受边界载荷的大型环形桁架天线结构非线性动力学研究

杨绍武, 张伟*

北京工业大学机电学院, 北京 100124

*联系人, E-mail: sandyzhang0@yahoo.com

收稿日期: 2017-04-06; 接受日期: 2017-06-06; 网络出版日期: 2017-08-20

国家自然科学基金(编号: 11290152, 11427801)资助

摘要 将展开锁定的大型环形天线简化为等效圆柱壳结构, 并考虑前后索网对环形桁架的作用力, 进而研究了其在一种特殊边界条件下呼吸振动的分岔和混沌. 本文考虑热应力的影响, 基于一阶剪切变形理论和von-Karman几何非线性关系, 运用Hamilton原理推导出等效圆柱壳的偏微分形式的运动方程. 并考虑将圆柱壳的一条母线固定, 两端自由的特殊边界条件, 利用Galerkin法将偏微分方程离散为常微分方程. 运用Runge-Kutta法, 对特殊边界条件下的等效圆柱壳进行数值仿真, 获得系统的分岔图、最大Lyapunov指数曲线、三维分岔图、时间历程图、相图和庞加莱截面. 研究了作用在等效圆柱壳两端上的径向线载荷和面内载荷对系统振动行为的影响.

关键词 环形天线, 圆柱壳, 边界条件, 边界载荷, 非线性动力学

PACS: 05.45.-a, 46.40.-f, 46.70.De

1 引言

随着航天技术的迅速发展, 对于未来新型卫星天线的要求也不断地提高. 大口径, 高精度, 低质量, 高强度已经成为大型卫星天线设计的必然趋势, 同时它又面临航天器运载空间及运载能力的限制. 环形桁架可展开结构具有应用空间大、结构形式简明的特点. 在一定范围内口径增大, 质量并没有成比例增加, 且并不会改变结构形式, 是目前大型卫星天线较为理想的结构形式. 目前环形桁架结构展开锁定后的尺度可达30–50 m量级, 但要求具有1 mm量级精度, 必须有效

控制结构的变形和振动; 结构的重量轻、柔性大、阻尼小、间隙多, 易产生复杂的、包含多模态的非线性低频振动, 且一旦发生则衰减很慢, 主动抑制也很困难^[1]. 因此, 对环形桁架可展开结构在太空条件下振动的理论研究是十分迫切和重要的, 能够为实践提供理论基础.

大型卫星天线结构技术研究越来越受到人们的重视, 许多国家和航天科研单位都在卫星天线结构技术领域进行着激烈的竞争. 1990年, Miura和Miyazaki^[2]提出了张力桁架天线的概念. 张力桁架天线可以很容易地展开部署以及伸缩, 而且天线反射面大小和几何

引用格式: 杨绍武, 张伟. 受边界载荷的大型环形桁架天线结构非线性动力学研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, 47: 104607
Yang S W, Zhang W. Nonlinear dynamics of large circular annular truss antenna structures subjected to boundary loads (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2017, 47: 104607, doi: [10.1360/SSPMA2017-00101](https://doi.org/10.1360/SSPMA2017-00101)

曲度也容易达成. 2002年, Tibert^[3]在他的博士论文中系统地阐述了环形桁架展开天线工作的基本原理以及设计天线结构的关键步骤. 2007年, Jones等人^[4]提出当下缺乏对于天线建模理论健壮性的研究, 这会导致分析错误并且浪费时间. 随后他系统地阐述了天线结构的静态和动态力学特性, 并且解释了有限元软件能够描述动力学行为. 2010年, Misawa^[5]指出在对大型空间天线进行模态测试时所遇到的困难, 并在此基础上提出了分部模态分析法针对此类问题的有效性, 它能够有效地描述大组件结构中部分组件的动力学特性. 2012年, Du等人^[6]使用节点位移法对弦结构反射面结构进行了动力学分析. 2012年, Li^[7]为预测环形桁架可展天线的展开运动, 进行了天线展开的动态分析和控制方法的研究. 2012年, Morterolle等人^[8]提出了一种新方法来计算可展桁架天线结构以及反射面结构中束张力. 2013年, Santiago-Prowald等人^[9]回顾了大型空间可展航天器结构的最新进展. 2014年, 刘丽坤等人^[10]对大型网状可展开天线的特点及其对卫星动力学与控制的影响进行介绍, 然后对大型网状可展开天线带来的动力学与控制相关问题进展进行了综述. 2016年, 刘福寿等人^[11]提出采用不计剪切变形和转动惯量的等效圆环模型分析环形桁架结构的径向振动, 并对等效圆环模型的偏微分运动方程进行了解析求解.

