几乎相等的三次华林-哥德巴赫问题的例外集

任秀敏, 药艳君*

山东大学数学学院, 济南 250100

E-mail: xmren@sdu.edu.cn, yanjung.yao@hotmail.com

收稿日期: 2014-06-09; 接受日期: 2014-09-25; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10971119 和 11301325) 和教育部创新团队 (批准号: IRT1264) 资助项目

摘要 本文证明了对 $5 \leq s \leq 8$, 几乎所有的满足某些同余条件的正整数 N 都可以表示为 $N = p_1^3 + \cdots + p_s^3$, $|p_i - (N/s)^{1/3}| \leq N^{1/3-\theta_s}$, 其中 $\theta_5 = \frac{7}{261} - 2\varepsilon$, $\theta_6 = \frac{5}{159} - \varepsilon$, $\theta_7 = \frac{11}{333} - \varepsilon$, $\theta_8 = \frac{19}{561} - \varepsilon$.

关键词 华林-哥德巴赫问题 例外集 圆法 小区间上的素变数三角和估计

MSC (2010) 主题分类 11P55, 11P05, 11P32

1 引言

华林-哥德巴赫问题研究把正整数表示为素数幂之和的可能性. 对于三次方的华林-哥德巴赫问题, 1938 年 Hua^[1] 证明了对于 $s = 5, 6, 7, 8$, 几乎所有的满足某些同余条件的自然数都可以表示为 s 个素数立方之和, 这里的同余条件为

$$\mathcal{N}_5 = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv 1 \pmod{2}, \quad n \not\equiv 0, \pm 2 \pmod{9}, \quad n \not\equiv 0 \pmod{7}\},$$

$$\mathcal{N}_6 = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv 0 \pmod{2}, \quad n \not\equiv \pm 1 \pmod{9}\},$$

$$\mathcal{N}_7 = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv 1 \pmod{2}, \quad n \not\equiv 0 \pmod{9}\},$$

$$\mathcal{N}_8 = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv 0 \pmod{2}\}.$$

以 $E_s(N)$ 表示不超过 N 的满足上述同余条件但是不能表示为 s 个素数立方之和的正整数 n 的个数. Hua 的这一结果可以确切地表述为 $E_s(N) \ll N(\log N)^{-A}$ 对于任意 $A > 0$ 成立. 2000 年, Ren 在文献 [2] 中将 $s = 5$ 的结果改进为 $E_5(N) \ll N^{\frac{152}{153}+\varepsilon}$. 2002 年, Wooley^[3] 证明了 $E_s(N) \ll N^{1-\rho_s}$, 其中

$$\rho_5 = \frac{1}{36} - \varepsilon, \quad \rho_6 = \frac{1}{18} - \varepsilon, \quad \rho_7 = \frac{13}{36} - \varepsilon, \quad \rho_8 = \frac{25}{36} - \varepsilon.$$

这些结论最近得到了很大的改进:

$$\text{Kumchev [4]: } \rho_5 = \frac{5}{84}, \quad \rho_6 = \frac{4}{35}, \quad \rho_7 = \frac{11}{28}, \quad \rho_8 = \frac{61}{84}.$$

$$\text{Kawada 和 Wooley [5]: } \rho_6 = \frac{5}{28}, \quad \rho_7 = \frac{19}{42}, \quad \rho_8 = \frac{11}{14}.$$

$$\text{Zhao [6]: } \rho_5 = \frac{1}{12} - \varepsilon, \quad \rho_6 = \frac{1}{4} - \varepsilon, \quad \rho_7 = \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad \rho_8 = \frac{5}{6} - \varepsilon.$$

在本文中, 我们研究几乎相等的三次华林-哥德巴赫问题, 即

$$\begin{cases} n = p_1^3 + \cdots + p_s^3, \\ \left| p_i - \left(\frac{N}{s} \right)^{\frac{1}{3}} \right| \leq N^{\frac{1}{3} - \theta_s}, \quad 1 \leq i \leq s, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $5 \leq s \leq 8$. 对于这一问题, 我们希望可以找到一个足够大的 $\theta_s \in (0, 1/3)$, 使得几乎所有满足上述同余条件的正整数 n 都能够表示为 (1.1) 的形式. 我们定义区间

