四元数分析中加权 Dirac 算子的 Riemann 边值问题

献给史济怀教授 80 华诞

王丽萍^①, 杨贺菊^②, 谢永红^①, 乔玉英^{①*}

^① 河北师范大学数学与信息科学学院, 石家庄 050024;

^② 河北科技大学理学院, 石家庄 050018

E-mail: wlpqxj@163.com, earnestqin7384@163.com, xyh1973@126.com, yuyingqiao@163.com

收稿日期: 2015-03-31; 接受日期: 2015-06-25; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11401162, 11401159 和 11301136) 和河北省自然科学基金 (批准号: A2015205012, A2014205069 和 A2014208158) 资助项目

摘要 本文首先定义一类 Teodorescu 型算子, 讨论它的有界性、Hölder 连续性与它的广义导数; 然后在 $\mathbb{R}^4$ 上提出一类加权 Dirac 算子的 Riemann 边值问题; 最后利用前面定义的 Teodorescu 型算子给出上述边值问题解的积分表示.

关键词 四元数分析 Teodorescu 型算子 加权 Dirac 算子 Riemann 边值问题 积分表示

MSC (2010) 主题分类 30G30, 35J70

1 引言

四元数分析与 Clifford 分析作为高维空间的函数理论, 是单复变函数论在高维空间的比较自然的推广, 它们有重要的理论意义, 是数学物理上解决高维偏微分方程初边值问题的重要工具之一. 又因偏微分方程在物理、化学、金融数学、生物数学等学科上都有重要应用 (参见文献 [1,2]), 所以, 自 20 世纪 60 年代开始, 它一直是一个重要而有意义的研究主题. 有众多专家学者曾致力于这一问题的研究, 如文献 [3-7] 等. 另外, 奇异积分算子是偏微分方程边值问题解的核心构件. 多年来, 许多专家学者都研究过各类奇异积分算子的性质并获得了有关偏微分方程初边值问题解的积分表示. Vekua^[8] 首先讨论了平面上一些 Teodorescu 算子的性质及其在薄壳理论、气体动力学上的应用. 随后, Hile^[9] 在 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上研究了 Teodorescu 算子的一些性质; Gilbert 等人^[10] 在高维复空间也研究过它的许多性质. 文献 [11, 12] 等在实四元数分析中讨论了 Teodorescu 算子的一些性质与有关边值问题. 文献 [13, 14] 等将多复变的方法引入到多四元数理论和多 Clifford 分析中. 文献 [15, 16] 在 Clifford 分析中研究了一些边值问题与积分表示. 文献 [17, 18, 19] 在 Clifford 分析中也研究了一些奇异积分算子的性质与应用.

本文通过四元数分析的方法在 $\mathbb{R}^4$ 上研究了一类加权 Dirac 算子的 Riemann 边值问题, 与已有相关文献比较而言, 主要的特色是, 我们研究的方程 $x_4^\alpha \partial_x w = g(x)$ ($x \in \mathbb{R}^4 \setminus \partial E$, $0 < \alpha < 1$) 复杂了, 由于

英文引用格式: Wang L P, Yang H J, Xie Y H, et al. Riemann boundary value problem for a kind of weighted Dirac operator in quaternion analysis (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1919–1930, doi: 10.1360/N012015-00148

要解决的方程与原来不同, 为了给出其解的表达式, 我们构造了一类新的 Teodorescu 型算子 $T_{\mathbb{R}^4}$, 该 Teodorescu 型算子 $T_{\mathbb{R}^4}$ 与原来的 Teodorescu 算子不同, 原来的 Teodorescu 算子是

$$(T[g])(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{(\bar{y} - \bar{x})g(y)}{|y - x|^4} dy,$$

本文 Teodorescu 型算子发生了变化, 是

$$(T_{\mathbb{R}^4}[g])(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{(\bar{y} - \bar{x})g(y)}{|y - x|^4 y_4^\alpha} dy,$$

分母上比原来的 Teodorescu 算子多了 y_4^α , 这导致本文中定理 3.1 和 3.2 在证明上述奇异积分算子的有界性与 Hölder 连续性时比原来困难, 证明中多次用到文中 (3.6) 的思想进行分母的处理, 经过巧妙地处理分母, 得到要证明的结果. 另外, 因为算子 $T_{\mathbb{R}^4}$ 复杂了, 导致在定理 3.1 和 3.2 的证明中都需要分多种情形进行讨论, 并通过巧妙地插点, 把后一种情形转化为前一种或前几种情形, 从而处理了各种情形, 最终得出定理 3.1 和 3.2 中的 $T_{\mathbb{R}^4}$ 算子的性质, 并利用它给出问题 P (即方程 (4.1) 与 Riemann 边界条件 (4.2)) 的解的表示.

全文结构如下: 第 2 节回顾四元数分析的一些基本知识; 第 3 节构造一类 Teodorescu 型算子 $T_{\mathbb{R}^4}$, 并讨论它的有界性、Hölder 连续性与它的广义导数等; 第 4 节首先提出一类加权 Dirac 算子的 Riemann 边值问题, 然后利用第 3 节的 Teodorescu 型算子给出其解的积分表示.

2 预备知识

四元数分析主要研究定义于 Euclid 空间 $\mathbb{R}^4$ 上取值于不可交换的四元数代数空间 $\mathbb{H}$ 上的函数. 四元数代数空间是基底为 $1, i, j, k$ 的四维向量空间, 其中 i, j, k 满足下述乘法运算法则:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

四元数代数空间 $\mathbb{H}$ 中的任意元素可表示为 $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, 其中 $a_i \in \mathbb{R}$, 其共轭为 $\bar{a} = a_1 - ia_2 - ja_3 - ka_4$. 四元数代数空间 $\mathbb{H}$ 中元素 a 的范数为 $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$, 满足 $|\bar{a}| = |a|$, $|a + b| \leq |a| + |b|$, $|ab| = |a||b|$. 若 $a\bar{a} = \bar{a}a = |a|^2$ 并且 $|a| \neq 0$, 则有 $a \cdot \frac{\bar{a}}{|a|^2} = \frac{\bar{a}}{|a|^2} \cdot a = 1$. 若 $a\bar{a} = \bar{a}a = |a|^2$ 并且 $|a| \neq 0$, 则称 a 是可逆的, 它的逆元可表示为 $a^{-1} = \frac{\bar{a}}{|a|^2}$.

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ 是区域, 任意 $x \in \Omega$ 可表示为 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. 定义于 Ω 上取值于四元数代数空间 $\mathbb{H}$ 的函数 u 可表示为 $u = u_1 + iu_2 + ju_3 + ku_4$, 其中 $u_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 是定义于 Ω 上的实值函数.