圆柱壳结构在航空航天以及机械工程结构中被广泛使用. 对圆柱壳的理论研究已经开展了百余年, 相关的基础理论已经较为成熟. 目前对于圆柱壳研究的热点主要是在新型材料和特殊工况上. 2010年, Amabili等人^[12]分别采用5种不同的非线性壳体理论对频率在基频附近的简谐力作用下的两端简支圆柱壳的大幅振动响应进行了计算和比较. 2012年, Shen等人^[13]运用多尺度法, 分析了热环境下单层碳纳米管增强复合材料圆柱壳的大幅振动. 2013年, Hao等人^[14,15]研究了在受到径向载荷和热载荷联合作用下功能梯度圆柱壳的非线性动力学特性. 2013年, Song等人^[16]对在超音速气流中的带有压电片的复合层压板的颤振边界进行了主动的气弹颤振分析和振动控制研究. 2013年, Du等人^[17]研究了两端简支FGM圆柱壳模态相互作用下, 运用多尺度分析方法, 得到1:2内共振下的极坐标和笛卡尔坐标下的平均方程, 研究了内共振响应. 2015年, Liu等人^[18]研究了在受到复杂载荷共同作用时, 得出不同缺陷类型会对简支边界FGM圆柱壳非线性动

力学行为产生的不同影响. 在以上的研究中, 绝大多数国内外学者对圆柱壳的动力学行为的研究集中在简支边界, 少数人研究了两端固支的边界条件. 而面向工程的特殊边界条件, 当前的文献中几乎没有涉及.

2 力学模型

环形桁架可展开天线结构由5部分组成: 前索网、金属反射网、拉索、可展开环形桁架、后索网. 本文根据Zhang等人^[19]的研究, 并考虑前后索网对环形桁架的作用力, 将展开锁定后的环形桁架结构简化为受到边界线载荷的圆柱壳结构, 进而研究圆柱壳在一种特殊边界条件下的非线性动力学行为. 以图1所示的等效圆柱壳为研究对象, 圆柱壳中面半径为 R , 轴向长度为 L , 沿径向壳的厚度为 h . 曲线坐标位于壳体的中面, 等效圆柱壳内任一点的位移 u, v, w 分别沿 x, θ, z 方向. 考虑固定圆柱壳其中一条母线, 两端自由的特殊边界条件. 假定大型环形天线结构处于一个均布的热环境中, 并且受到边界上的一个径向的线载荷和一个面内载荷的共同作用.

根据一阶剪切变形理论^[20], 等效圆柱壳上任意一点的位移分别为

$$u(x, \theta, z) = u_0(x, \theta) + z\varphi_x(x, \theta), \quad (1a)$$

$$v(x, \theta, z) = v_0(x, \theta) + z\varphi_\theta(x, \theta), \quad (1b)$$

$$w(x, \theta, z) = w_0(x, \theta), \quad (1c)$$

其中, u_0, v_0, w_0 为中面上任意一点分别沿 x, θ, z 方向的位移, φ_x 和 φ_θ 分别为绕 θ 和 x 轴的转角. 根据von-Karman几何非线性关系, 可以得到法向应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$ 和剪切

图1 等效圆柱壳模型

Figure 1 The model of equivalent circular cylindrical shell.

应变分量 γ_{xz} , $\gamma_{\theta z}$, $\gamma_{x\theta}$ 分别为

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_\theta^{(0)} \\ \gamma_{x\theta}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} \\ \varepsilon_\theta^{(1)} \\ \gamma_{x\theta}^{(1)} \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v_0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_\theta^{(0)} \\ \gamma_{x\theta}^{(0)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w_0 + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)^2 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} \\ \varepsilon_\theta^{(1)} \\ \gamma_{x\theta}^{(1)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

在考虑温度影响的情况下, 等效圆柱壳的本构关系为

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_\theta \\ 2\alpha_{x\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中, σ_x , σ_θ , $\sigma_{x\theta}$, $\sigma_{\theta z}$ 和 σ_{xz} 表示法向和剪切应力, 式中各等效刚度 $\bar{Q}_{ij}$ 表示如下^[19]:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{12} &= \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad \bar{Q}_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad \bar{Q}_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \\ \bar{Q}_{66} &= G_{12}, \quad \bar{Q}_{44} = G_{23}, \quad \bar{Q}_{55} = G_{13}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中, E_1 , E_2 , ν_{12} , ν_{21} 为等效圆柱壳的杨氏模量和泊松比. ΔT 是圆柱壳内外表面的温差, 热膨胀系数可以由下式获得

$$\begin{aligned} \alpha_{xx} &= \alpha_1 \cos^2 \beta + \alpha_2 \sin^2 \beta, \\ \alpha_{\theta\theta} &= \alpha_1 \sin^2 \beta + \alpha_2 \cos^2 \beta, \\ \alpha_{x\theta} &= (\alpha_1 - \alpha_2) \sin \beta \cos \beta. \end{aligned} \quad (6)$$