$$I_s(N, Y) = [N - Y, N + Y].$$

以 $E_s(N, Y)$ 表示集合 $\mathcal{N}_s \cap I_s(N, Y)$ 中不能表示为 (1.1) 的整数 n 的个数. 我们需要证明对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 估计式

$$E_s(N, 3s(N/s)^{1-\theta_s}) \ll N^{1-\theta_s-\varepsilon} \quad (1.2)$$

成立, 其中 $s = 5, 6, 7, 8$. Liu 和 Sun^[7] 首先研究了这一问题并得到: $\theta_s = \frac{s-4}{6(s+12)}$. 在文献 [8] 中, Wang 将这一结果改进为 $\theta_s = \frac{s-4}{15s}$, 其中 $s = 5, 6, 7, 8$. 在文献 [9] 中, Li 证明了 $\theta_5 = \frac{1}{48}$, $\theta_6 = \frac{1}{36}$, $\theta_7 = \frac{1}{33}$.

本文的主要结果如下:

定理 1 当 $5 \leq s \leq 8$ 时, (1.2) 对于如下 θ_s 成立:

$$\theta_5 = \frac{7}{261} - 2\varepsilon, \quad \theta_6 = \frac{5}{159} - \varepsilon, \quad \theta_7 = \frac{11}{333} - \varepsilon, \quad \theta_8 = \frac{19}{561} - \varepsilon.$$

我们将利用圆法证明定理 1. 主区间上的积分估计将采用常规方法处理, 我们将主要处理余区间上的积分, 关键想法是利用文献 [10] 中关于小区间上的素变数三角和的估计以及文献 [6] 中的思想.

在文中, 不论是否带有下列下标, 字母 p 都表示素数, ε 表示任意小的正常数. $\varphi(n)$, $\Lambda(n)$ 以及 $d(n)$ 分别表示 Euler 函数, von Mangoldt 函数和除数函数. 字母 N 表示充分大的正整数, $L = \log N$. 我们用记号 $e(x)$ 表示 $e^{2\pi i x}$.

2 定理 1 的证明

设 N 为充分大的正整数. 对 $5 \leq s \leq 8$, 记

$$x = (N/s)^{\frac{1}{3}}, \quad y = x^{\mu_s}, \quad (2.1)$$

其中

$$\mu_5 = \frac{80}{87} + 6\varepsilon, \quad \mu_6 = \frac{48}{53} + 3\varepsilon, \quad \mu_7 = \frac{100}{111} + 3\varepsilon, \quad \mu_8 = \frac{168}{187} + 3\varepsilon. \quad (2.2)$$

记

$$N_1 = N_1(s) = (N/s)^{\frac{1}{3}} - y, \quad N_2 = N_2(s) = (N/s)^{\frac{1}{3}} + y,$$

和

$$R_s(n, y) = \sum_{\substack{n=p_1^3+\cdots+p_s^3 \\ N_1 < p_j \leq N_2}} (\log p_1) \cdots (\log p_s).$$

定义

$$T(\alpha) = \sum_{N_1 < p \leq N_2} (\log p) e(p^3 \alpha).$$

则对于任意的 $Q > 0$, 我们有

$$R_s(n, y) = \int_0^1 T^s(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha = \int_{1/Q}^{1+1/Q} T^s(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha.$$

由 Dirichlet 有理逼近定理, 对于任意的 $\alpha \in [1/Q, 1+1/Q]$, 存在满足条件 $1 \leq a \leq q \leq Q$ 和 $(a, q) = 1$ 的整数 a, q , 使得 $\alpha \in I(q, a)$, 其中

$$I(q, a) = \left\{ \alpha : \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{qQ} \right\}.$$

设 $1 < P < Q/2$. 定义主区间 $\mathfrak{M}$ 和余区间 $\mathfrak{m}$ 如下:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(P, Q) = \bigcup_{q \leq P} \bigcup_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} I(q, a), \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{m}(P, Q) = \left[\frac{1}{Q}, 1 + \frac{1}{Q} \right] \setminus \mathfrak{M}. \quad (2.3)$$

那么

$$R_s(n, y) = \left\{ \int_{\mathfrak{M}} + \int_{\mathfrak{m}} \right\} T^s(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha.$$

为了证明定理 1, 我们将取定

$$P = y^2 x^{-\frac{19}{12} - 3\varepsilon}, \quad Q = x^{\frac{31}{12} + 2\varepsilon}. \quad (2.4)$$

