log_2 \frac{1-p_c}{p_c} \geq 0$, 因此有 $I(X, Y)$ 随 p_c ($0.5 \leq p_c \leq 1$) 单调递增.

3.2.3 对称信道性质

性质 5 对称信道的正确概率, 条件熵只与电路的容错特性相关, 与输入的概率分布无关, 且恒有

$$H(Y|X) = H(p_c), \quad (14)$$

其中, $H(p)$ 的定义如式 (4) 所示.

证明 由对称信道的性质, 很容易得到 $p_c = p_{y_c|x}$. 因此可以看出对称信道的正确概率仅与 $p_{y_c|x}$ 有关, 即电路本身的容错特性有关, 与电路的输入概率分布无关, 并且将其代入式 (5) 可得

$$H(Y|X) = H(p_c) \sum_x p_x = H(p_c). \quad (15)$$

因此也可得对称信道的条件熵仅与电路本身的容错特性有关, 与输入的概率分布无关.

性质 6 对称信道的信道容量 C 为

$$C = H(Y)_{p_y=0.5} - H(p_c), \quad (16)$$

其中, $H(p)$ 的定义如式 (4) 所示. 且对于功能对称的电路而言, 当输入等概时电路的互信息即为电路的信道容量.

证明 由信息论知识^[1] 以及式 (15) 可知, 对于对称信道有

$$C = \max_{\forall p(x)} [H(Y) - H(p_c)]. \quad (17)$$

又由于对称信道的条件熵与输入的概率分布无关, 因此有

$$C = H(Y)_{p_y=0.5} - H(p_c). \quad (18)$$

特别地, 当电路的功能对称时 (电路功能对称是指电路对于输入的 2^n 个状态, 在理想条件下, 有 2^{n-1} 个状态为或者为 1, 如非门、异或门等), 因此有

$$p(y=0) = p_c(p_{x_1} + \cdots + p_{x_{2^{n-1}}}) + (1-p_c)(p_{x_{2^{n-1}+1}} + \cdots + p_{x_{2^n}}), \quad (19)$$

其中 $p_{x_1}, \dots, p_{x_{2^{n-1}}}$ 为输出为 0 时, 2^{n-1} 个输入的概率分布, 而 $p_{x_{2^{n-1}+1}}, \dots, p_{x_{2^n}}$ 为输出为 1 时, 2^{n-1} 个输入的概率分布.

可以证明当 $p_{x_1} + \cdots + p_{x_{2^{n-1}}} = p_{x_{2^{n-1}+1}} + \cdots + p_{x_{2^n}} = 0.5$ 时, $p(y=0) = 0.5$. 且显然当输入等概时, $p(y=0) = 0.5$, 即此时的互信息为电路的信道容量.

图 5 非门 $I(X, Y)$ 与 p_c 关系图Figure 5 Relationship between $I(X, Y)$ and p_c in NOT gate 图 6 与非门 $I(X, Y)$ 与 p_c 关系图Figure 6 Relationship between $I(X, Y)$ and p_c in NAND gate

3.2.4 仿真实验

本文通过 Matlab 电路仿真验证对称信道的互信息特性, 基本思路为通过随机产生 10000 个均匀分布的输入序列, 将其取非或者与非, 并与一概率为 p_c 的随机序列异或, 统计其输出的概率特性, 计算其互信息并与理论值相比较, 得到的结果如图 5 和 6 所示。

由图 5 和 6 可以看出, 理论值与仿真值是相符的, 并且其互信息论的变化趋势与之前的证明也是相符的。

4 非对称电路分析

4.1 分析思路

由第 2.1 小节定义可知, 当对于所有输入状态, 其输出正确的转移概率不一定相等时, 其为非对称信道。但当已知每个模块的正确概率 p_c , 由式 (7) 无法求出具体每个状态的转移概率, 基于此, 本文引入了不对称因子 α_i , 即每个转移概率之间的比例关系, 从而可以通过 α_i, p_c 求出具体的 $p_{y|x}$ 。由此互信息转化为 p_x, p_c, α_i 的函数, 如下式所示:

$$I(X, Y) = \varphi(p_x, p_c, \alpha_i), \quad (20)$$

其中 p_x 为输入概率, p_c 为正确概率, α_i 为不对称性因子。下文将探讨互信息 $I(X, Y)$ 随 p_c, α_i 的变化规律, 以非门、与非门为例, 其结论如 4.2 小节所示, 分析证明过程见附录 A 和 B。本文完成了非对称信道电路的互信息的规律分析, 其分析思路适用于所有电路, 并且本研究方法不涉及电路的具体形式, 可以为电路设计提供理论基础。

表 1 非对称信道互信息关于 p_c, α_i 的变化规律
Table 1 Relationship between mutual information and p_c, α_i

	NOT gate	NAND gate
Information entropy	$H(Y)$ decreases monotonically with p_c , and increases monotonically with α	$H(Y)$ decreases monotonically with p_c and β , and increases monotonically with γ
Conditional entropy	$H(Y X)$ decreases monotonically with p_c , and increases monotonically with α	$H(Y X)$ decreases monotonically with p_c
Mutual information	$I(X;Y)$ increases monotonically with p_c , and decreases monotonically with α	$I(X;Y)$ increases monotonically with p_c and γ , and decreases monotonically with β