下面介绍有关的微分算子与它的共轭算子:

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} + j\frac{\partial}{\partial x_3} + k\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad \partial_{\bar{x}} = \frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2} - j\frac{\partial}{\partial x_3} - k\frac{\partial}{\partial x_4}.$$

若 $u \in C^{(1)}(\Omega) = \{u \mid u: \Omega \rightarrow \mathbb{H}, u = u_1 + iu_2 + ju_3 + ku_4, u_i \in C^{(1)}(\Omega, \mathbb{R})\}$, 并且 $\partial_x u = 0$, 则称 u 是一个左正则函数, 简称为正则函数. 若对于任意 $x \in \Omega$ 有 $u \in C^{(1)}(\Omega)$, 并且 $\partial_x u = g$, 则称 u 为左广义正则函数, 简称为广义正则函数. $u \in L^{p, \sigma}(\mathbb{R}^4)$ 是指 $u \in L^p(E)$, $u^{(\sigma)}(x) = |x|^{-\sigma} u(\frac{x}{|x|^2}) \in L^p(E)$, 其中 $E = \{x \mid x \in \mathbb{R}^4, |x| < 1\}$, σ 是一个实常数, $\|u\|_{p, \sigma} = \|u\|_{L^p(E)} + \|u^{(\sigma)}\|_{L^p(E)}$.

定义 2.1 ^[8] 设函数 u, v 和 φ 定义于 Ω 上取值于四元数代数空间 $\mathbb{H}$, $u, v \in L^1(\Omega)$. 若对于任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, u 和 v 满足

$$\int_{\Omega} (\varphi \partial_x) v(x) dx + \int_{\Omega} \varphi(x) u(x) dx = 0,$$

则称 u 为 v 的广义导数, 并记 $u = \partial_x v$.

引理 2.1 ^[20] 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 是一个有界区域, 若实常数 α' 和 β' 满足 $0 < \alpha', \beta' < n$, $\alpha' + \beta' > n$, 则对于任意的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ 并且 $x_1 \neq x_2$, 有

$$\int_{\Omega} |t - x_1|^{-\alpha'} |t - x_2|^{-\beta'} dt \leq M_0(\alpha', \beta') |x_1 - x_2|^{n-\alpha'-\beta'}.$$

3 Teodorescu 型算子的一些性质

本节讨论下述 Teodorescu 型算子的一些性质,

$$\begin{aligned} (T_{\mathbb{R}^4}[g])(x) &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{(\bar{y} - \bar{x})g(y)}{|y - x|^4 y_4^\alpha} dy \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_E \frac{(\bar{y} - \bar{x})g(y)}{|y - x|^4 y_4^\alpha} dy - \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4 \setminus E} \frac{(\bar{y} - \bar{x})g(y)}{|y - x|^4 y_4^\alpha} dy \\ &= (T_E[g])(x) + (T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x), \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 $E = \{x \mid x \in \mathbb{R}^4, |x| < 1\}$, $0 < \alpha < 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^4} \frac{(\bar{y} - \bar{x})g(y)}{|y - x|^4 y_4^\alpha} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^4 \setminus \{y \mid |y - x| < \varepsilon \cup |y_4| < \varepsilon\}} \frac{(\bar{y} - \bar{x})g(y)}{|y - x|^4 y_4^\alpha} dy.$$

定理 3.1 设 E 如上所述, 若 $g \in L^p(E)$, $\frac{6}{1-\alpha} < p < +\infty$, $g(x) = O(x_4^\alpha)$, 则

- (1) $|(T_E[g])(x)| \leq M_1(p, \alpha) \|g\|_{L^p(E)}$, $x \in \mathbb{R}^4$;
- (2) $|(T_E[g])(x^{(1)}) - (T_E[g])(x^{(2)})| \leq M_2(p, \alpha) \|g\|_{L^p(E)} |x^{(1)} - x^{(2)}|^\beta$, $0 < \beta = 1 - \alpha - \frac{5}{p} < 1$, $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^4$;
- (3) $x_4^\alpha \partial_x (T_E[g])(x) = g(x)$, $x \in E$, $x_4^\alpha \partial_x (T_E[g])(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^4 \setminus \bar{E}$.

证明 (1) 由 Hölder 不等式得

$$|(T_E[g])(x)| \leq \frac{1}{2\pi^2} \|g\|_{L^p(E)} \left[\int_{-1}^1 \frac{1}{|y_4|^{\alpha q} |y_4 - x_4|^{3q \frac{\beta_0}{2}}} dy_4 \int_E \frac{1}{|y - \underline{x}|^{3q(1-\frac{\beta_0}{2})}} dy_1 dy_2 dy_3 \right]^{\frac{1}{q}},$$

其中 $\beta_0 = \frac{1-\alpha}{2} - \frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{2} - \frac{q-1}{q}$, $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

由 $1 < \frac{6}{1-\alpha} < p < +\infty$, $0 < \alpha < 1$ 得

$$1 < q < \frac{6}{\alpha+5} < \frac{4}{3+\alpha} < \frac{4}{3} < 2, \quad (3.2)$$

$$0 < \frac{1-\alpha}{3} < \beta_0 < \frac{1-\alpha}{2} < \frac{1}{2} < 1. \quad (3.3)$$

从而有

$$3q \frac{\beta_0}{2} + \alpha q = \left(\frac{3}{2} \beta_0 + \alpha \right) q < \frac{3+\alpha}{4} q < 1, \quad (3.4)$$

$$3q\left(1 - \frac{\beta_0}{2}\right) < 3q\frac{\alpha+5}{6} < 3. \quad (3.5)$$

因此, $\int_{-1}^1 |y_4 - x_4|^{-3q\frac{\beta_0}{2}} |y_4|^{-\alpha q} dy_4$ 与 $\int_E |\underline{y} - \underline{x}|^{-3q(1-\frac{\beta_0}{2})} dy_1 dy_2 dy_3$ 有界, 所以,

$$|(T_E[g])(x)| \leq M_1(p, \alpha) \|g\|_{L^p(E)}.$$

(2) 对于任意的 $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^4$, $x^{(1)} \neq x^{(2)}$, 由 Hile 引理^[9] 与 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} & |(T_E[g])(x^{(1)}) - (T_E[g])(x^{(2)})| \\ & \leq \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l=1}^3 \int_E \frac{|g(y)|}{|y_4|^\alpha} \frac{1}{|y - x^{(1)}|^l |y - x^{(2)}|^{4-l}} |x^{(1)} - x^{(2)}| |dy| \\ & \leq \frac{1}{2\pi^2} \|g\|_{L^p(E)} \sum_{l=1}^3 \left(\int_E \frac{1}{|y_4|^{\alpha q} |y - x^{(1)}|^{lq} |y - x^{(2)}|^{(4-l)q}} |dy| \right)^{\frac{1}{q}} |x^{(1)} - x^{(2)}| \\ & = \frac{1}{2\pi^2} \|g\|_{L^p(E)} |x^{(1)} - x^{(2)}| \sum_{l=1}^3 I_l^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中

$$\begin{aligned} I_l &= \int_E \frac{1}{|y_4|^{\alpha q} |y - x^{(1)}|^{lq\frac{\beta_0}{2}} |y - x^{(1)}|^{lq(1-\frac{\beta_0}{2})}} \cdot \frac{1}{|y - x^{(2)}|^{(4-l)q\frac{\beta_0}{2}} |y - x^{(2)}|^{(4-l)q(1-\frac{\beta_0}{2})}} dy \\ &\leq \int_{-1}^1 \frac{1}{|y_4|^{\alpha q} |y_4 - x_4^{(1)}|^{lq\frac{\beta_0}{2}} |y_4 - x_4^{(2)}|^{(4-l)q\frac{\beta_0}{2}}} dy_4 \cdot \int_E \frac{1}{|\underline{y} - \underline{x}^{(1)}|^{lq(1-\frac{\beta_0}{2})} |\underline{y} - \underline{x}^{(2)}|^{(4-l)q(1-\frac{\beta_0}{2})}} dy_1 dy_2 dy_3 \\ &=: I_{l_1} \cdot I_{l_2}, \end{aligned}$$

这里 $\beta_0, y, \underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}, p$ 和 q 如上所述.