命题 1 设主区间 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(P, Q)$ 如 (2.3) 式定义, 其中 P, Q 由 (2.4) 给出. 设 $n \in \mathcal{N}_s \cap I_s(N, 3sx^2y)$. 则对于任意 $A > 0$, 有

$$\int_{\mathfrak{M}} T^s(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha = \frac{1}{3^s} \mathfrak{S}_s(n) \mathfrak{J}_s(n) + O(y^{s-1} x^{-2} L^{-A}),$$

其中 $\mathfrak{S}_s(n)$ 是由 (3.1) 定义的奇异级数, 该奇异级数是绝对收敛的并且满足 $\mathfrak{S}_s(n) \gg 1$, $\mathfrak{J}_s(n)$ 定义为

$$\mathfrak{J}_s(n) = \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_s = n \\ N_1^3 < m_j \leq N_2^3}} (m_1 \cdots m_s)^{-\frac{2}{3}},$$

而且满足 $\mathfrak{J}_s(n) \asymp y^{s-1} x^{-2}$.

命题 2 设余区间 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(P, Q)$ 如 (2.3) 式所定义, 其中 P, Q 由 (2.4) 定义. 则有

$$\int_{\mathfrak{m}} |T(\alpha)|^9 d\alpha \ll y^{\frac{47}{8} + \varepsilon} + y^{\frac{107}{26}} x^{\frac{62}{39} + \varepsilon}.$$

命题 1 和 2 的证明将分别在以下两节中给出. 欲证定理 1, 我们还需以下引理, 这一结果是文献 [10] 中定理 2 当 $k = 3$ 时的情形.

引理 2.1 设 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(P, Q)$ 如 (2.3) 所定义. 设 μ 为满足 $\frac{8}{9} < \mu \leq 1$ 的实数. 那么对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 和 $0 < \gamma \leq \min(\frac{2\mu-1}{14}, \frac{9\mu-8}{6})$, 有

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{m}} \left| \sum_{x < n \leq x + x^\mu} \Lambda(n) e(\alpha n^3) \right| \ll x^{\mu - \gamma + \varepsilon} + x^{\mu + \varepsilon} P^{-\frac{1}{2}}.$$

定理 1 的证明 记 $\bar{y} = 3sx^2y$. 设 $\mathcal{E}_s(N, \bar{y})$ 表示由集合 $\mathcal{N}_s \cap I_s(N, \bar{y})$ 中不能表示为 (1.1) 的正整数 n 所构成的集合. 那么我们有 $E_s(N, \bar{y}) = |\mathcal{E}_s(N, \bar{y})|$, 并且

$$0 = \sum_{n \in \mathcal{E}_s(N, \bar{y})} \int_0^1 T^s(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha = \sum_{n \in \mathcal{E}_s(N, \bar{y})} \left\{ \int_{\mathfrak{M}} + \int_{\mathfrak{m}} \right\} T^s(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha.$$

因此由命题 1 我们得到

$$\left| \sum_{n \in \mathcal{E}_s(N, \bar{y})} \int_{\mathfrak{m}} T^s(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha \right| = \left| \sum_{n \in \mathcal{E}_s(N, \bar{y})} \int_{\mathfrak{M}} T^s(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha \right| \gg E_s(N, \bar{y}) y^{s-1} x^{-2}.$$

另一方面, 记

$$D_s(\alpha) = \sum_{n \in \mathcal{E}_s(N, \bar{y})} e(-n\alpha).$$

则由 Cauchy 不等式得

$$\left| \sum_{n \in \mathcal{E}_s(N, \bar{y})} \int_{\mathfrak{m}} T^s(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha \right| = \left| \int_{\mathfrak{m}} T^s(\alpha) D_s(\alpha) d\alpha \right| \leq \sqrt{E_s(N, \bar{y}) \mathcal{I}(2s)},$$

其中

$$\mathcal{I}(r) = \int_{\mathfrak{m}} |T(\alpha)|^r d\alpha. \quad (2.5)$$

从而得到

$$E_s(N, \bar{y}) \ll y^{2-2s} x^4 \mathcal{I}(2s) \ll y^{2-2s} x^4 \sup_{\alpha \in \mathfrak{m}} |T(\alpha)|^{2s-9} \mathcal{I}(9). \quad (2.6)$$