图 7 非门 $I(X, Y)$ 与 p_c 的关系图
Figure 7 Relationship between $I(X, Y)$ and p_c in NOT gate

图 8 非门 $I(X, Y)$ 与 α 的关系图
Figure 8 Relationship between $I(X, Y)$ and α in NOT gate

4.2 电路实例分析

4.2.1 非门、与非门分析

与对称信道分析思路类似, 同样基于篇幅以及证明的简单化考虑, 本文以最简单的非门、与非门为例. 通过将电路抽象化, 考虑图 4 所示的抽象电路实现的是非门、与非门功能的基础上, 探讨非门、与非门的互信息与正确概率 p_c 以及不对称性 α_i 的关系, 其结论如表 1 所示. 其具体证明见附录 A 和 B.

表 1 中 p_c 为非门或与非门的正确概率, α 为非门的不对称因子, 即 $p(V_{out} = 0|V_{in} = 1)_{inv} = \alpha \cdot p(V_{out} = 1|V_{in} = 0)_{inv}$. β, γ 表征了与非门的不对称性, 即有 $p(V_{out} = 1|V_{in} = 01)_{nand} = p(V_{out} = 1|V_{in} = 10)_{nand} = \beta \cdot p(V_{out} = 1|V_{in} = 00)_{nand}$, $p(V_{out} = 0|V_{in} = 11)_{nand} = \gamma \cdot p(V_{out} = 1|V_{in} = 00)_{nand}$.

4.2.2 仿真实证

本文通过 Matlab 电路仿真非对称信道的互信息特性. 与对称信道仿真思路类似, 得到的结果如

图 9 与非门 $I(X, Y)$ 与 p_c 的关系图Figure 9 Relationship between $I(X, Y)$ and p_c in NAND gate 图 10 与非门 $I(X, Y)$ 与 β 的关系图Figure 10 Relationship between $I(X, Y)$ and β in NAND gate 图 11 与非门 $I(X, Y)$ 与 γ 的关系图Figure 11 Relationship between $I(X, Y)$ and γ in NAND gate

图 7~11 所示. 图 7 中 $\alpha = 1$, 图 8 中 $p_c = 0.7$, 图 9 中 $\beta = 1, \gamma = 1$, 图 10 中 $p_c = 0.7, \beta = 0.8$, 图 11 中 $p_c = 0.7, \gamma = 0.9$, 其中 $p_c, \alpha, \beta, \gamma$ 的取值区间如附录 A 和 B 所示.

图 7 和 8 为非对称信道的非门互信息仿真结果 (其信息熵、条件熵的仿真结果类似), 可以看出, 理论值与仿真值是相符的, 且其正确概率以及非对称因子对于互信息的影响与理论分析证明也是相

图 12 对称、非对称模块一般分析方法

Figure 12 General analysis method for symmetric and asymmetric modules

符的.

而图 9~11 为非对称信道的与非门互信息仿真结果 (其信息熵、条件熵的仿真结果类似), 同样可以看出, 理论值与仿真值是相符的, 且其互信息的变化趋势与理论分析证明也是相符的.

4.3 面向模块的一般分析方法

由对称信道、非对称信道结果可以看出其共性在于, 互信息均随正确概率单调递增, 并且对比其分析思路与证明过程, 可以看出其分析的相似性, 因此为了将此方法更好地应用于其他模块电路上, 本论文给出一般分析流程如图 12 所示.

当已知正确概率、电路实现的功能以及输入的概率分布条件下, 如果信道是对称的, 那么根据第 3 节得到的一般结论可以得到 $p_{y_c|x} = p_c$, 但是对于非对称信道, 需要引入非对称因子 (定义如第 4 节所示), 从而得到 $p_{y_c|x}$. 最后通过式 (6), 由 $p_{y_c|x}$ 得到需要的互信息 $I(X,Y)$.

通过图 12 所示方法, 针对任何电路模块, 都可以得到正确概率 p_c 与互信息 $I(X,Y)$ 之间的关系, 为实际电路中的容错性、供电电压 (文献 [9] 中给出了供电电压与互信息之间的关系)、信道容量等的分析提供了理论基础.

图 13 与非门反馈生成的非门

Figure 13 A feedback NOT gate implemented with NAND gates

5 反馈电路分析

5.1 电路模型

本文受近两年新理论反馈结构通信 (feedback communication) 的影响, 其从信息论角度证明了反馈结构对于通信具有容错增益^[17~19]. 因此本文尝试通过等价模型建立, 利用信息论的观点对反馈电路的互信息以及容错特性进行分析.

前两节已完成了对称信道以及非对称信道电路的分析, 且等价于完成了非反馈电路的分析, 因此本节仅对反馈电路进行建模分析. 又由于反馈的存在, 使电路的结构以及功能复杂化, 因此对于反馈电路, 本文将分析具体电路. 以图 13 所示的电路为例, 且认为其信道为非对称 (对称电路分析类似, 且更为简单), 讨论其反馈对于正确概率 p_c 以及非对称因子 α 的影响, 并结合第 4 节, 得到其反馈对互信息的影响.