由 $\beta_0 = \frac{1-\alpha}{2} - \frac{q-1}{q}$ 与 (3.2) 得 $lq\frac{\beta_0}{2} + (4-l)q\frac{\beta_0}{2} + \alpha q = 2 - q < 1$. 因此, I_{l_1} 有界, 即 $|I_{l_1}| \leq J_1$.

下面讨论 I_{l_2} .

(i) 当 $\underline{x}^{(1)} \neq \underline{x}^{(2)}$, $x_4^{(1)} = x_4^{(2)}$ 时, 有 $|x^{(1)} - x^{(2)}| = |\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(2)}|$. 设 $\alpha' = lq(1-\frac{\beta_0}{2})$, $\beta' = (4-l)q(1-\frac{\beta_0}{2})$ ($l = 1, 2, 3$). 由 (3.2)、(3.3) 与 (3.5) 得

$$0 < \alpha' < 3, \quad 0 < \beta' < 3, \quad \alpha' + \beta' > 4q\left(1 - \frac{\beta_0}{2}\right) > 3 + \alpha > 3.$$

从而, 由引理 2.1 得 $I_{l_2} \leq M_0(\alpha', \beta') |\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(2)}|^{3-\alpha'-\beta'} = M_0(p, \alpha) |x^{(1)} - x^{(2)}|^{3-4q(1-\frac{\beta_0}{2})}$. 因此,

$$I_l \leq J_2 |x^{(1)} - x^{(2)}|^{3-4q(1-\frac{\beta_0}{2})}, \quad l = 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

再由 (3.2) 与 (3.3) 有 $-1 < -\frac{\alpha+5}{6} < \frac{3-4q(1-\frac{\beta_0}{2})}{q} < -\alpha < 0$, 从而, $0 < 1 + \frac{3-4q(1-\frac{\beta_0}{2})}{q} < 1$, 因此, 由 (3.6) 与 (3.7) 得

$$|(T_E[g])(x^{(1)}) - (T_E[g])(x^{(2)})| \leq J_3 \|g\|_{L^p(E)} |x^{(1)} - x^{(2)}|^{1+\frac{3-4q(1-\frac{\beta_0}{2})}{q}} \leq J_3 \|g\|_{L^p(E)} |x^{(1)} - x^{(2)}|^\beta, \quad (3.8)$$

其中 $0 < \beta = 1 + \frac{3-4q(1-\frac{\beta_0}{2})}{q} = 1 - \alpha - \frac{5}{p} < 1$.

(ii) 当 $\underline{x}^{(1)} \neq \underline{x}^{(2)}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}|x_4^{(1)} - x_4^{(2)}| \leq |x^{(1)} - x^{(2)}|$ 时, 设 $x^{(3)} = (\underline{x}^{(1)}, x_4^{(2)})$, 则

$$|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(2)}| = |x^{(2)} - x^{(3)}| \geq |x^{(1)} - x^{(2)}| - |x_4^{(1)} - x_4^{(2)}| \geq \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)|x^{(1)} - x^{(2)}|.$$

类似于情形 (i), 有 $|(T_E[g])(x^{(1)}) - (T_E[g])(x^{(2)}))| \leq J_4 \|g\|_{L^p(E)} |x^{(1)} - x^{(2)}|^\beta$.

(iii) 当 $\underline{x}^{(1)} = \underline{x}^{(2)}$, $x_4^{(1)} \neq x_4^{(2)}$ 时, 设 $x^{(1)} = (x_1, x_2, x_3, x_4^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1, x_2, x_3, x_4^{(2)})$. 取 $x^{(3)} = (x_1 + (x_4^{(2)} - x_4^{(1)})/2\sqrt{3}, x_2, x_3, (x_4^{(2)} + x_4^{(1)})/2)$, 有 $\underline{x}^{(3)} \neq \underline{x}^{(1)}$, $\underline{x}^{(3)} \neq \underline{x}^{(2)}$, 且

$$|x^{(1)} - x^{(3)}| = \frac{\sqrt{3}}{3}|x_4^{(1)} - x_4^{(2)}| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}|x^{(1)} - x^{(2)}|, \quad (3.9)$$

$$|x^{(2)} - x^{(3)}| = \frac{\sqrt{3}}{3}|x_4^{(1)} - x_4^{(2)}| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}|x^{(1)} - x^{(2)}|, \quad (3.10)$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}|x_4^{(1)} - x_4^{(3)}| = \frac{2}{\sqrt{3}}\left|x_4^{(1)} - \frac{x_4^{(2)} + x_4^{(1)}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}|x_4^{(1)} - x_4^{(2)}| = |x^{(1)} - x^{(3)}|,$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}|x_4^{(2)} - x_4^{(3)}| = \frac{2}{\sqrt{3}}\left|x_4^{(2)} - \frac{x_4^{(2)} + x_4^{(1)}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}|x_4^{(1)} - x_4^{(2)}| = |x^{(2)} - x^{(3)}|.$$

类似于情形 (ii), 有

$$|(T_E[g])(x^{(1)}) - (T_E[g])(x^{(3)}))| \leq J_5 \|g\|_{L^p(E)} |x^{(1)} - x^{(3)}|^\beta, \quad (3.11)$$

$$|(T_E[g])(x^{(2)}) - (T_E[g])(x^{(3)}))| \leq J_6 \|g\|_{L^p(E)} |x^{(2)} - x^{(3)}|^\beta. \quad (3.12)$$

由 (3.9)–(3.12) 得

$$\begin{aligned} |(T_E[g])(x^{(1)}) - (T_E[g])(x^{(2)}))| &\leq J_4 \|g\|_{L^p(E)} |x^{(1)} - x^{(3)}|^\beta + J_5 \|g\|_{L^p(E)} |x^{(2)} - x^{(3)}|^\beta \\ &\leq J_5 \|g\|_{L^p(E)} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^\beta |x^{(1)} - x^{(2)}|^\beta + J_6 \|g\|_{L^p(E)} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^\beta |x^{(1)} - x^{(2)}|^\beta \\ &\leq J_7 \|g\|_{L^p(E)} |x^{(1)} - x^{(2)}|^\beta. \end{aligned}$$

(iv) 当 $\underline{x}^{(1)} \neq \underline{x}^{(2)}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}|x_4^{(1)} - x_4^{(2)}| > |x^{(1)} - x^{(2)}|$ 时, 设 $x^{(1)} = (\underline{x}^{(1)}, x_4^{(1)})$, $x^{(2)} = (\underline{x}^{(2)}, x_4^{(2)})$, $x^{(3)} = (\underline{x}^{(2)}, x_4^{(1)})$, 则 $\underline{x}^{(3)} = \underline{x}^{(2)}$, $x_4^{(3)} \neq x_4^{(2)}$, $\underline{x}^{(3)} \neq \underline{x}^{(1)}$, $x_4^{(3)} = x_4^{(1)}$. 从而, 由情形 (i) 和 (iii) 得

$$|(T_E[g])(x^{(1)}) - (T_E[g])(x^{(2)}))| \leq J_8 \|g\|_{L^p(E)} |x^{(1)} - x^{(2)}|^\beta.$$

综上所述, 对于任意的 $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^4$, $x^{(1)} \neq x^{(2)}$, 有

$$|(T_E[g])(x^{(1)}) - (T_E[g])(x^{(2)}))| \leq M_2(p, \alpha) \|g\|_{L^p(E)} |x^{(1)} - x^{(2)}|^\beta,$$

其中 $M_2(p, \alpha) = \max\{J_3, J_4, J_7, J_8\}$.