利用Hamilton原理, 考虑等效圆柱壳受到热载荷、边界处的径向线激励 f 和面内载荷 $p_0 + p_1 \cos(\Omega_2 t)$ 耦合作用下, 建立等效圆柱壳的非线性动力学方程为

$$N_{xx,x} + \frac{1}{R} N_{x\theta,\theta} = I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{\varphi}_x, \quad (7a)$$

$$N_{x\theta,x} + \frac{1}{R} N_{\theta\theta,\theta} + \frac{1}{R} Q_\theta = I_0 \ddot{v}_0 + I_1 \ddot{\varphi}_\theta, \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} N_{xx,x} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R} N_{x\theta,\theta} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ + \frac{2}{R^2} N_{x\theta,\theta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} N_{xy,x} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_{\theta\theta} \\ + \frac{1}{R^2} N_{\theta\theta,\theta} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} N_{\theta\theta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + Q_{x,x} \\ + \frac{1}{R} Q_{\theta,\theta} + f - \gamma \dot{w}_0 = I_0 \ddot{w}_0, \end{aligned} \quad (7c)$$

$$M_{xx,x} + \frac{1}{R} M_{x\theta,\theta} - Q_x = I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\varphi}_x, \quad (7d)$$

$$M_{x\theta,x} + \frac{1}{R} M_{\theta\theta,\theta} - Q_\theta = I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{\varphi}_\theta, \quad (7e)$$

式中, γ 表示阻尼系数, K 表示剪切修正系数, “.”表示对时间的一阶导数, “..”表示对时间的二阶导数, 径向线激励 f 可以表示为

$$f = F \cos(\Omega_2 t) \delta(x - a), \quad a = 0, L. \quad (8)$$

各合力可以表示为

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{[A], [B]\} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{(0)} \\ \varepsilon^{(1)} \end{Bmatrix} dz + \begin{Bmatrix} N_{xx}^T \\ N_{\theta\theta}^T \\ N_{x\theta}^T \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{[B], [D]\} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{(0)} \\ \varepsilon^{(1)} \end{Bmatrix} dz + \begin{Bmatrix} M_{xx}^T \\ M_{\theta\theta}^T \\ M_{x\theta}^T \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = K \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [A] \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} dz, \quad (10)$$

其中各刚度矩阵表达如下:

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(1, z, z^2) dz, i, j = 1, 2, 6, \\ A_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} dz, i, j = 4, 5. \end{aligned} \quad (11)$$

各阶惯性量为

$$I_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^i \rho dz, i = 0, 1, 2, \quad (12)$$

热应力的合力为

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx}^T \\ N_{\theta\theta}^T \\ N_{x\theta}^T \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_\theta \\ \alpha_{x\theta} \end{Bmatrix} \Delta T dz, \\ \begin{Bmatrix} M_{xx}^T \\ M_{\theta\theta}^T \\ M_{x\theta}^T \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_\theta \\ \alpha_{x\theta} \end{Bmatrix} \Delta T z dz. \end{aligned} \quad (13)$$

本文研究考虑固定其中一条母线, 两端自由的特殊边界条件下的圆柱壳, 位移和力边界条件为

$$\begin{aligned} \theta = 0 \text{ 和 } \theta = 2\pi, \\ u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_x = \varphi_y = 0, \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ 和 } x = L, \\ N_{xx} = N_{x\theta} = M_{xx} = M_{x\theta} = Q_x = 0, \end{aligned} \quad (14b)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} N_{xx} \Big|_{x=0, L} R d\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [p_0 + p_1 \cos(\Omega_2 t)] R d\theta. \quad (14c)$$

对于环形天线, 呼吸振动为其主要振动形式. 因此, 在满足边界条件的前提下, 将等效圆柱壳运动方程在 w 方向进行二阶离散, 横向位移 w_0 和横向激励 F 可以表示为如下形式:

$$w_0 = w_1(t)X_1(x)Y_1(\theta) + w_2(t)X_2(x)Y_2(\theta), \quad (15)$$

$$F = F_1 X_1(x)Y_1(\theta) + F_2 X_2(x)Y_2(\theta), \quad (16)$$

式中, $X_i, Y_i (i, j = 1, 2)$ 具体表达式如下:

$$X_i(x) = \sin \frac{\lambda_i x}{L} + \sinh \frac{\lambda_i x}{L} - \alpha_i \left(\cosh \frac{\lambda_i x}{L} + \cos \frac{\lambda_i x}{L} \right), \quad (17a)$$

$$Y_j(\theta) = \sin \frac{\mu_j \theta}{2\pi} - \sinh \frac{\mu_j \theta}{2\pi} + \beta_j \left(\cosh \frac{\mu_j \theta}{2\pi} - \cos \frac{\mu_j \theta}{2\pi} \right), \quad (17b)$$