对图 13 所示电路进行分析可知, 当电路无噪时, 可以得到 $v = \bar{x}$, 由此可知图 13 所示的电路 v 端实现了非门功能. 下文将研究其反馈对此非门正确概率 p_c 以及非对称因子 α 的影响.

5.2 电路实例分析

对图 13 所示的电路分析, 可以证明: 状态 $x \rightarrow v$ 的 $0 \rightarrow 1$ 状态转移概率随 n 单调递增且有界, $1 \rightarrow 0$ 状态转移概率随 n 单调递增且有界, 非对称因子 α 随 n 单调递减, 其中 $\alpha = p(v = 0|x = 1)/p(v = 1|x = 0)$. 由此可得如下定理.

定理 1 图 13 所示电路中的 v 端很好地实现了非门功能, 且电路正确概率 p_c 随反馈次数 n 单调递增且有界, 其非对称因子 α 随反馈次数 n 单调递减且有界.

结合第 4 节, 由于已证得非门的互信息随着正确概率 p_c 单调递增, 随非对称因子 α 单调递减, 因此可得图 13 所示的 v 端的互信息随反馈次数 n 单调递增且有界. 其证明过程如下所示.

证明 令与非门输入 00, 01, 10, 11 时输出正确的概率为 $p_{00} = p(V_{\text{out}} = 1|V_{\text{in}} = 00)_{\text{nand}}$, $p_{01} = p(V_{\text{out}} = 1|V_{\text{in}} = 01)_{\text{nand}}$, $p_{10} = p(V_{\text{out}} = 1|V_{\text{in}} = 10)_{\text{nand}}$, $p_{11} = p(V_{\text{out}} = 0|V_{\text{in}} = 11)_{\text{nand}}$, 由此可得两输入与非门信道矩阵如下所示:

$$P_{\text{nand}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 - p_{00} & p_{00} \\ 1 - p_{01} & p_{01} \\ 1 - p_{10} & p_{10} \\ p_{11} & 1 - p_{11} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (21)$$

通过 PCMOS 建模^[20], 可以证明 $p_{00} \geq p_{01} = p_{10} \geq p_{11}$. 又由于两个与非门串联, 由此得到其 $xf_{n-1} \rightarrow f_n$ 概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 - p_{00} + p_{00}p_{10} - p_{10}p_{01} & p_{00} - p_{00}p_{10} + p_{10}p_{01} \\ 1 - p_{01} - p_{11}p_{00} + p_{11}p_{01} & p_{01} + p_{11}p_{00} - p_{11}p_{01} \\ 1 - p_{00} - p_{10} + p_{00}p_{10} + p_{00}p_{11} & p_{00} + p_{10} - p_{00}p_{10} - p_{00}p_{11} \\ 1 - p_{01} - p_{10} + p_{01}p_{10} + p_{01}p_{11} & p_{01} + p_{10} - p_{01}p_{10} - p_{01}p_{11} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

由于存在反馈迭代, 因此将其看作时序电路进行分析. 由于在初始时刻, 反馈端 f_0 的值是不确定的, 因此假设初始时刻 $x \rightarrow f_0$ 转移矩阵如下所示:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

由转移概率性质有

$$p(f_n = i | x = j) = \sum_k p(f_n = i | xf_0 = jk) \cdot p(f_0 = k | x = j), \quad (24)$$

因此为了求解出 $p(f_n = i | x = j)$, 即电路的 n 步转移概率, 首先得求出 $p(f_n = i | xf_0 = jk)$.

又因为

$$p(f_n = i | xf_{n-2} = jk) = \sum_l p(f_{n-1} = l | xf_{n-2} = jk) \cdot p(f_n = i | xf_{n-1} = jl), \quad (25)$$

因此可得 $xf_0 \rightarrow f_n$ 的 n 步转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - p_{00} - p_{10} + p_{00}p_{10} + p_{00}p_{11} & p_{00} + p_{10} - p_{00}p_{10} - p_{00}p_{11} \\ 1 - p_{01} - p_{10} + p_{01}p_{10} + p_{01}p_{11} & p_{01} + p_{10} - p_{01}p_{10} - p_{01}p_{11} \end{bmatrix}^n \\ \begin{bmatrix} 1 - p_{00} + p_{00}p_{10} - p_{10}p_{01} & p_{00} - p_{00}p_{10} + p_{10}p_{01} \\ 1 - p_{01} - p_{11}p_{00} + p_{11}p_{01} & p_{01} + p_{11}p_{00} - p_{11}p_{01} \end{bmatrix}^n \end{bmatrix}. \quad (26)$$