(3) 对于任意的 $\varphi \in C_0^\infty(E)$, 由定义 2.1、Pompeiu 公式^[21] 与 Fubini 定理得

$$\begin{aligned} \int_E (\varphi \partial_x)(T_E[g])(x) dx &= \int_E (\varphi \partial_x) \left[-\frac{1}{2\pi^2} \int_E \frac{\bar{y} - \bar{x}}{|y - x|^4} \frac{g(y)}{y_4^\alpha} dy \right] dx \\ &= \int_E \left[\frac{1}{2\pi^2} \int_E (\varphi \partial_x) \frac{\bar{x} - \bar{y}}{|x - y|^4} dx \right] \frac{g(y)}{y_4^\alpha} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_E \left[\frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial E} \varphi(x) d\sigma_x \frac{\bar{x} - \bar{y}}{|x - y|^4} - \varphi(y) \right] \frac{g(y)}{y_4^\alpha} dy \\
 &= - \int_E \varphi(y) \frac{g(y)}{y_4^\alpha} dy = - \int_E \varphi(x) \frac{g(x)}{x_4^\alpha} dx.
 \end{aligned}$$

因此, 在广义导数意义下, 有 $x_4^\alpha \partial_x (T_E[g])(x) = g(x)$ ($x \in E$). 另外, 显然有 $\partial_x (T_E[g])(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}^4 \setminus \bar{E}$).

定理 3.2 设 E 如上所述, 若 $g \in L^{p, 8-2\alpha}(\mathbb{R}^4)$, $\frac{6}{1-\alpha} < p < +\infty$, $g(x) = O(x_4^\alpha)$, 则

(1) $|(T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x)| \leq M_3(p, \alpha) \|g^{(8-2\alpha)}\|_{L^p(E)}$, $x \in \mathbb{R}^4$;

(2) $|(T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x^{(1)}) - (T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x^{(2)})| \leq M_4(p, \alpha) \|g^{(8-2\alpha)}\|_{L^p(E)} |x^{(1)} - x^{(2)}|^\beta$, $0 < \beta = 1 - \alpha - \frac{5}{p} < 1$, $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^4$;

(3) $x_4^\alpha \partial_x (T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x) = 0$, $x \in E$, $x_4^\alpha \partial_x (T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^4 \setminus \bar{E}$.

证明 (1) 设 $y = \frac{\bar{y}'}{|y'|^2}$, 由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}
 |(T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x)| &\leq \frac{1}{2\pi^2} \int_E \frac{1}{|\frac{\bar{y}'}{|y'|^2} - x|^3 |y_4'|^\alpha} |y'|^{-(8-2\alpha)} \left| g\left(\frac{\bar{y}'}{|y'|^2}\right) \right| dy' \\
 &\leq \frac{1}{2\pi^2} \|g^{(8-2\alpha)}\|_{L^p(E)} \left[\int_E \frac{1}{|\frac{\bar{y}'}{|y'|^2} - x|^{3q} |y_4'|^{\alpha q}} dy' \right]^{\frac{1}{q}} \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} \|g^{(8-2\alpha)}\|_{L^p(E)} (O(x))^{\frac{1}{q}},
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中

$$O(x) \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{|y_4'|^{\alpha q} |\frac{1}{y_4'} - x_4|^{3q \frac{\beta_0}{2}}} dy_4' \int_E \frac{1}{|\frac{\bar{y}'}{|y'|^2} - x|^{3q(1-\frac{\beta_0}{2})}} dy' = O_1(x) \cdot O_2(x), \tag{3.14}$$

这里 β_0 如前所述.

下面分四种情形讨论.

(i) 当 $|x_4| \geq \frac{1}{2}$, $|\underline{x}| \geq \frac{1}{2}$ 时, 有 $\frac{1}{|x_4|} \leq 2$, $\frac{1}{|\underline{x}|} \leq 2$. 因为

$$|y_4'|^{-\alpha q} \left| \frac{1}{y_4'} - x_4 \right|^{-3q \frac{\beta_0}{2}} = |y_4'|^{-(\alpha q - 3q \frac{\beta_0}{2})} \left| \frac{1}{x_4} - y_4' \right|^{-3q \frac{\beta_0}{2}} |x_4|^{-3q \frac{\beta_0}{2}},$$

所以,

$$O_1(x) \leq 2^{3q \frac{\beta_0}{2}} \int_{-1}^1 |y_4'|^{-(\alpha q - 3q \frac{\beta_0}{2})} \left| \frac{1}{x_4} - y_4' \right|^{-3q \frac{\beta_0}{2}} dy_4'.$$

由 (3.2) 得 $\alpha q - 3q \frac{\beta_0}{2} + 3q \frac{\beta_0}{2} = \alpha q < 1$, 所以, 上述积分是有界的, 从而有

$$O_1(x) \leq J_9. \tag{3.15}$$

因为

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\bar{y}'}{|y'|^2} - \underline{x} \right|^{-3q(1-\frac{\beta_0}{2})} &\leq |\underline{y}|^{3q(1-\frac{\beta_0}{2})} |\underline{y}'|^{-3q(1-\frac{\beta_0}{2})} \left| \frac{\bar{y}'}{|y'|^2} - \underline{x} \right|^{-3q(1-\frac{\beta_0}{2})} |\underline{x}|^{3q(1-\frac{\beta_0}{2})} |\underline{x}|^{-3q(1-\frac{\beta_0}{2})} \\
 &\leq |\underline{y}|^{3q(1-\frac{\beta_0}{2})} \left| y' - \frac{\bar{x}}{|\underline{x}|^2} \right|^{-3q(1-\frac{\beta_0}{2})},
 \end{aligned}$$

所以, $O_2(x) \leq \int_E |\underline{y}' - \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^2}|^{-3q(1-\frac{\beta_0}{2})} d\underline{y}'$. 由 (3.2) 与 (3.3), 有 $3q(1-\frac{\beta_0}{2}) < 3$, 所以, 上述积分是有界的, 从而有

$$O_2(x) \leq J_{10}. \quad (3.16)$$

因此, 由 (3.13)–(3.16) 得 $|(T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x)| \leq J_{11} \|g^{(8-2\alpha)}\|_{L^p(E)}$.