其中系数 $\lambda_i, \mu_i (i, j = 1, 2)$ 由下方程求解得到

$$\begin{aligned} \cos \lambda_i L \cdot \cosh \lambda_i L - 1 &= 0, \\ \cos \mu_j 2\pi \cdot \cosh \mu_j 2\pi - 1 &= 0, \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\alpha_i = \frac{\sinh \lambda_i L + \sin \lambda_i L}{\cosh \lambda_i L + \cos \lambda_i L}, \beta_j = \frac{\sinh \mu_j 2\pi + \sin \mu_j 2\pi}{\cosh \mu_j 2\pi + \cos \mu_j 2\pi}, \quad (18b)$$

式(15)中 $w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 分别表示系统第一阶和第二阶模态的振动幅值. 基于 Noseir 和 Reddy 的研究^[21], 面内和旋转方向的惯性项相对于半径方向的惯性项非常小. 所以, 为了计算简便, 可以忽略方程(7)中的面内和旋转方向的惯性项. 运用 Galerkin 法, 可以得到等效圆柱壳关于横向运动的两自由度非线性动力学方程为

$$\begin{aligned} \ddot{w}_1 + \mu_1 \dot{w}_1 + \omega_1^2 w_1 + m_2 w_1^2 + m_3 w_1 w_2 + m_4 w_2^2 \\ + m_5 w_1^3 + m_6 w_1^2 w_2 + m_7 w_1 w_2^2 + m_8 w_2^3 \\ + m_9 w_1 (p_1 \cos \Omega_2 t) = m_{10} F_1 \cos \Omega_1 t, \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w}_2 + \mu_2 \dot{w}_2 + \omega_2^2 w_2 + n_2 w_1^2 + n_3 w_1 w_2 + n_4 w_2^2 \\ + n_5 w_1^3 + n_6 w_1^2 w_2 + n_7 w_1 w_2^2 + n_8 w_2^3 \\ + n_9 w_2 (p_1 \cos \Omega_2 t) = n_{10} F_2 \cos \Omega_1 t, \end{aligned} \quad (19b)$$

其中, $m_1 + m_9 p_0 = \omega_1^2, n_1 + n_9 p_0 = \omega_2^2$, 并对上述方程进行无量纲化, 引入如下参数:

$$\begin{aligned} \tau &= \omega_1 t, w_1 = q_1 h, w_2 = q_2 h, \\ \bar{\Omega}_1 &= \Omega_1 / \omega_1, \bar{\Omega}_2 = \Omega_2 / \omega_1, \\ \bar{\mu}_1 &= \frac{\mu_1}{\omega_1}, \bar{\mu}_2 = \frac{\mu_2}{\omega_1}, \\ \bar{\omega}_1 &= \frac{\omega_1}{\omega_1}, \bar{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \bar{p}_1 = \frac{p_1}{\omega_1^2}, \\ \bar{F}_1 &= \frac{m_{10} F_1}{\omega_1^2 h}, \bar{F}_2 = \frac{n_{10} F_2}{\omega_1^2 h}, \\ \bar{m}_i &= \frac{m_i h}{\omega_1^2}, \bar{n}_i = \frac{n_i h}{\omega_1^2}, i = 2, 3, 4, \\ \bar{m}_j &= \frac{m_j h^2}{\omega_1^2}, \bar{n}_j = \frac{n_j h^2}{\omega_1^2}, j = 5, 6, 7, 8, \end{aligned} \quad (20)$$

得到系统无量纲化的非线性动力学方程.

$$\begin{aligned} q''_1 + \bar{\mu}_1 q'_1 + \bar{\omega}_1^2 q_1 + \bar{m}_2 q_1^2 + \bar{m}_3 q_1 q_2 + \bar{m}_4 q_2^2 \\ + \bar{m}_5 q_1^3 + \bar{m}_6 q_1^2 q_2 + \bar{m}_7 q_1 q_2^2 + \bar{m}_8 q_2^3 \\ + \bar{m}_9 \bar{p}_1 q_1 \cos \bar{\Omega}_2 \tau = \bar{F}_1 \cos \bar{\Omega}_1 \tau, \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} q''_2 + \bar{\mu}_2 q'_2 + \bar{\omega}_2^2 q_2 + \bar{n}_2 q_1^2 + \bar{n}_3 q_1 q_2 + \bar{n}_4 q_2^2 \\ + \bar{n}_5 q_1^3 + \bar{n}_6 q_1^2 q_2 + \bar{n}_7 q_1 q_2^2 + \bar{n}_8 q_2^3 \\ + \bar{n}_9 \bar{p}_2 q_2 \cos \bar{\Omega}_2 \tau = \bar{F}_2 \cos \bar{\Omega}_1 \tau, \end{aligned} \quad (21b)$$

式中, “'”表示对 τ 的一阶导数, “''”表示对 τ 的二阶导数.