对其进行化简且与式 (22) 联合代入式 (23) 中求解得到 $x \rightarrow f_n$ 的 n 步转移概率矩阵如下所示:

$$P(n) = \begin{bmatrix} \frac{2q_0 + (1-p_0-q_0)(p_0-q_0)^n}{2(q_0-p_0+1)} & \frac{2(1-p_0) - (1-p_0-q_0)(p_0-q_0)^n}{2(q_0-p_0+1)} \\ \frac{2q_1 + (1-p_1-q_1)(p_1-q_1)^n}{2(q_1-p_1+1)} & \frac{2(1-p_1) - (1-p_1-q_1)(p_1-q_1)^n}{2(q_1-p_1+1)} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

其中 $p_0 = 1 - p_{00} - p_{10} + p_{00}p_{10} + p_{00}p_{11}$, $q_0 = 1 - p_{01} - p_{10} + p_{01}p_{10} + p_{01}p_{11}$, $p_1 = 1 - p_{00} + p_{00}p_{10} - p_{10}p_{01}$, $q_1 = 1 - p_{01} - p_{11}p_{00} + p_{11}p_{01}$.

当 $p_{00} \geq p_{01} = p_{10} \geq p_{11}$ 时, 有 $p_0 - q_0 = p_1 - q_1 = (p_{00} - p_{01})(p_{10} + p_{11} - 1) \in (0, 1)$ 且有 $p_0 \geq q_0 \geq 0.5 \geq p_1 \geq q_1$. 所以可得 $p(f_n = 0 | x = 0)$ 随 n 的增加而递增趋于 $q_0/(q_0 - p_0 + 1)$, 其中 $q_0/(q_0 - p_0 + 1) \in [0.5, 1]$. $p(f_n = 1 | x = 1)$ 随 n 的增加而递增趋于 $(1 - p_1)/(q_1 - p_1 + 1)$, 其中 $(1 - p_1)/(q_1 - p_1 + 1) \in [0.5, 1]$.

同样地, 可证得 $p(v = 0 | \bar{x} = 0)$ 随 n 的增加而递增趋于 $q_0/(q_0 - p_0 + 1)$, $p(v = 1 | \bar{x} = 1)$ 随 n 的增加而递增趋于 $(1 - p_1)/(q_1 - p_1 + 1)$.

图 14 反馈模块一般分析方法

Figure 14 General analysis method for feedback circuit modules

因此得证, 状态 $x \rightarrow v$ 的 $0 \rightarrow 1$ 状态转移概率随 n 单调递增趋于 $(1 - p_1)/(q_1 - p_1 + 1)$, $1 \rightarrow 0$ 状态转移概率随 n 单调递增趋于 $q_0/(q_0 - p_0 + 1)$. 并且由于非对称因子 $\alpha = [2q_0 + (1 - p_0 - q_0)(p_0 - q_0)^n]/[2(1 - p_1) - (1 - p_1 - q_1)(p_1 - q_1)^n]$, 且 $p_0 - q_0 = p_1 - q_1$, $1 - p_1 - q_1 \geq p_0 + q_0 - 1$, 因此可知 α 随着 n 递减且趋于 $2q_0/[2(1 - p_1)] \leq 1$.

5.3 面向模块的一般分析方法

由于篇幅所限以及反馈结构的不确定性, 本文仅分析了图 13 所示的反馈电路. 为了更好地将此分析方法应用于其他反馈结构上, 本文给出一般分析流程, 如图 14 所示.

已知每个模块的信道传输矩阵 P_i , 如例中的式 (21) 所示. 根据电路的连接方式, 我们可以得到整个电路的传输矩阵 P , 如例中的式 (22) 所示. 最后, 分析反馈电路实现的功能以及输入的概率分布, 可以得到实际的传输矩阵, 如例中的式 (27) 所示, 并且根据此矩阵得到最后的正确概率 p_c .

通过图 14 所示流程, 针对反馈电路模块, 可以得到其正确概率 p_c 与反馈次数 n 之间的关系. 再结合第 3 和 4 节的分析结果, 可以得到互信息与反馈次数 n 之间的关系, 从而得到反馈对供电电压、信道容量的影响, 为反馈电路的分析提供理论基础.

5.4 仿真实验

对式 (27) 中的 $p(f_n = 0|x = 0)$ 和 $p(f_n = 1|x = 1)$ 进行 Matlab 仿真实验. 仿真思路与前两节类似, 其中不失一般性, 假设 $p_{00} = 0.98, p_{01} = p_{10} = 0.95, p_{11} = 0.92$, 其仿真结果如图 15 和 16 所示.

由图 15 和 16 可看出, $p(f_n = 0|x = 0)$ 随 n 的增加而递增, $p(f_n = 1|x = 1)$ 随 n 的增加而递增, 与 5.2 小节理论分析相符合, 且可看出其收敛速度很快 ($p(f_n = 1|x = 0)$ 和 $p(f_n = 0|x = 1)$ 的仿真结果类似, 故不再赘述).