(ii) 当 $|x_4| \geq \frac{1}{2}$, $|\underline{x}| \leq \frac{1}{2}$ 时, 有 $|1 - \underline{y}'\underline{x}| \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{|\underline{x}_4|} \leq 2$. 因为

$$\left| \frac{\underline{y}'}{|\underline{y}'|^2} - \underline{x} \right|^{-3q(1-\frac{\beta_0}{2})} = |\underline{y}'|^{3q(1-\frac{\beta_0}{2})} |\underline{y}'|^{-3q(1-\frac{\beta_0}{2})} \left| \frac{\underline{y}'}{|\underline{y}'|^2} - \underline{x} \right|^{-3q(1-\frac{\beta_0}{2})} = |\underline{y}'|^{3q(1-\frac{\beta_0}{2})} |1 - \underline{y}'\underline{x}|^{-3q(1-\frac{\beta_0}{2})},$$

所以,

$$O_2(x) \leq \int_E |\underline{y}'|^{3q(1-\frac{\beta_0}{2})} |1 - \underline{y}'\underline{x}|^{-3q(1-\frac{\beta_0}{2})} d\underline{y}' \leq 2^{3q(1-\frac{\beta_0}{2})} \int_E d\underline{y}' \leq J_{12}. \quad (3.17)$$

因此, 由 (3.13)、(3.15) 和 (3.17) 得 $|(T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x)| \leq J_{13} \|g^{(8-2\alpha)}\|_{L^p(E)}$.

(iii) 当 $|x_4| \leq \frac{1}{2}$, $|\underline{x}| \geq \frac{1}{2}$ 时, 有 $|1 - \underline{y}'_4 x_4| \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{|\underline{x}|} \leq 2$. 类似 (ii) 可得

$$|(T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x)| \leq J_{14} \|g^{(8-2\alpha)}\|_{L^p(E)}.$$

(iv) 当 $|x_4| \leq \frac{1}{2}$, $|\underline{x}| \leq \frac{1}{2}$ 时, 有 $|1 - \underline{y}'_4 x_4| \geq \frac{1}{2}$, $|1 - \underline{y}'\underline{x}| \geq \frac{1}{2}$. 类似 (ii) 可得

$$|(T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x)| \leq J_{15} \|g^{(8-2\alpha)}\|_{L^p(E)}.$$

综上可得 $|(T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x)| \leq M_3(\alpha, q) \|g^{(8-2\alpha)}\|_{L^p(E)}$, 其中 $M_3(\alpha, q) = \max\{J_{11}, J_{13}, J_{14}, J_{15}\}$.

(2) 对于任意的 $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^4$, $x^{(1)} \neq x^{(2)}$, 设 $y = \frac{\underline{y}'}{|\underline{y}'|^2}$, 由 Hile 引理^[9] 与 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} & |(T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g/y_4^\alpha])(x^{(1)}) - (T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g/y_4^\alpha])(x^{(2)})| \\ & \leq J_{16} \int_{\mathbb{R}^4 \setminus E} \sum_{l=1}^3 \frac{|x^{(1)} - x^{(2)}|}{|y - x^{(1)}|^l |y - x^{(2)}|^{4-l}} \frac{|g(y)|}{|y_4|^\alpha} dy \\ & \leq J_{16} |x^{(1)} - x^{(2)}| \|g^{(8-2\alpha)}\|_{L^p(E)} \sum_{l=1}^3 \left(\int_E \frac{1}{|y'_4|^{\alpha q} |\frac{\underline{y}'}{|\underline{y}'|^2} - x^{(1)}|^{lq} |\frac{\underline{y}'}{|\underline{y}'|^2} - x^{(2)}|^{(4-l)q}} d\underline{y}' \right)^{\frac{1}{q}} \\ & = J_{16} |x^{(1)} - x^{(2)}| \|g^{(8-2\alpha)}\|_{L^p(E)} \sum_{l=1}^3 [\tilde{I}_l(x^{(1)}, x^{(2)})]^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{I}_l(x^{(1)}, x^{(2)}) &= \int_E \frac{1}{|y'_4|^{\alpha q} |\frac{\underline{y}'}{|\underline{y}'|^2} - x^{(1)}|^{lq} |\frac{\underline{y}'}{|\underline{y}'|^2} - x^{(2)}|^{(4-l)q}} d\underline{y}' \\ &\leq \int_{-1}^1 \frac{1}{|y'_4|^{\alpha q} |\frac{1}{y'_4} - x_4^{(1)}|^{lq \frac{\beta_0}{2}} |\frac{1}{y'_4} - x_4^{(2)}|^{(4-l)q \frac{\beta_0}{2}}} dy'_4 \\ &\quad \times \int_E \frac{1}{|\frac{\underline{y}'}{|\underline{y}'|^2} - \underline{x}^{(1)}|^{lq(1-\frac{\beta_0}{2})} |\frac{\underline{y}'}{|\underline{y}'|^2} - \underline{x}^{(2)}|^{(4-l)q(1-\frac{\beta_0}{2})}} d\underline{y}' \\ &=: \tilde{I}_{l_1}(x^{(1)}, x^{(2)}) \cdot \tilde{I}_{l_2}(x^{(1)}, x^{(2)}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

下面首先分四种情形讨论 $\tilde{I}_{l_1}(x^{(1)}, x^{(2)})$.

(i) 当 $|x_4^{(1)}| \leq \frac{1}{2}$, $|x_4^{(2)}| \leq \frac{1}{2}$ 时, 有 $|1 - y'_4 x_4^{(1)}| \geq \frac{1}{2}$, $|1 - y'_4 x_4^{(2)}| \geq \frac{1}{2}$. 由 $0 < (\alpha - 2\beta_0)q < 1$ 得

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{l_1}(x^{(1)}, x^{(2)}) &\leq \int_{-1}^1 |y'_4|^{-(\alpha-2\beta_0)q} |1 - y'_4 x_4^{(1)}|^{-lq\frac{\beta_0}{2}} |1 - y'_4 x_4^{(2)}|^{-(4-l)q\frac{\beta_0}{2}} dy'_4 \\ &\leq 2^{2q\beta_0} \int_{-1}^1 |y'_4|^{-(\alpha-2\beta_0)q} dy'_4 \leq J_{17}. \end{aligned}$$

(ii) 当 $|x_4^{(1)}| \leq \frac{1}{2}$, $|x_4^{(2)}| \geq \frac{1}{2}$ 时, 有 $|1 - y'_4 x_4^{(1)}| \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{|x_4^{(2)}|} \leq 2$. 再由 $0 < (\alpha - l\frac{\beta_0}{2})q < (\alpha - \frac{\beta_0}{2})q < 1$ ($l = 1, 2, 3$) 得

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{l_1}(x^{(1)}, x^{(2)}) &= \int_{-1}^1 |y'_4|^{-\alpha q} |y'_4|^{lq\frac{\beta_0}{2}} |1 - y'_4 x_4^{(1)}|^{-lq\frac{\beta_0}{2}} \left| \frac{1}{y'_4} - x_4^{(2)} \right|^{-(4-l)q\frac{\beta_0}{2}} dy'_4 \\ &\leq 2^{lq\frac{\beta_0}{2}} \int_{-1}^1 |y'_4|^{-(\alpha-2\beta_0)q} \left| y'_4 \left(\frac{1}{y'_4} - x_4^{(2)} \right) \frac{1}{x_4^{(2)}} \right|^{-(4-l)q\frac{\beta_0}{2}} |x_4^{(2)}|^{-(4-l)q\frac{\beta_0}{2}} dy'_4 \\ &\leq 2^{2q\beta_0} \int_{-1}^1 |y'_4|^{-(\alpha-2\beta_0)q} \left| y'_4 - \frac{1}{x_4^{(2)}} \right|^{-(4-l)q\frac{\beta_0}{2}} dy'_4 \leq J_{18}. \end{aligned}$$

(iii) 当 $|x_4^{(1)}| \geq \frac{1}{2}$, $|x_4^{(2)}| \leq \frac{1}{2}$ 时, 类似于情形 (ii) 可证.