3 系统振动响应数值研究

在此运用Runge-Kutta法对上述常微分方程进行数值仿真. 考虑等效圆柱壳的母线长度为 $L = 2 \text{ m}$, 厚度为 $h = 0.02 \text{ m}$, 中面上的半径为 $R = 15 \text{ m}$. 等效圆柱壳的材料属性选择为: 杨氏模量 $E_1 = 140 \times 10^3$, $E_2 = 10 \times 10^3 \text{ MPa}$, 泊松比 $\nu_{12} = 0.3$, 剪切模量 $G_{12} = 7 \times 10^3$, $G_{13} = 7 \times 10^3$, $G_{23} = 7 \times 10^3$, 热膨胀系数 $\alpha_1 = -0.3 \times 10^{-6} \text{ m/K}$, $\alpha_2 = 28 \times 10^{-6} \text{ m/K}$. 给定横向线载荷频率 $\Omega_1 = 100 \text{ Hz}$, 面内载荷频率 $\Omega_2 = 100 \text{ Hz}$, 阻尼系数 $\gamma = 95.2 \text{ N s/m}$, 研究面内载荷幅值变化和径向线载荷幅值变化对系统振动响应的影响.

3.1 径向线载荷的影响

图2为固定等效圆柱壳的面内载荷, 系统的两阶模态随径向线载荷幅值 $\bar{F}_1$ 变化的分岔图、最大李雅普诺夫指数曲线和三维分岔图. 其中图2(a)和(b)分别表示径向线载荷幅值从2500–6500的一阶模态和二阶模态分岔图, 图2(d)为一阶模态的三维分岔图, 图2(c)为随径向线载荷幅值变化的最大李雅普诺夫指数曲线. 当最大李雅普诺夫指数小于零时, 系统处于周期运动; 当最大李雅普诺夫指数大于零时, 系统处于混沌运动. 由图可知, 当 $\bar{F}_1 \in (2500, 3732)$ 时, 系统出现周期运动; 当 $\bar{F}_1 \in (3732, 4039)$ 时, 系统出现混沌运动; 当 $\bar{F}_1 \in (4039, 4092)$ 时, 系统出现周期运动; 当 $\bar{F}_1 \in (4092, 6000)$ 时, 系统出现混沌运动. 系统呈现出周期运动和混沌运动交替出现的复杂非线性现象, 径向线载荷对等效圆柱壳的运动形态有很大影响.

图3–6是固定等效圆柱壳的面内载荷时, 系统在不同径向线载荷作用下的动力响应曲线. 其中图(a)表示一阶模态的时间历程图; 图(b)表示平面 (q_1, q'_1) 上的相图; 图(c)表示平面 (q_1, q'_1) 上的庞加莱截面; 图(d)表示二阶模态的时间历程图; 图(e)表示平面 (q_2, q'_2) 上的相图; 图(f)表示空间 (q_1, q'_1, q_2) 上的三维相图. 图3和5为系统分别在 $\bar{F}_1 = 3000$ 和 $\bar{F}_1 = 4100$ 时的周期运动响应结果, 系统一阶模态振幅大于二阶模态. 对比两组结

图2 (网络版彩图)随径向线载荷幅值 $\bar{F}_1$ 变化的分岔图、最大李雅普诺夫指数曲线和三维分岔图. (a) 一阶模态分岔图; (b) 一阶模态和二阶模态分岔图; (c) 最大李雅普诺夫指数曲线; (d) 一阶模态的三维分岔图

Figure 2 (Color online) The bifurcation diagram, maximum lyapunov exponent diagram and three-dimensional bifurcation diagram for the radial line load $\bar{F}_1$. (a) The bifurcation diagram of the first mode; (b) the bifurcation diagram of the second mode; (c) the maximum Lyapunov exponent diagram; (d) the three-dimensional bifurcation diagram of the first mode.

图 3 (网络版彩图) 径向线载荷幅值 $\bar{F}_1 = 3000$ 时, 系统做周期运动. (a) 一阶模态的时间历程图; (b) 平面 (q_1, q_1') 上的相图; (c) 平面 (q_1, q_1') 上的庞加莱截面; (d) 二阶模态的时间历程图; (e) 平面 (q_2, q_2') 上的相图; (f) 空间 (q_1, q_1', q_2) 上的三维相图

Figure 3 (Color online) Chaotic motion of the system when $\bar{F}_1 = 3000$. (a) The time history diagram of the first mode; (b) the phase portrait on plane (q_1, q_1') ; (c) Poincaré surface of section on plane (q_1, q_1') ; (d) the time history diagram of the second mode; (e) the phase portrait on plane (q_2, q_2') ; (f) the three-dimensional phase portrait in space (q_1, q_1', q_2) .

图 4 (网络版彩图) 径向线载荷幅值 $\bar{F}_1 = 4000$ 时, 系统做混沌运动. (a) 一阶模态的时间历程图; (b) 平面 (q_1, q_1') 上的相图; (c) 平面 (q_1, q_1') 上的庞加莱截面; (d) 二阶模态的时间历程图; (e) 平面 (q_2, q_2') 上的相图; (f) 空间 (q_1, q_1', q_2) 上的三维相图

Figure 4 (Color online) Chaotic motion of the system when $\bar{F}_1 = 4000$. (a) The time history diagram of the first mode; (b) the phase portrait on plane (q_1, q_1') ; (c) Poincaré surface of section on plane (q_1, q_1') ; (d) the time history diagram of the second mode; (e) the phase portrait on plane (q_2, q_2') ; (f) the three-dimensional phase portrait in space (q_1, q_1', q_2) .