图 15 $p(f_n = 0|x = 0)$ 与 n 的关系图

Figure 15 Relationship between $p(f_n = 0|x = 0)$ and n

图 16 $p(f_n = 1|x = 1)$ 与 n 的关系图

Figure 16 Relationship between $p(f_n = 1|x = 1)$ and n

6 结论

本文基于信息论的观点对电路的互信息进行了详细的分析证明以及仿真, 通过将电路划分为对称信道以及非对称信道两类, 分别证明出其互信息关于其正确概率以及非对称因子的变化规律, 为之后电路设计提供理论基础. 在此基础上, 本文还分析了反馈电路对互信息的影响, 证明出反馈结构对于电路具有容错增益以及互信息增益. 本文完成了对数字电路系统互信息的研究, 可以为数字电路以及集成电路的设计与分析提供理论基础.

参考文献

- 1 Cover T M, Thomas J A. Elements of Information Theory. 2nd. Oxford: Wiley-Blackwell, 2006. 7-13
- 2 Shannon C E. A mathematical theory of communication. Bell Syst Tech J, 1948, 27: 379-423
- 3 Sotiriadis P P, Tarokh V, Chandrakasan A P. Energy reduction in VLSI computation modules: an information-theoretic approach. IEEE Trans Inf Theory, 2003, 49: 790-808
- 4 Amankwah A, Aldrich C. Multiresolution image registration using spatial mutual information. In: Proceedings of Oceans, Hampton Roads, 2012. 1-4
- 5 Rubanov N. A general framework to perform the MAX/MIN operations in parameterized statistical timing analysis using information theoretic concepts. IEEE Trans Computer-Aided Design Integrated Circ Syst, 2011, 30: 1011-1019
- 6 Ivrlac M T, Nossek J A. Toward a circuit theory of communication. IEEE Trans Circ Syst I: Regular Papers, 2010, 57: 1663-1683
- 7 Fan X, Tanik M M. An experiment on evolutionary design of combinational logic circuits using information theory. In: Proceedings of IEEE Southeastcon, Nashville, 2011. 379-383
- 8 Grover P, Goldsmith A, Sahai A, et al. Information theory meets circuit design: why capacity-approaching codes require more chip area and power. In: Proceedings of 49th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing, Monticello, 2011. 1392-1399
- 9 Shanbhag N R. A mathematical basis for power-reduction in digital VLSI systems. IEEE Trans Circ Syst II: Analog Digital Signal Process, 1997, 44: 935-951
- 10 Hegde R, Shanbhag N R. Energy-efficiency in presence of deep submicron noise. In: Proceedings of IEEE/ACM

- International Conference on Computer-Aided Design, San Jose, 1998. 228–234
- 11 Wang L, Shanbhag N R. Energy-efficiency bounds for deep submicron VLSI systems in the presence of noise. *IEEE Trans Very Large Scale Integration (VLSI) Syst*, 2003, 2: 254–269
 - 12 Aguirre A H, Coello C, Carlos A. Mutual information-based fitness functions for evolutionary circuit synthesis. In: *Proceedings of Congress on Evolutionary Computation*, Portland, 2004. 2: 1309–1316
 - 13 Zhang Y, He Z Y, Guo L. A power system fault diagnosis method based on mutual-information network. In: *Proceedings of Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference*, Chengdu, 2010. 1–4
 - 14 Kinoshita K, Ochiai H. Energy minimization of wireless sensor networks based on modulation and coding optimization under finite frame length constraint. In: *Proceedings of IEEE Military Communications Conference*, Orlando, 2012. 1–5
 - 15 Nizami L. Information theory's failure in neuroscience: on the limitations of cybernetics. In: *Proceedings of IEEE Conference on Norbert Wiener in the 21st Century (21CW)*, Boston, 2014. 1–8
 - 16 Juan L, de K J, Kuhn L, et al. A unified information criterion for evaluating probe and test selection. In: *Proceedings of International Conference on Prognostics and Health Management*, Denver, 2008. 1–8
 - 17 Li C, Elia N. Bounds on the achievable rate of noisy feedback Gaussian channels under linear feedback coding scheme. In: *Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, St. Petersburg, 2011. 169–173
 - 18 Ardestanizadeh E, Franceschetti M. Control-theoretic approach to communication with feedback. *IEEE Trans Autom Control*, 2012, 57: 2576–2587
 - 19 Eswaran K, Gastpar M. Feedback communication and control over a single channel. *IEEE Trans Inf Theory*, 2013, 59: 6243–6257
 - 20 Korkmaz P. Probabilistic CMOS (PCMOS) in the nanoelectronics regime. Dissertation for Ph.D. Degree. Atlanta: Georgia Institute of Technology, 2007

附录 A 非对称信道非门的性质证明

1) 数学模型

令非门输入 0, 1 条件下输出正确的概率为

$$p_0 = p(V_{\text{out}} = 1 | V_{\text{in}} = 0)_{\text{inv}}, \quad p_1 = p(V_{\text{out}} = 0 | V_{\text{in}} = 1)_{\text{inv}}, \quad (\text{A1})$$

则当输入等概时, 得到其输出正确概率为 $p_c = 0.5(p_0 + p_1)$. 引入非对称因子 α , 即假设 $p_1 = \alpha p_0$, 则有

$$\begin{cases} p_c = \frac{1}{2}(p_0 + p_1), \\ p_1 = \alpha p_0. \end{cases} \quad (\text{A2})$$

解之得 $p_0 = 2p_c/(1+\alpha)$, $p_1 = 2\alpha p_c/(1+\alpha)$, 下文将分别探讨 p_c, α 对其互信息的影响. 由于实际要求 $p_0, p_1 \in [0.5, 1]$, 因此有 $\max(2p_c - 1, 1/(4p_c - 1)) \leq \alpha \leq \min(1/(2p_c - 1), 4p_c - 1)$, $0.5 \leq p_c \leq 1$. 为表述方便, 将此区间定为区域 D1.