(iv) 当 $|x_4^{(1)}| \geq \frac{1}{2}$, $|x_4^{(2)}| \geq \frac{1}{2}$ 时, 有 $\frac{1}{|x_4^{(1)}|} \leq 2$, $\frac{1}{|x_4^{(2)}|} \leq 2$. 再由 $0 < \alpha q - 2\beta_0 q + lq\frac{\beta_0}{2} + (4-l)q\frac{\beta_0}{2} = \alpha q < 1$ 得

$$\tilde{I}_{l_1}(x^{(1)}, x^{(2)}) = 2^{2q\beta_0} \int_{-1}^1 |y'_4|^{-(\alpha-2\beta_0)q} \left| y'_4 - \frac{1}{x_4^{(1)}} \right|^{-lq\frac{\beta_0}{2}} \left| y'_4 - \frac{1}{x_4^{(2)}} \right|^{-(4-l)q\frac{\beta_0}{2}} dy'_4 \leq J_{19}.$$

综上所述可得

$$\tilde{I}_{l_1}(x^{(1)}, x^{(2)}) \leq J_{20}. \quad (3.20)$$

其次, 可类似于定理 3.1 分四种情形讨论 $\tilde{I}_{l_2}(x^{(1)}, x^{(2)})$, 这里只讨论下面这种情形, 其他情形均可转化为该种情形解决.

(I) 当 $\underline{x}^{(1)} \neq \underline{x}^{(2)}$, $x_4^{(1)} = x_4^{(2)}$ 时, 有 $|x^{(1)} - x^{(2)}| = |\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(2)}|$.

(i) 当 $|\underline{x}^{(1)}| \leq \frac{1}{2}$, $|\underline{x}^{(2)}| \leq \frac{1}{2}$ 时, 有 $|1 - \underline{y}'\underline{x}^{(1)}| \geq \frac{1}{2}$, $|1 - \underline{y}'\underline{x}^{(2)}| \geq \frac{1}{2}$. 由于

$$\tilde{I}_{l_2}(x^{(1)}, x^{(2)}) = \int_{\underline{E}} |\underline{y}'|^{4q(1-\frac{\beta_0}{2})} |1 - \underline{y}'\underline{x}^{(1)}|^{-lq(1-\frac{\beta_0}{2})} |1 - \underline{y}'\underline{x}^{(2)}|^{-(4-l)q(1-\frac{\beta_0}{2})} d\underline{y}' \leq 2^{4q(1-\frac{\beta_0}{2})} \int_{\underline{E}} d\underline{y}' = J_{21},$$

因此, 由 $|x^{(1)} - x^{(2)}| = |\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(2)}| \leq 1$ 与上面的不等式及 (3.18)–(3.20) 得

$$\begin{aligned} |(T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x^{(1)}) - (T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x^{(2)})| &\leq J_{16} |x^{(1)} - x^{(2)}| \|g^{(8-2\alpha)}\|_{L^p(E)} \sum_{l=1}^3 [J_{20} \cdot J_{21}]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq J_{22} \|g^{(8-2\alpha)}\|_{L^p(E)} |x^{(1)} - x^{(2)}|^\beta, \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中 $0 < \beta < 1$.

(ii) 当 $|\underline{x}^{(1)}| \geq \frac{1}{2}$, $|\underline{x}^{(2)}| \leq \frac{1}{2}$ 时, 有 $|1 - \underline{y}'\underline{x}^{(2)}| \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{|\underline{x}^{(1)}|} \leq 2$. 由 $lq(1 - \frac{\beta_0}{2}) \leq 3q(1 - \frac{\beta_0}{2}) < 3$ ($l = 1, 2, 3$) 得

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{l_2}(x^{(1)}, x^{(2)}) &\leq 2^{(4-l)q(1-\frac{\beta_0}{2})} \int_{\underline{E}} |1 - \underline{y}'\underline{x}^{(1)}|^{-lq(1-\frac{\beta_0}{2})} d\underline{y}' \\ &= 2^{(4-l)q(1-\frac{\beta_0}{2})} \int_{\underline{E}} \left| (1 - \underline{y}'\underline{x}^{(1)}) \frac{\overline{\underline{x}}^{(1)}}{|\underline{x}^{(1)}|^2} \right|^{-lq(1-\frac{\beta_0}{2})} |\underline{x}^{(1)}|^{-lq(1-\frac{\beta_0}{2})} d\underline{y}' \\ &\leq J_{23} |\underline{x}^{(1)}|^{-lq(1-\frac{\beta_0}{2})} = J_{23} 2^{lq(1-\frac{\beta_0}{2})} \left(\frac{1}{|2\underline{x}^{(1)}|} \right)^{lq(1-\frac{\beta_0}{2})} \\ &\leq J_{23} 2^{lq(1-\frac{\beta_0}{2})} \left(\frac{1}{|2\underline{x}^{(1)}|} \right)^{(1-\frac{\beta_0}{2})q} = J_{23} 2^{(l-1)(1-\frac{\beta_0}{2})q} \left(\frac{1}{|\underline{x}^{(1)}|} \right)^{(1-\frac{\beta_0}{2})q}. \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|\underline{x}^{(1)}|} \right)^{1-\frac{\beta_0}{2}} &= \left(\frac{1}{|\underline{x}^{(1)}|} \right)^\gamma \left(\frac{1}{|\underline{x}^{(1)}|} \right)^{1-\frac{\beta_0}{2}-\gamma} = \left(\frac{1}{|\underline{x}^{(1)}|} \right)^\gamma \left| \frac{\overline{\underline{x}}^{(1)}(\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(2)})}{|\underline{x}^{(1)}|^2 |\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(2)}|^2} \right|^{1-\frac{\beta_0}{2}-\gamma} \\ &\leq J_{24} |\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(2)}|^{\gamma-(1-\frac{\beta_0}{2})}, \end{aligned}$$

其中 $\frac{3}{4} < \frac{3+\alpha}{4} < 1 - \frac{\beta_0}{2} < \frac{5+\alpha}{6} < 1$, $0 < \gamma = \frac{3(1-\alpha)}{4} - \frac{9}{2p} < \frac{3}{4}$, 所以,

$$\tilde{I}_{l_2}(x^{(1)}, x^{(2)}) \leq J_{25} |\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(2)}|^{[\gamma-(1-\frac{\beta_0}{2})]q}. \quad (3.22)$$

因此, 由 (3.18)–(3.20) 与 (3.22) 得

$$\begin{aligned} |(T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x^{(1)}) - (T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x^{(2)})| &\leq J_{26} \|g^{(8-2\alpha)}\|_{L^p(E)} |x^{(1)} - x^{(2)}|^{1+\gamma-(1-\frac{\beta_0}{2})} \\ &= J_{26} \|g^{(8-2\alpha)}\|_{L^p(E)} |x^{(1)} - x^{(2)}|^\beta, \end{aligned}$$

其中 $\beta = 1 - \alpha - \frac{5}{p}$.