为了估计 $\sup |T(\alpha)|$, 首先易知

$$T(\alpha) = \sum_{N_1 < n \leq N_2} \Lambda(n) e(n^3 \alpha) + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

其次由引理 2.1,

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{m}} \left| \sum_{N_1 < n \leq N_2} \Lambda(n) e(n^3 \alpha) \right| \ll y x^{-\gamma+\varepsilon} + y^{1+\varepsilon} P^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.7)$$

其中 $y = x^{\mu_s}$, $0 < \gamma \leq \min(\frac{2\mu_s-1}{14}, \frac{9\mu_s-8}{6})$. 根据 (2.2) 式中 μ_s 的定义, 我们可以在 (2.7) 中取 $\gamma = \frac{9\mu_s-8}{6}$. 进而由 (2.4) 中 P, Q 的定义可得

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{m}} |T(\alpha)| \ll y^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{4}{3}+\varepsilon} + y^{1+\varepsilon} P^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \ll y^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{4}{3}+\varepsilon}. \quad (2.8)$$

回到 (2.6) 并应用命题 2, 我们得到

$$E_s(N, \bar{y}) \ll y^{\frac{13}{2}-3s} x^{\frac{8s}{3}-8+8\varepsilon} (y^{\frac{47}{8}+\varepsilon} + y^{\frac{107}{26}} x^{\frac{62}{39}+\varepsilon}) \ll x^{2-3\varepsilon} y = (N/s)^{1-\theta_s-\varepsilon},$$

其中对于 $s = 5, 6, 7, 8$,

$$\theta_s = \frac{1-\mu_s}{3} = \frac{7}{261} - 2\varepsilon, \quad \frac{5}{159} - \varepsilon, \quad \frac{11}{333} - \varepsilon, \quad \frac{19}{561} - \varepsilon.$$

这样, 我们就完成了定理 1 的证明. □

3 命题 1 的证明

命题 1 的证明与文献 [7] 中引理 2.1 的证明方法类似, 所以我们将省略详细的步骤而只给出证明概要. 采用文献 [7] 中的记号, 我们定义

$$V(\lambda) = \sum_{N_1 < m \leq N_2} e(m^3 \lambda)$$

和

$$W(\chi, \lambda) = \sum_{N_1 < p \leq N_2} (\log p) \chi(p) e(p^3 \lambda) - \delta_\chi \sum_{N_1 < m \leq N_2} e(m^3 \lambda),$$

其中 $\delta_\chi = 1$ 或者 0 取决于 Dirichlet 特征 χ 是否为主特征. 进一步, 设

$$C(\chi, a) = \sum_{h=1}^q \bar{\chi}(h) e\left(\frac{ah^3}{q}\right), \quad C(q, a) = C(\chi^0, a)$$

和

$$B_s(n, q, \chi_1, \dots, \chi_s) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q C(\chi_1, a) \cdots C(\chi_s, a) e\left(-\frac{an}{q}\right).$$

记

$$\mathfrak{S}_s(n) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{B_s(n, q, \chi^0, \dots, \chi^0)}{\varphi^s(q)}. \quad (3.1)$$

现在我们引入 Dirichlet 特征, 由 Dirichlet 特征的正交性容易得到

$$T\left(\frac{a}{q} + \lambda\right) = \frac{C(q, a)}{\varphi(q)} V(\lambda) + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} C(\chi, a) W(\chi, \lambda).$$

因此

$$\int_{\mathfrak{M}} T^s(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha = I_{s,0} + \sum_{j=1}^s C_s^j I_{s,j},$$

其中, 对于 $0 \leq j \leq s$,

$$I_{s,j} = \sum_{q \leq P} \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q \frac{C^{s-j}(q, a)}{\varphi^s(q)} e\left(-\frac{an}{q}\right) \times \int_{-1/(qQ)}^{1/(qQ)} V^{s-j}(\lambda) \left\{ \sum_{\chi \bmod q} W(\chi, \lambda) \right\}^j e(-n\lambda) d\lambda.$$

这里 $I_{s,0}$ 可以用常规方法估计. 根据文献 [7] 中的引理 2.1, 我们得到

$$I_{s,0} = \frac{1}{3^s} \mathfrak{S}_s(n) \mathfrak{J}_s(n) + O(y^{s-1} x^{-2} L^{-A}).$$