由概率论以及信息论知识可得非门非对称信道的输出熵、条件熵以及互信息为

$$\begin{cases} H(Y) = H(p), \\ H(Y|X) = 0.5H(p_0) + 0.5H(p_1), \\ I(X; Y) = H(p) - [0.5H(p_0) + 0.5H(p_1)], \end{cases} \quad (\text{A3})$$

其中 $p = 0.5 + 0.5(p_0 - p_1) = 0.5 + (1 - \alpha)p_c/(1 + \alpha)$, $p_0 = 2p_c/(1 + \alpha)$, $p_1 = 2\alpha p_c/(1 + \alpha)$. 下文将对与门的 $H(Y)$, $H(Y|X)$, $I(X; Y)$ 在区域 D1 上的性质进行讨论.

2) 性质证明

性质 A1 在 α 不变的条件下, 输出信息熵 $H(Y)$ 随 p_c 单调递减, 条件熵 $H(Y|X)$ 随 p_c 单调递减, 互信息 $I(X; Y)$ 随 p_c 单调递增.

证明 由于 $p \geq 0.5$, 且随 p_c 单调递增, 因此 $H(Y)$ 随 p_c 单调递减. 在式 (A3) 中, 由于有 $p_0 \geq 0.5, p_1 \geq 0.5$, 且都随 p_c 单调递增, 因此 $H(Y|X)$ 随 p_c 单调递增. 而对互信息关于 p_c 求偏导 (可视 α 为一固定值) 得

$$\frac{\partial I(X; Y)}{\partial p_c} = \frac{1}{(1 + \alpha)} \left((1 - \alpha) \log_2 \frac{1 - p}{p} - \log_2 \frac{1 - p_0}{p_0} - \alpha \log_2 \frac{1 - p_1}{p_1} \right). \quad (\text{A4})$$

可以证明, 当 α, p_c 在区域 D1 内取值时, 有 $\frac{\partial I(X; Y)}{\partial \alpha} \geq 0$, 即互信息 $I(X; Y)$ 随 p_c 单调递增.

性质 A2 在输出正确概率不变的条件下, 输出信息熵 $H(Y)$ 随 α 单调递增, 条件熵 $H(Y|X)$ 随 α 单调递增, 互信息 $I(X; Y)$ 随 α 单调递减.

证明 本文假设 $0 \leq \alpha \leq 1$, 即 $p_0 \geq p_1$, 而对于 $\alpha \geq 1$ 的情况其分析方法类似. 对 $H(Y)$, $H(Y|X)$, $I(X; Y)$ 关于 α 求偏导 (可视 p_c 为一固定值) 得

$$\begin{cases} \frac{\partial H(Y)}{\partial \alpha} = \log_2 \frac{1-p}{p} \cdot \frac{-2p_c}{(1+\alpha)^2}, \\ \frac{\partial H(Y|X)}{\partial \alpha} = 0.5 \log_2 \frac{1-p_0}{p_0} \cdot \frac{-2p_c}{(1+\alpha)^2} + 0.5 \log_2 \frac{1-p_1}{p_1} \cdot \frac{2p_c}{(1+\alpha)^2}, \\ \frac{\partial I(X; Y)}{\partial \alpha} = \frac{-2p_c}{(1+\alpha)^2} \left(\log_2 \frac{1-p}{p} - 0.5 \log_2 \frac{1-p_0}{p_0} + 0.5 \log_2 \frac{1-p_1}{p_1} \right). \end{cases} \quad (A5)$$

由于在区域 D1 内, 且 $0 \leq \alpha \leq 1$ 时, 有 $\frac{\partial H(Y)}{\partial \alpha} \geq 0$, $\frac{\partial H(Y|X)}{\partial \alpha} \geq 0$, $\frac{\partial I(X; Y)}{\partial \alpha} \leq 0$, 因此有 $H(Y)$ 在 $0 \leq \alpha \leq 1$ 随 α 单调递增, 有 $H(Y|X)$ 在 $0 \leq \alpha \leq 1$ 随 α 单调递增, $I(X; Y)$ 在 $0 \leq \alpha \leq 1$ 随 α 单调递减.