(iii) 当 $|\underline{x}^{(1)}| \leq \frac{1}{2}$, $|\underline{x}^{(2)}| \geq \frac{1}{2}$ 时, 类似于情形 (ii) 可证.

(iv) 当 $|\underline{x}^{(1)}| \geq \frac{1}{2}$, $|\underline{x}^{(2)}| \geq \frac{1}{2}$ 时, 有 $\frac{1}{|\underline{x}^{(1)}|} \leq 2$, $\frac{1}{|\underline{x}^{(2)}|} \leq 2$. 又

$$\tilde{I}_{l_2}(x^{(1)}, x^{(2)}) \leq |\underline{x}^{(1)}|^{-lq(1-\frac{\beta_0}{2})} |\underline{x}^{(2)}|^{-(4-l)q(1-\frac{\beta_0}{2})} \int_{\underline{E}} \left| \underline{y}' - \frac{\overline{\underline{x}}^{(1)}}{|\underline{x}^{(1)}|^2} \right|^{-lq(1-\frac{\beta_0}{2})} \left| \underline{y}' - \frac{\overline{\underline{x}}^{(2)}}{|\underline{x}^{(2)}|^2} \right|^{-(4-l)q(1-\frac{\beta_0}{2})} d\underline{y}',$$

设 $\alpha' = lq(1 - \frac{\beta_0}{2})$, $\beta' = (4-l)q(1 - \frac{\beta_0}{2})$ ($l = 1, 2, 3$), 有 $\alpha' < 3$, $\beta' < 3$, $\alpha' + \beta' = 4q(1 - \frac{\beta_0}{2}) > 3$. 由引理 2.1 得

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{l_2}(x^{(1)}, x^{(2)}) &\leq J_{27} |\underline{x}^{(1)}|^{-lq(1-\frac{\beta_0}{2})} |\underline{x}^{(2)}|^{-(4-l)q(1-\frac{\beta_0}{2})} \left| \frac{\overline{\underline{x}}^{(1)}}{|\underline{x}^{(1)}|^2} - \frac{\overline{\underline{x}}^{(2)}}{|\underline{x}^{(2)}|^2} \right|^{3-4q(1-\frac{\beta_0}{2})} \\ &= J_{27} |\underline{x}^{(1)}|^{(4-l)q(1-\frac{\beta_0}{2})-3} |\underline{x}^{(2)}|^{lq(1-\frac{\beta_0}{2})-3} \left(|\underline{x}^{(1)}| \left| \frac{\overline{\underline{x}}^{(1)}}{|\underline{x}^{(1)}|^2} - \frac{\overline{\underline{x}}^{(2)}}{|\underline{x}^{(2)}|^2} \right| |\underline{x}^{(2)}| \right)^{3-4q(1-\frac{\beta_0}{2})} \\ &\leq J_{28} |x^{(1)} - x^{(2)}|^{3-4q(1-\frac{\beta_0}{2})}. \end{aligned}$$

因此, 由 (3.18)–(3.20) 及上面的不等式得

$$|(T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x^{(1)}) - (T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x^{(2)})| \leq J_{29} \|g^{(8-2\alpha)}\|_{L^p(E)} |x^{(1)} - x^{(2)}|^\beta,$$

其中 $\beta = 1 - \alpha - \frac{5}{p}$.

综上可知, 对于任意的 $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^4$, $x^{(1)} \neq x^{(2)}$, 有

$$|(T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x^{(1)}) - (T_{\mathbb{R}^4 \setminus E}[g])(x^{(2)})| \leq M_4(\alpha, q) \|g^{(8-2\alpha)}\|_{L^p(E)} |x^{(1)} - x^{(2)}|^\beta.$$

(3) 类似于定理 3.1, 显然可证.

由定理 3.1 和 3.2 可得下述结论.

推论 3.1 设 E 如上所述, 若 $g \in L^{p, 8-2\alpha}(\mathbb{R}^4)$, $\frac{6}{1-\alpha} < p < +\infty$, $g(x) = O(x_4^\alpha)$, 则

(1) $|(T_{\mathbb{R}^4}[g])(x)| \leq M_5(p, \alpha) \|g\|_{p, 8-2\alpha}$, $x \in \mathbb{R}^4$;

(2) $|(T_{\mathbb{R}^4}[g])(x^{(1)}) - (T_{\mathbb{R}^4}[g])(x^{(2)})| \leq M_6(p, \alpha) \|g\|_{p, 8-2\alpha} |x^{(1)} - x^{(2)}|^\beta$, $0 < \beta = 1 - \alpha - \frac{5}{p} < 1$, $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^4$;

(3) $x_4^\alpha \partial_x (T_{\mathbb{R}^4}[g])(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^4 \setminus \partial E$.

4 一类加权 Dirac 算子的 Riemann 边值问题解的积分表示

本节讨论下述一类加权 Dirac 算子的 Riemann 边值问题.

问题 P 设 E 如上所述, 求加权 Dirac 算子

$$x_4^\alpha \partial_x w = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^4 \setminus \partial E, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.1)$$

的解 $w(x)$, 使其满足下述边界条件:

$$w^+(t) = w^-(t)G + f(t), \quad t \in \partial E, \quad (4.2)$$

其中 $w(t) = w_1(t) + iw_2(t) + jw_3(t) + kw_4(t)$, $w(\infty) = 0$, $w^\pm(t) = \lim_{x \in E^\pm, x \rightarrow t} w(x)$, $E^+ = E$, $E^- = \mathbb{R}^4 \setminus \bar{E}$, $g(x) = O(x_4^\alpha)$, G 是一个四元数常数, G^{-1} 存在, f 在 ∂E 上 Hölder 连续, 其 Hölder 指数为 ν ($0 < \nu < 1$).

定理 4.1 设 E 如上所述, 满足偏微分方程 $\partial_x u = 0$ ($x \in \mathbb{R}^4 \setminus \partial E$, $u(\infty) = 0$) 与边界条件 $u^+(t) = u^-(t)G + f(t)$ ($t \in \partial E$) 的解可表示为

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial E} \frac{\bar{y} - \bar{x}}{|y - x|^4} d\sigma_y f(y), & x \in E^+, \\ \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial E} \frac{\bar{y} - \bar{x}}{|y - x|^4} d\sigma_y f(y) G^{-1}, & x \in E^-. \end{cases}$$

证明 令

$$\varphi(x) = \begin{cases} u(x), & x \in E^+, \\ u(x)G, & x \in E^-. \end{cases}$$

由已知条件知, $\partial_x \varphi(x) = 0$, 并且 $\varphi^+(t) = \varphi^-(t) + f(t)$, $t \in \partial E$.