因此为了证明命题 1, 我们仅需证明对于 $j = 1, 2, \dots, s$,

$$I_{s,j} \ll y^{s-1} x^{-2} L^{-A}. \quad (3.2)$$

上述不等式的证明所用的方法是文献 [11] 中的迭代法. 为此, 我们设

$$J_s(g) = \sum_{r \leq P} [r, g]^{1-\frac{s}{2}+\varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \max_{|\lambda| \leq 1/(rQ)} |W(\chi, \lambda)|,$$

和

$$K_s(g) = \sum_{r \leq P} [r, g]^{1-\frac{s}{2}+\varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \left(\int_{-1/(rQ)}^{1/(rQ)} |W(\chi, \lambda)|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $*$ 表示对所有模 r 的原特征求和. 关于 $J_s(g)$ 和 $K_s(g)$ 的估计, 我们有如下的结论:

引理 3.1 设 P, Q 由 (2.4) 定义, 则对 $s = 5, 6, 7, 8$, 我们有

$$J_s(g) \ll g^{1-\frac{s}{2}+\varepsilon} y L^c,$$

其中 c 是某一正的常数. 特别地, 对任意的 $A > 0$, 有 $J_s(1) \ll y L^{-A}$.

引理 3.2 设 P, Q 由 (2.4) 定义, 则对 $s = 5, 6, 7, 8$, 我们有

$$K_s(g) \ll g^{1-\frac{s}{2}+\varepsilon} y^{\frac{1}{2}} x^{-1} L^c.$$

引理 3.1 和 3.2 的证明与文献 [7] 中的引理 3.2-3.4 的证明类似. 事实上, 我们可以验证, 当参数 y, P, Q 满足条件

$$P^{1+\varepsilon} \ll y^2 x^{-\frac{31}{20}}, \quad Q \gg x^{\frac{31}{12}+\varepsilon} \quad \text{和} \quad PQ \ll x^{2-\varepsilon} y$$

时, 文献 [7] 中关于引理 3.2-3.4 的讨论都是成立的. 容易验证上述条件对 (2.1) 中定义的 y 和 (2.4) 中定义的 P, Q 成立.

为了得到估计式 (3.2), 我们重复文献 [7] 中第 4 节的讨论, 并且将其中的引理 3.2-3.4 替换为上述引理 3.1 和 3.2, 在此我们不做赘述. 这样就证明了命题 1. $\square$

4 命题 2 的证明

定义可乘函数 $w(q)$ 如下:

$$w(p^{3u+v}) = \begin{cases} 3p^{-u-\frac{1}{2}}, & \text{如果 } u \geq 0 \text{ 且 } v = 1, \\ p^{-u-1}, & \text{如果 } u \geq 0 \text{ 且 } v = 2, 3. \end{cases}$$

对于 $\mathcal{A} \subseteq (x, x+y] \cap \mathbb{N}$, 我们定义

$$g(\alpha) = g_{\mathcal{A}}(\alpha) = \sum_{n \in \mathcal{A}} (\log n) e(n^3 \alpha).$$

以下结论是文献 [12] 中的引理 2.1 和 2.3. 类似的结果可在文献 [6] 中找到.

引理 4.1 设 $\gamma \in \mathbb{R}$, $c, D > 0$ 以及 $1 < M \leq y \leq x$. 那么存在常数 $c_0 > 0$, 使得

$$\sum_{q \leq M} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} \int_{|\alpha - a/q| \leq 1} \frac{w^2(q) d^c(q) |\sum_{x < p \leq x+y} (\log p) e(p^3(\alpha + \gamma))|^2}{1 + D|\alpha - a/q|} d\alpha \ll y^2 D^{-1} (\log x)^{c_0}.$$

引理 4.2 设 $0 < \rho \leq \frac{1}{4}$, $y \leq x$ 以及 $x^3 \leq y^{4-2\rho}$. 令 $\mathcal{M}$ 表示区间 $\mathcal{M}(q, a)$ 的并集, 其中 $1 \leq a \leq q \leq y^{3\rho}$, $(a, q) = 1$, $\mathcal{M}(q, a) = \{\alpha : |q\alpha - a| \leq x^{-2} y^{3\rho-1}\}$. 假设 $G(\alpha)$ 和 $h(\alpha)$ 是周期为 1 的可积函数. 那么对于任意可测集 $\mathfrak{w} \subseteq [0, 1]$, 我们有

$$\int_{\mathfrak{w}} g(\alpha) G(\alpha) h(\alpha) d\alpha \ll y (\log x)^2 \mathcal{J}_0^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\mathfrak{w}} |G(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{4}} J^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{w}) + y^{1-\frac{\rho}{2}+\varepsilon} J(\mathfrak{w}),$$