果可知, 随着径向线载荷的增大, 系统两阶模态的振幅和速度都有所增加. 图4和6为系统分别在 $\bar{F}_1 = 4000$ 和 $\bar{F}_1 = 6100$ 时的混沌运动响应结果.

3.2 面内载荷的影响

图7为固定等效圆柱壳的横向线载荷, 系统

的两阶模态随面内载荷幅值 $\bar{p}_1$ 变化的分岔图、最大李雅普诺夫指数曲线和三维分岔图. 由图可知, 当 $\bar{p}_1 \in (200, 341)$ 时, 系统的最大李雅普诺夫指数为负数, 出现周期运动; 当 $\bar{p}_1 \in (341, 397)$ 时, 系统的最大李雅普诺夫指数为正数, 出现混沌运动; 当 $\bar{p}_1 \in (397, 403)$ 时, 系统的最大李雅普诺夫指数为负

图 5 (网络版彩图) 径向线载荷幅值 $\bar{F}_1 = 4100$ 时, 系统做周期运动. (a) 一阶模态的时间历程图; (b) 平面 (q_1, q_1') 上的相图; (c) 平面 (q_1, q_1') 上的庞加莱截面; (d) 二阶模态的时间历程图; (e) 平面 (q_2, q_2') 上的相图; (f) 空间 (q_1, q_1', q_2) 上的三维相图

Figure 5 (Color online) Chaotic motion of the system when $\bar{F}_1 = 4100$. (a) The time history diagram of the first mode; (b) the phase portrait on plane (q_1, q_1') ; (c) Poincaré surface of section on plane (q_1, q_1') ; (d) the time history diagram of the second mode; (e) the phase portrait on plane (q_2, q_2') ; (f) the three-dimensional phase portrait in space (q_1, q_1', q_2) .

图 6 (网络版彩图) 径向线载荷幅值 $\bar{F}_1 = 6000$ 时, 系统做混沌运动. (a) 一阶模态的时间历程图; (b) 平面 (q_1, q_1') 上的相图; (c) 平面 (q_1, q_1') 上的庞加莱截面; (d) 二阶模态的时间历程图; (e) 平面 (q_2, q_2') 上的相图; (f) 空间 (q_1, q_1', q_2) 上的三维相图

Figure 6 (Color online) Chaotic motion of the system when $\bar{F}_1 = 6000$. (a) The time history diagram of the first mode; (b) the phase portrait on plane (q_1, q_1') ; (c) Poincaré surface of section on plane (q_1, q_1') ; (d) the time history diagram of the second mode; (e) the phase portrait on plane (q_2, q_2') ; (f) the three-dimensional phase portrait in space (q_1, q_1', q_2) .

数, 出现周期运动; 当 $\bar{p}_1 \in (403, 450)$ 时, 系统的最大李雅普诺夫指数为正数, 出现混沌运动. 随面内载荷幅值的变化, 系统产生周期运动和混沌运动交替出现的现象. 对比图2和7可以看出, 相对于径向线载荷, 更小的面内载荷即可使系统产生复杂的非线性现象, 系统的运动对面内载荷的变化更加敏感.

图8–11是固定等效圆柱壳的径向线载荷时, 系统在不同面内载荷作用下的动力响应曲线. 图8和10为系统分别为面内载荷为 $\bar{p}_1 = 220$ 和 $\bar{p}_1 = 400$ 时周期运动的动力响应曲线. 图9和11为系统分别在 $\bar{p}_1 = 390$ 和 $\bar{p}_1 = 450$ 时的混沌运动响应结果.

图7 (网络版彩图)随面内载荷幅值 $\bar{p}_1$ 变化的分岔图、最大李雅普诺夫指数曲线和三维分岔图. (a) 一阶模态分岔图; (b) 一阶模态和二阶模态分岔图; (c) 最大李雅普诺夫指数曲线; (d) 一阶模态的三维分岔图

Figure 7 (Color online) The bifurcation diagram, maximum lyapunov exponent diagram and three-dimensional bifurcation diagram for the in-plane load $\bar{p}_1$. (a) The bifurcation diagram of the first mode; (b) the bifurcation diagram of the second mode; (c) the maximum Lyapunov exponent diagram; (d) the three-dimensional bifurcation diagram of the first mode.