设 $\psi(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial E} \frac{\bar{y} - \bar{x}}{|y - x|^4} d\sigma_y f(y)$, 则 $\partial_x \psi(x) = 0$. 并且由 Plemelj 公式^[21] 有

$$\psi^+(t) - \psi^-(t) = f(t), \quad t \in \partial E.$$

因此,

$$\varphi^+(t) - \psi^+(t) = \varphi^-(t) - \psi^-(t), \quad t \in \partial E.$$

从而, 由广义 Liouville 定理^[22] 得 $\varphi(x) = \psi(x)$. 因此, 其解可表示为

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial E} \frac{\bar{y} - \bar{x}}{|y - x|^4} d\sigma_y f(y), & x \in E^+, \\ \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial E} \frac{\bar{y} - \bar{x}}{|y - x|^4} d\sigma_y f(y) G^{-1}, & x \in E^-. \end{cases}$$

定理 4.2 设 E 如上所述, 若 $g \in L^{p, 8-2\alpha}(\mathbb{R}^4)$, $\frac{6}{1-\alpha} < p < +\infty$, 则问题 P 的解可表示为

$$w(x) = \Psi(x) + (T_{\mathbb{R}^4}[g])(x),$$

这里 $\partial_x \Psi(x) = 0$, 并且

$$\Psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial E} \frac{\bar{y} - \bar{x}}{|y - x|^4} d\sigma_y \tilde{f}(y), & x \in E^+, \\ \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial E} \frac{\bar{y} - \bar{x}}{|y - x|^4} d\sigma_y \tilde{f}(y) G^{-1}, & x \in E^-, \end{cases}$$

其中 $\tilde{f} = f + T_{\mathbb{R}^4}[g](G - 1)$, $(T_{\mathbb{R}^4}[g])(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{(\bar{y} - \bar{x})g(y)}{|y - x|^4 y_4^\alpha} dy$.

证明 设 $w(x) = \Psi(x) + (T_{\mathbb{R}^4}[g])(x)$, 由推论 3.1 知,

$$x_4^\alpha \partial_x w = x_4^\alpha \partial_x [\Psi(x) + (T_{\mathbb{R}^4}[g])(x)] = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^4 \setminus \partial E,$$

即 $w(x)$ 满足方程 (4.1).

设 $\tilde{f} = f + T_{\mathbb{R}^4}[g](G - 1)$, 则由定理 4.1 知, 满足方程 $\partial_x \Psi(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}^4 \setminus \partial E$) 与边界条件

$$\Psi^+(t) = \Psi^-(t)G + \tilde{f}(t), \quad t \in \partial E \quad (4.3)$$

的解可表示为

$$\Psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial E} \frac{\bar{y} - \bar{x}}{|y - x|^4} d\sigma_y \tilde{f}(y), & x \in E^+, \\ \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial E} \frac{\bar{y} - \bar{x}}{|y - x|^4} d\sigma_y \tilde{f}(y) G^{-1}, & x \in E^-. \end{cases}$$

又由推论 3.1 知, $T_{\mathbb{R}^4}[g]$ 在 $\mathbb{R}^4$ 上 Hölder 连续, 从而, $(T_{\mathbb{R}^4}[g])^+ = (T_{\mathbb{R}^4}[g])^- = T_{\mathbb{R}^4}[g]$. 因此, (4.3) 等价于

$$(\Psi + T_{\mathbb{R}^4}[g])^+(t) = (\Psi + T_{\mathbb{R}^4}[g])^-(t)G + f(t), \quad t \in \partial E,$$

即

$$w^+(t) = w^-(t)G + f(t), \quad t \in \partial E,$$

从而, $w(x)$ 满足边界条件 (4.2). 所以, $w(x) = \Psi(x) + (T_{\mathbb{R}^4}[g])(x)$ 是问题 P 的解. $\square$

致谢 作者非常感谢评审专家提出的宝贵建议.

参考文献

- 1 Athreya S R, Barlow M T, Bass R F, et al. Degenerate stochastic differential equations and super-Markov chains. *Probab Theory Related Fields*, 2002, 123: 484–520
- 2 Epstein C L, Mazzeo R. Analysis of degenerate diffusion operators arising in population biology. In: *From Fourier Analysis and Number Theory to Radon Transforms and Geometry*. New York: Springer, 2013, 203–216

- 3 Keldysh M V. On some cases of degenerate elliptic equations on the boundary of a domain. Dokl Akad Nauk, 1951, 77: 181–183
- 4 Wen G C. Linear and Nonlinear Elliptic Complex Equation. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publisher, 1986
- 5 Wen G C. Recent Progress in Theory and Applications of Modern Complex Analysis. Beijing: Science Press, 2010
- 6 Čanić S, Kim E H. A class of quasilinear degenerate elliptic problems. J Differential Equations, 2003, 189: 71–98
- 7 Taira K. Degenerate elliptic boundary value problems with asymptotically linear nonlinearity. Rend Circ Mat Palermo, 2011, 60: 283–308
- 8 Vekua N. Generalized Analytic Functions. Oxford: Pergamon Press, 1962
- 9 Hile G N. Elliptic systems in the plane with first order terms and constant coefficients. Comm Partial Differential Equations, 1978, 3: 949–977
- 10 Gilbert R P, Hou Z Y, Meng X W. Vekua theory in higher dimensional complex space: The $\bar{\partial}$ -operator in C^n . Complex Var Elliptic Equ, 1993, 21: 99–105
- 11 Gürlebeck K, Sprössig W. Quaternionic Analysis and Clifford Calculus for Physicists and Engineers. Chichester: John Wiley & Sons, 1997
- 12 Yang P W. The Dirichlet boundary value problems for some quaternion functions of higher order on the polydisc (in Chinese). Sci Sin Math, 2011, 41: 485–496
- 13 Wang W. On non-homogeneous Cauchy-Fueter equations and Hartogs' phenomenon in several quaternionic variables. J Geom Phys, 2008, 58: 1203–1210
- 14 Ren G B, Wang H Y. Theory of several paravector variables: Bochner-Martinelli formula and Hartogs theorem. Sci China Math, 2014, 57: 2347–2360
- 15 Du J Y, Xu N, Zhang Z X. Boundary behavior of Cauchy-type integrals in Clifford analysis. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2009, 29: 210–224
- 16 Gong Y F, Leong I T, Qian T. Two integral operators in Clifford analysis. J Math Anal Appl, 2009, 354: 435–444
- 17 Huang S, Qiao Y Y, Wen G C. Real and Complex Clifford Analysis. New York: Springer, 2006
- 18 Wang L P, Qiao Y Y, Yang H J. Some properties of the Teodorescu operator related to the α -Dirac operator. Appl Anal, 2014, 93: 2413–2425
- 19 Qiao Y Y, Xu Y Z, Yang H J. Poincare-Bertrand transformation formula of Cauchy-type singular integrals in Clifford analysis. Complex Var Elliptic Equ, 2012, 57: 197–217
- 20 Gilbert R P, Buchanan J L. First Order Elliptic Systems: A Function Theoretic Approach. Burlington: Elsevier, 1983
- 21 Yang P W. Quaternionic Analysis and Partial Differential Equation. Beijing: Science Press, 2009
- 22 Obolashvili E. Partial Differential Equations in Clifford Analysis. London: CRC Press, 1999

Riemann boundary value problem for a kind of weighted Dirac operator in quaternion analysis

WANG LiPing, YANG HeJu, XIE YongHong & QIAO YuYing

Abstract In this paper, first, a kind of Teodorescu type operator is defined and its boundedness, Hölder continuity and generalized derivatives are discussed; then a kind of Riemann boundary value problem for weighted Dirac operator in $\mathbb{R}^4$ is put forward; finally the solution to the boundary value problem of the weighted Dirac operator is explicitly described using the above Teodorescu type operator.

Keywords quaternion analysis, Teodorescu type operator, weighted Dirac operator, Riemann boundary value problem, integral representation

MSC(2010) 30G30, 35J70

doi: 10.1360/N012015-00148