附录 B 非对称信道与非门的性质证明

1) 数学模型

令与非门输入 00, 01, 10, 11 时其输出正确的概率为 $p_{00} = p(V_{\text{out}} = 1|V_{\text{in}} = 00)_{\text{nand}}$, $p_{01} = p(V_{\text{out}} = 1|V_{\text{in}} = 01)_{\text{nand}}$, $p_{10} = p(V_{\text{out}} = 1|V_{\text{in}} = 10)_{\text{nand}}$, $p_{11} = p(V_{\text{out}} = 0|V_{\text{in}} = 11)_{\text{nand}}$. 则当输入等概时, 有

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11}) = p_c, \\ p_{01} = \beta p_{00}, \\ p_{10} = p_{01}, \\ p_{11} = \gamma p_{00}. \end{cases} \quad (B1)$$

解之得 $p_{00} = 4p_c/(1+2\beta+\gamma)$, $p_{01} = p_{10} = 4\beta p_c/(1+2\beta+\gamma)$, $p_{11} = 4\gamma p_c/(1+2\beta+\gamma)$. 由于实际要求 $p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11} \in [0.5, 1]$, 因此有 $\max(2p_c - 0.5 - 0.5\gamma, \frac{1+\gamma}{8p_c-2}, 2\gamma p_c - 0.5 - 0.5\gamma) \leq \beta \leq \min(4p_c - 0.5 - 0.5\gamma, \frac{1+\gamma}{4p_c-2}, 4\gamma p_c - 0.5 - 0.5\gamma)$, $0.5 \leq p_c \leq 1$, $\max(4p_c - 1 - 2\beta, \frac{1+2\beta}{8p_c-1}, 4\beta p_c - 1 - 2\beta) \leq \gamma \leq \min(8p_c - 1 - 2\beta, \frac{1+2\beta}{4p_c-1}, 8\beta p_c - 1 - 2\beta)$. 为表述方便, 将此区间定为区域 D2.

由概率论以及信息论知识可得与非门非对称信道有

$$\begin{cases} H(Y) = H(p^*), \\ H(Y|X) = 0.25[H(p_{00}) + H(p_{01}) + H(p_{01}) + H(p_{11})], \\ I(X; Y) = H(p^*) - 0.25[H(p_{00}) + H(p_{01}) + H(p_{01}) + H(p_{11})], \end{cases} \quad (B2)$$

其中 $p^* = 0.25 + 0.25p_{00}(1+2\beta-\gamma) = 0.25 + (1+2\beta-\gamma)p_c/(1+2\beta+\gamma)$, $p_{00} = 4p_c/(1+2\beta+\gamma)$, $p_{01} = p_{10} = 4\beta p_c/(1+2\beta+\gamma)$, $p_{11} = 4\gamma p_c/(1+2\beta+\gamma)$. 下面将对与非门的 $H(Y)$, $H(Y|X)$, $I(X; Y)$ 在区域 D2 上的性质进行讨论.

2) 性质证明

性质 B1 在 β, γ 不变的条件下, 输出信息熵 $H(Y)$ 随 p_c 单调递减, 条件熵 $H(Y|X)$ 随 p_c 单调递减, 互信息 $I(X; Y)$ 随 p_c 单调递增.

证明 由式 (B2) 可知, 当 β, γ 不变时, p^* 随 p_c 单调递增, 且有 $p^* \geq 0.5$, 故有 $H(Y)$ 随 p_c 单调递减. 同样地, 当 β, γ 不变时, $p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}$ 随 p_c 单调递增, 且有 $p_{00} \geq 0.5, p_{01} \geq 0.5, p_{10} \geq 0.5, p_{11} \geq 0.5$, 故有 $H(Y|X)$ 随 p_c 单调递减. 又 $I(X; Y)$ 对 p_c 求偏导 (可视 β, γ 为常数) 得

$$\frac{\partial I(X; Y)}{\partial p_c} = \frac{1}{(1+2\beta+\gamma)} \left((1+2\beta-\gamma) \log_2 \frac{1-p^*}{p^*} - \log_2 \frac{1-p_{00}}{p_{00}} - 2\beta \log_2 \frac{1-p_{01}}{p_{01}} - \gamma \log_2 \frac{1-p_{11}}{p_{11}} \right). \quad (B3)$$

可以证明, 当 β, γ, p_c 在区域 D2 内取值时, 有 $\frac{\partial I(X; Y)}{\partial p_c} \geq 0$, 即互信息 $I(X; Y)$ 随 p_c 单调递增.

性质 B2 在 p_c 不变的条件下, 输出信息熵 $H(Y)$ 随 β 单调递减, 随 γ 单调递增. 互信息 $I(X; Y)$ 随 β 单调递减, 随 γ 单调递增.