图8 (网络版彩图)面内载荷幅值 $\bar{p}_1 = 220$ 时, 系统做周期运动. (a) 一阶模态的时间历程图; (b) 平面 (q_1, q_1') 上的相图; (c) 平面 (q_1, q_1') 上的庞加莱截面; (d) 二阶模态的时间历程图; (e) 平面 (q_2, q_2') 上的相图; (f) 空间 (q_1, q_1', q_2) 上的三维相图

Figure 8 (Color online) Period motion of the system when $\bar{p}_1 = 220$. (a) The time history diagram of the first mode; (b) the phase portrait on plane (q_1, q_1') ; (c) Poincaré surface of section on plane (q_1, q_1') ; (d) the time history diagram of the second mode; (e) the phase portrait on plane (q_2, q_2') ; (f) the three-dimensional phase portrait in space (q_1, q_1', q_2) .

4 结论

本文将一个展开的大型环形天线结构简化为一个受到边界线载荷的圆柱壳结构, 进而研究了等效圆柱壳在一种特殊边界条件下的非线性动力学行为. 假

定大型环形天线结构处于一个均布的热环境中, 并且受到边界上的一个径向的线载荷和一个面内载荷的共同作用. 基于一阶剪切变形理论和von-Karman几何非线性关系, 运用Hamilton原理推导出圆柱壳的非线

图 9 (网络版彩图)面内载荷幅值 $\overline{P}_1 = 390$ 时, 系统做混沌运动. (a) 一阶模态的时间历程图; (b) 平面 (q_1, q_1') 上的相图; (c) 平面 (q_1, q_1') 上的庞加莱截面; (d) 二阶模态的时间历程图; (e) 平面 (q_2, q_2') 上的相图; (f) 空间 (q_1, q_1', q_2) 上的三维相图

Figure 9 (Color online) Chaotic motion of the system when $\overline{P}_1 = 390$. (a) The time history diagram of the first mode; (b) the phase portrait on plane (q_1, q_1') ; (c) Poincaré surface of section on plane (q_1, q_1') ; (d) the time history diagram of the second mode; (e) the phase portrait on plane (q_2, q_2') ; (f) the three-dimensional phase portrait in space (q_1, q_1', q_2) .

图 10 (网络版彩图)面内载荷幅值 $\overline{P}_1 = 400$ 时, 系统做周期运动. (a) 一阶模态的时间历程图; (b) 平面 (q_1, q_1') 上的相图; (c) 平面 (q_1, q_1') 上的庞加莱截面; (d) 二阶模态的时间历程图; (e) 平面 (q_2, q_2') 上的相图; (f) 空间 (q_1, q_1', q_2) 上的三维相图

Figure 10 (Color online) Period motion of the system when $\overline{P}_1 = 400$. (a) The time history diagram of the first mode; (b) the phase portrait on plane (q_1, q_1') ; (c) Poincaré surface of section on plane (q_1, q_1') ; (d) the time history diagram of the second mode; (e) the phase portrait on plane (q_2, q_2') ; (f) the three-dimensional phase portrait in space (q_1, q_1', q_2) .

性动力学方程. 考虑将圆柱壳的一条母线固定, 两端自由的特殊边界条件. 采用梁函数组合的方法, 选取恰当的模态函数, 利用Galerkin法对上述方程进行二阶截断, 得到常微分形式的非线性动力学方程. 运用

Runge-Kutta法进行数值仿真, 获得了系统的时间历程图、相图、分岔图和最大李雅普诺夫指数曲线. 研究了边界上线载荷和面内载荷对系统振动响应的影响. 可以得出如下结论.

图 11 (网络版彩图)面内载荷幅值 $p_1 = 450$ 时, 系统做混沌运动. (a) 一阶模态的时间历程图; (b) 平面 (q_1, q_1') 上的相图; (c) 平面 (q_1, q_1') 上的庞加莱截面; (d) 二阶模态的时间历程图; (e) 平面 (q_2, q_2') 上的相图; (f) 空间 (q_1, q_1', q_2) 上的三维相图

Figure 11 (Color online) Chaotic motion of the system when $p_1 = 450$. (a) The time history diagram of the first mode; (b) the phase portrait on plane (q_1, q_1') ; (c) Poincaré surface of section on plane (q_1, q_1') ; (d) the time history diagram of the second mode; (e) the phase portrait on plane (q_2, q_2') ; (f) the three-dimensional phase portrait in space (q_1, q_1', q_2) .

(1) 径向线载荷和面内载荷的变化, 均可以使系统产生周期运动与混沌运动交替的复杂非线性现象.

(2) 系统一阶模态振幅大于二阶模态振幅, 两阶模

态的振幅和速度均随径向线载荷或面内载荷的增加而增加.

(3) 相对于径向线载荷, 系统的运动对面内载荷的变化更加敏感.