其中

$$J(\mathfrak{w}) = \int_{\mathfrak{w}} |G(\alpha) h(\alpha)| d\alpha, \quad \mathcal{J}_0 = \sup_{\beta \in [0, 1]} \int_{\mathcal{M}} \frac{w^2(q) |h^2(\alpha + \beta)|}{(1 + x^2 y |\alpha - a/q|)^2} d\alpha.$$

命题 2 的证明 由 (2.5) 式可得

$$\mathcal{I}(r) = \int_{\mathfrak{m}} |T(\alpha)|^r d\alpha.$$

在引理 4.2 中我们取 $\rho = \frac{1}{4}$, $G(\alpha) = |T(\alpha)|^7$, $h(\alpha) = T(-\alpha)$ 和 $g(\alpha) = T(\alpha)$. 对于 $y \geq x^{6/7}$, 我们得到

$$\mathcal{I}(9) \ll y(\log x)^2 \mathcal{J}_0^{\frac{1}{4}} \mathcal{I}^{\frac{1}{4}}(14) \mathcal{I}^{\frac{1}{2}}(8) + y^{\frac{7}{8}+\varepsilon} \mathcal{I}(8),$$

其中

$$\mathcal{J}_0 = \sup_{\beta \in [0,1]} \sum_{q \leq y^{3/4}} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \int_{\mathcal{M}(q,a)} \frac{w^2(q)|h^2(\alpha+\beta)|}{(1+x^2y|\alpha-a/q|)^2} d\alpha,$$

$\mathcal{M}(q,a) = \{\alpha : |q\alpha - a| \leq x^{-2}y^{-1/4}\}$. 在引理 4.1 中取 $M = y^{3/4}$, $D = x^2y$ 得到 $\mathcal{J}_0 \ll x^{-2}y(\log x)^{c_0}$. 因此

$$\mathcal{I}(9) \ll y^{\frac{5}{4}} x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \mathcal{I}^{\frac{1}{4}}(14) \mathcal{I}^{\frac{1}{2}}(8) + y^{\frac{7}{8}+\varepsilon} \mathcal{I}(8).$$

用与文献 [13] 中引理 2.5 的证明类似的讨论可以证明 $\mathcal{I}(8) \ll y^{5+\varepsilon}$. 这样就得到了

$$\mathcal{I}(9) \ll y^{\frac{15}{4}} x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \mathcal{I}^{\frac{1}{4}}(14) + y^{\frac{47}{8}+\varepsilon}.$$

由此得到 $\mathcal{I}(9) \ll y^{47/8+\varepsilon}$, 或者

$$\mathcal{I}(9) \ll y^{\frac{15}{4}} x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \mathcal{I}^{\frac{1}{4}}(14). \quad (4.1)$$

我们可以利用引理 4.1 和 4.2 类似地处理 $\mathcal{I}(14)$ 并得到

$$\mathcal{I}(14) \ll y^{\frac{5}{4}} x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \mathcal{I}^{\frac{1}{4}}(24) \mathcal{I}^{\frac{1}{2}}(13) + y^{\frac{7}{8}+\varepsilon} \mathcal{I}(13).$$

由此得到

$$\mathcal{I}(14) \ll y^{\frac{7}{8}+\varepsilon} \mathcal{I}(13) \quad (4.2)$$

或者

$$\mathcal{I}(14) \ll y^{\frac{5}{4}} x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \mathcal{I}^{\frac{1}{4}}(24) \mathcal{I}^{\frac{1}{2}}(13). \quad (4.3)$$

(i) 假设 (4.2) 成立. 那么由 (4.1) 式得

$$\mathcal{I}(9) \ll y^{\frac{127}{32}} x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \mathcal{I}^{\frac{1}{4}}(13) \ll y^{\frac{127}{32}} x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \mathcal{I}^{\frac{1}{4}}(9) \sup_{\alpha \in \mathfrak{m}} |T(\alpha)|.$$