证明 对 $H(Y)$, $H(Y|X)$, $I(X; Y)$ 关于 β 求偏导 (可视 p_c, γ 为一固定值) 得

$$\frac{\partial H(Y)}{\partial \beta} = \log_2 \frac{1-p^*}{p^*} \cdot \frac{4\gamma p_c}{(1+2\beta+\gamma)^2}, \quad (B4)$$

$$\frac{\partial H(Y|X)}{\partial \beta} = \frac{p_c}{(1+2\beta+\gamma)^2} \left[-2 \log_2 \frac{1-p_{00}}{p_{00}} + 2(1+\gamma) \log_2 \frac{1-p_{01}}{p_{01}} - 2\gamma \log_2 \frac{1-p_{11}}{p_{11}} \right], \quad (B5)$$

$$\frac{\partial I(X;Y)}{\partial \beta} = \frac{p_c}{(1+2\beta+\gamma)^2} \left(4\log_2 \frac{1-p^*}{p^*} + 2\log_2 \frac{1-p_{00}}{p_{00}} - 2(1+\gamma)\log_2 \frac{1-p_{01}}{p_{01}} + 2\gamma\log_2 \frac{1-p_{11}}{p_{11}} \right). \quad (B6)$$

由于在区域 D2 内, 有 $\frac{\partial H(Y)}{\partial \beta} \leq 0$, 因此有 $H(Y)$ 随 β 单调递减. 又由于在区域 D2 内, $0 \leq \beta \leq 1, \beta \leq \gamma$ 有 $\frac{\partial H(Y|X)}{\partial \beta} \geq 0$, 但是当 $\beta \geq \gamma$ 时值不定, 因此 $H(Y)$ 关于 β 无严格单调关系. 而对式 (B6), 可以证明, 当 β, γ, p_c 在区域 D2 内取值时, 有 $\frac{\partial I(X;Y)}{\partial \beta} \leq 0$, 即互信息 $I(X;Y)$ 随 β 单调递减. 同样地, 对 $H(Y), H(Y|X), I(X;Y)$ 关于 γ 求偏导 (可视 p_c, β 为一固定值) 得

$$\frac{\partial H(Y)}{\partial \gamma} = \log_2 \frac{1-p^*}{p^*} \cdot \frac{-(2+4\beta)p_c}{(1+2\beta+\gamma)^2}, \quad (B7)$$

$$\frac{\partial H(Y|X)}{\partial \gamma} = \frac{4p_c}{(1+2\beta+\gamma)^2} \left[-\log_2 \frac{1-p_{00}}{p_{00}} - 2\beta\log_2 \frac{1-p_{01}}{p_{01}} + (1+2\beta)\log_2 \frac{1-p_{11}}{p_{11}} \right], \quad (B8)$$

$$\frac{\partial I(X;Y)}{\partial \gamma} = \frac{4p_c}{(1+2\beta+\gamma)^2} \left[-\left(\beta + \frac{1}{2}\right)\log_2 \frac{1-p^*}{p^*} + \log_2 \frac{1-p_{00}}{p_{00}} + 2\beta\log_2 \frac{1-p_{01}}{p_{01}} - (1+2\beta)\log_2 \frac{1-p_{11}}{p_{11}} \right]. \quad (B9)$$

由于在区域 D2 内, 有 $\frac{\partial H(Y)}{\partial \gamma} \geq 0$, 因此有 $H(Y)$ 随 γ 单调递增. 又由于在区域 D2 内, 且 $0 \leq \beta \leq 1, \beta \geq \gamma$ 时有 $\frac{\partial H(Y|X)}{\partial \gamma} \geq 0$, 但当 $\beta \leq \gamma$ 时值不定, 因此有 $H(Y)$ 关于 γ 无严格单调关系. 而对式 (B9), 可以证明, 当 β, γ, p_c 在区域 D2 内取值时, 有 $\frac{\partial I(X;Y)}{\partial \gamma} \geq 0$, 即互信息 $I(X;Y)$ 随 γ 单调递增.

Mutual information analysis for digital circuits

Xiaoqian LI* & Jianhao HU*

National Key Laboratory of Communication, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China

*Corresponding author. E-mail: lixq_email@163.com, jhhu@uestc.edu.cn

Abstract Information theory is an effective tool to study information flow systems. The information entropy is a measure of the average uncertainty in the random variable, and the mutual information is a measure of the dependence between two random variables. As the mutual information, which is often used to characterize the processing capability in the communication system, is closely related to the channel capacity and circuit power, we use the information theory to analyze the digital circuits in this paper. We discussed variation trend of mutual information and its influence factors for four typical circuit models, symmetric, asymmetric, feedback and non-feedback circuits. We also proved that the circuit with feedback has fault tolerance and mutual information gain. The analysis method is suitable for other circuits, and it can provide a theoretical basis for circuit design.

Keywords information theory, information entropy, mutual information, symmetric channel, feedback circuits

Xiaoqian LI was born in 1991. She obtained her B.E. degree in communication engineering from UESTC, Chengdu, China, in 2013. Currently, she is working towards an M.S. degree at the National Key Laboratory of Science and Technology on Communications in UESTC, Chengdu, China. Her research interests include low-power circuit design and implementation, and stochastic logic.

Jianhao HU obtained his B.E. and Ph.D. degrees in communication systems from the University of Electronic Science and Technology of China (UESTC) in 1993 and 1999, respectively. He joined the City University of Hong Kong from 1999 to 2000 as a postal doctor. From 2000 to 2004, he served as a senior system engineer at the 3G Research Center of the University of Hong Kong. He has been a professor at the National Key Laboratory of Communication of UESTC since 2005. His research area includes high speed low power DSP technology with VLSI, NoC, wireless communications, and software radio.