参考文献

- Hu H Y, Tian Q, Zhang W. Nonlinear dynamics and control of large deployable space structures composed of trusses and meshes (in Chinese). *Adv Mech*, 2013, 43: 390–414 [胡海岩, 田强, 张伟. 大型网架式可展开空间结构的非线性动力学与控制. *力学进展*, 2013, 43: 390–414]
- Miura K, Miyazaki Y. Concept of the tension truss antenna. *AIAA J*, 1990, 28: 1098–1104
- Tibert G. Deployment Tensegrity Structure for Space Applications. Dissertation for Doctoral Degree. Stockholm: Royal Institute of Technology, 2002
- Jones T C, Bart-Smith H, Mikulas M M, et al. Finite Element modeling and analysis of large pretensioned space structures. *J Spacecraft Rockets*, 2007, 44: 183–193
- Misawa M. Component modal tests with additional mass and stiffness. *AIAA J*, 2010, 48: 1840–1847
- Du J, Bao H, Yang D, et al. Initial equilibrium configuration determination and shape adjustment of cable network structures. *Mech Based Des Struct Machines*, 2012, 40: 277–291
- Li T. Deployment analysis and control of deployable space antenna. *Aerospace Sci Tech*, 2012, 18: 42–47
- Mortierolle S, Maurin B, Quirant J, et al. Numerical form-finding of geotensoid tension truss for mesh reflector. *Acta Astron*, 2012, 76: 154–163
- Santiago-Prowald J, Baier H. Advances in deployable structures and surfaces for large apertures in space. *CEAS Space J*, 2013, 5: 89–115
- Liu L K, Zhou Z C, Zheng G T. Advance of dynamics and control of the satellite with large mesh deployable antenna (in Chinese). *Chin Space Sci Technol*, 2014, 34: 1–12 [刘丽坤, 周志成, 郑钢铁. 大型网状可展开天线的动力学与控制研究进展. *中国空间科学技术*, 2014, 34: 1–12]
- Liu F S, Jin D P. Equivalent circular ring model for the radial vibration analysis of hoop truss structures (in Chinese). *Chin J Theor Appl Mech*, 2016, 48: 1184–1191 [刘福寿, 金栋平. 环形桁架结构径向振动的等效圆环模型. *力学学报*, 2016, 48: 1184–1191]
- Amabili M, Reddy J N. A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells. *Int J Non-Linear Mech*, 2010, 45: 409–418
- Shen H S, Xiang Y. Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments. *Comp Methods Appl Mech Eng*, 2012, 213–216: 196–205

- 14 Hao Y X, Zhang W, Yang J. Nonlinear dynamics of cantilever FGM cylindrical shell under 1:2 internal resonance relations. [Mech Adv Mater Struct](#), 2013, 20: 819–833
- 15 Hao Y X, Zhang W, Yang L, et al. Dynamic response of cantilever FGM cylindrical shell. [AMM](#), 2011, 130-134: 3986–3993
- 16 Song Z G, Li F M. Aerothermoelastic analysis and active flutter control of supersonic composite laminated cylindrical shells. [Composite Struct](#), 2013, 106: 653–660
- 17 Du C, Li Y. Nonlinear resonance behavior of functionally graded cylindrical shells in thermal environments. [Composite Struct](#), 2013, 102: 164–174
- 18 Liu Y Z, Hao Y X, Zhang W, et al. Nonlinear dynamics of initially imperfect functionally graded circular cylindrical shell under complex loads. [J Sound Vib](#), 2015, 348: 294–328
- 19 Zhang W, Chen J, Sun Y. Nonlinear breathing vibrations and chaos of a circular truss antenna with 1:2 internal resonance. [Int J Bifurcation Chaos](#), 2016, 26: 1650077
- 20 Reddy J N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. New York: CRC Press, 2004
- 21 Nosier A, Reddy J N. A study of non-linear dynamic equations of higher-order shear deformation plate theories. [Int J Non-Linear Mech](#), 1991, 26: 233–249

Nonlinear dynamics of large circular annular truss antenna structures subjected to boundary loads

YANG ShaoWu & ZHANG Wei*

College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China

This paper investigates the bifurcation and chaos in breathing vibration of a circular truss antenna that has expanded subjected to heating load. The circular antenna is reducing to a continuum circular cylindrical shell, and considering the loads that come from cable net structure. By using the first order shear deformation theory, geometrical non-linearity strain-displacement relationship and Hamilton's principle, the nonlinear partial differential equilibrium equation of the system are deduced. Galerkin method is utilized to obtain the nonlinear ordinary differential governing equations of the cylindrical shell under the specific boundary conditions that one generatrix of the cylindrical shell is clamped and both ends of the shell are free. Using Runge-Kutta method for numerical simulation of equivalent cylindrical shell under special boundary condition, the bifurcation diagram of system and the largest Lyapunov exponent curve, three-dimensional bifurcation diagram, time history diagram, phase map and Poincare section can be obtained. The influences of radial line load and in-plane load on vibration characteristics of the continuum circular cylindrical shell are studied.

annular antenna, cylindrical shell, boundary condition, boundary load, nonlinear dynamics

PACS: 05.45.-a, 46.40.-f, 46.70.De

doi: [10.1360/SSPMA2017-00101](https://doi.org/10.1360/SSPMA2017-00101)