进而得到

$$\mathcal{I}(9) \ll y^{\frac{127}{24}} x^{-\frac{2}{3}+\varepsilon} \sup_{\alpha \in \mathfrak{m}} |T(\alpha)|^{\frac{4}{3}}.$$

将 (2.8) 式代入上式右端便推得

$$\mathcal{I}(9) \ll y^{\frac{127}{24}} x^{-\frac{2}{3}+\varepsilon} (y^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{4}{3}+\varepsilon})^{\frac{4}{3}} \ll y^{\frac{37}{8}} x^{\frac{10}{9}+\varepsilon} \ll y^{\frac{47}{8}}.$$

(ii) 假设 (4.3) 成立. 那么由 (4.1) 式我们得到

$$\mathcal{I}(9) \ll y^{\frac{65}{16}} x^{-\frac{5}{8}+\varepsilon} \mathcal{I}^{\frac{1}{16}}(24) \mathcal{I}^{\frac{1}{8}}(13) \ll y^{\frac{65}{16}} x^{-\frac{5}{8}+\varepsilon} \mathcal{I}^{\frac{3}{16}}(9) \sup_{\alpha \in \mathfrak{m}} |T(\alpha)|^{\frac{23}{16}}.$$

因此

$$\mathcal{I}(9) \ll y^{\frac{65}{13}} x^{-\frac{10}{13}+\varepsilon} \sup_{\alpha \in \mathfrak{m}} |T(\alpha)|^{\frac{23}{13}} \ll y^{\frac{107}{26}} x^{\frac{62}{39}+\varepsilon}.$$

这样, 我们就完成了命题 2 的证明. □

致谢 本文作者感谢审稿人认真阅读本文并提出有益的修改意见!

参考文献

- 1 Hua L K. Some results in the additive prime number theory. *Quart J Math*, 1938, 9: 68–80
- 2 Ren X M. The Waring-Goldbach problem for cubes. *Acta Arith*, 2000, 94: 287–301
- 3 Wooley T D. Slim exceptional sets for sums of cubes. *Canad J Math*, 2002, 54: 417–448
- 4 Kumchev A V. On the Waring-Goldbach problem: exceptional sets for sums of cubes and higher powers. *Canad J Math*, 2005, 57: 298–327
- 5 Kawada K, Wooley T. On the Waring-Goldbach problem for fourth and fifth powers. *Proc London Math Soc*, 2001, 83: 1–50
- 6 Zhao L L. On the Waring-Goldbach problem for fourth and sixth powers. *Proc London Math Soc*, 2014, 108: 1593–1622
- 7 Liu Z X, Sun Q F. Sums of cubes of primes in short intervals. *Ramanujan J*, 2012, 28: 309–321
- 8 王匆匆. 小区间上的华林-哥德巴赫问题. 硕士学位论文. 济南: 山东大学, 2011
- 9 李太玉. 关于素变量的堆垒数论问题. 博士学位论文. 济南: 山东大学, 2012
- 10 Kumchev A V. On Weyl sums over primes in short intervals. In: *Arithmetic in Shangrila. Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory, Series on Number Theory and Its Applications*. Singapore: World Scientific, 2012, 9, 116–131
- 11 Liu J Y. An iterative method in the Waring-Goldbach problem. *Chebyshevskii Sb*, 2005, 5: 164–179
- 12 Yao Y J. Sums of nine almost equal prime cubes. *Front Math China*, 2014, 9: 1131–1140
- 13 Vaughan R V. *The Hardy-Littlewood Method*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1997

Exceptional set for sums of almost equal prime cubes

REN XiuMin & YAO YanJun

Abstract We prove that almost all integers N satisfying some necessary congruence conditions can be written as sum of the form $N = p_1^3 + \cdots + p_s^3$ with $|p_i - (N/s)^{1/3}| \leq N^{1/3-\theta_s}$, where $\theta_s = \frac{7}{261} - 2\varepsilon, \frac{5}{159} - \varepsilon, \frac{11}{333} - \varepsilon, \frac{19}{561} - \varepsilon$ for $s = 5, 6, 7, 8$, respectively.

Keywords exceptional set, Waring-Goldbach problem, circle method, exponential sum over primes in short intervals

MSC(2010) 11P55, 11P05, 11P32

doi: 10.1360/012014-62