Hardy 核积分算子的单权不等式

献给史济怀教授 80 华诞

郭坤宇*, 王子鹏

复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: kyguo@fudan.edu.cn, zipengwang11@fudan.edu.cn

收稿日期: 2015-03-17; 接受日期: 2015-04-08; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371096) 资助项目

摘要 单位圆盘上 Hardy 空间再生核所诱导积分算子在函数空间算子理论的研究中发挥了重要作用. 本文利用现代调和分析中的离散化技巧和二进模型建立它对应的单权不等式, 引入和研究与之相关的 $R_{2,2}$ -权. 通过圆盘上 Carleson 盒子型极大算子 $M_{\frac{1}{2}}$ 得到了 $R_{2,2}$ -权的算子论特征, 系统讨论 $M_{\frac{1}{2}}$ 的 p - q 有界性.

关键词 单权不等式 K -算子 $R_{2,2}$ -权

MSC (2010) 主题分类 47B34, 42B20

1 引言

设 $\mathbb{D}$ 是复平面上的单位圆盘, $\mathbb{T}$ 是单位圆周. 给定圆周上的弧 $I = [a, b] \subset \mathbb{T}$, 其对应的 Carleson 盒子 Q_I 为

$$Q_I = \left\{ z \in \mathbb{D} : 1 - |I| \leq |z| < 1, \frac{z}{|z|} \in I \right\},$$

这里 $|\cdot|$ 表示圆周 $\mathbb{T}$ 上正规化的弧长测度. 为研究 Bergman 投影算子

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - \bar{z}w)^2} dA(w)$$

的单权不等式. 1976 年, 文献 [1] 定义并研究了 Carleson 盒子极大算子

$$Mf(z) = \sup_{z \in Q_I: I \subset \mathbb{T}} \frac{1}{|Q_I|} \int_{Q_I} |f(w)| dA(w),$$

这里 $|\cdot|$ 表示圆盘 $\mathbb{D}$ 上正规化的面积测度. 容易看出, Mf 是齐性空间上 Hardy-Littlewood 极大算子在圆盘上的变形. 相比 Hardy-Littlewood 极大算子, Carleson 盒子极大算子更适用于函数空间上算子问题的研究. 例如, Carleson 盒子极大算子在 Bergman 空间上 Sarason 猜测反例的构造中发挥了关键作用 [2].

设 $H^2(\mathbb{D})$ 是圆盘 $\mathbb{D}$ 上的 Hardy 空间, 其在 $z \in \mathbb{D}$ 处的再生核函数为

$$K_z(w) = \frac{1}{1 - \bar{z}w}, \quad w \in \mathbb{T}.$$

注意到, 我们熟知的 Bergman 投影算子的积分核正是 Bergman 空间 $L_a^2(\mathbb{D})$ 的再生核函数. 为了研究圆盘上由再生核函数诱导的奇异积分算子理论, 即积分算子的积分核是由再生解析函数空间的再生核所给出, 文献 [3] 引入并研究了由 Hardy 空间再生核诱导的积分算子

$$Kf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{1-z\bar{w}} dA(w), \quad f \in L^1(\mathbb{D}).$$

他们研究了 K -算子的 L^p - L^q 有界性及其对应 Muckenhoupt-型加权不等式, 并得到了 Dirichlet 空间上 Carleson 测度的奇异积分算子特征. 在本文中, 我们定义了与 K -算子相应的 Carleson 盒子型极大算子 $M_{\frac{1}{2}}$, 即

$$M_{\frac{1}{2}}f(z) = \sup_{z \in Q_I: I \subset \mathbb{T}} \frac{1}{|Q_I|^{\frac{1}{2}}} \int_{Q_I} |f(w)| d(w),$$

并讨论其 L^p - L^q 有界性, 得到下述结论.

定理 1 设 $1 < p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$. 如果 $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$, 则 $M_{\frac{1}{2}} : L^p(\mathbb{D}) \rightarrow L^q(\mathbb{D})$ 有界.

令 $0 \leq \sigma \in L^1(\mathbb{D}), L^2(\mathbb{D}, \sigma)$ 表示单位圆盘上满足

$$\|f\|_{L^2(\sigma)}^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \sigma(z) dA(z) < \infty$$

的可测函数全体组成的 Hilbert 空间. 假设 $T = P$ 或者 $T = K$, 则它对应的单权不等式问题是指刻画所有使得

$$T : L^2(\mathbb{D}, \sigma) \rightarrow L^2(\mathbb{D}, \sigma)$$

有界的权 σ . 当 $T = P$ 时, B_2 -权完全刻画了 Bergman 投影的单权不等式^[1,3,4]. 所谓 B_2 -权是指 σ 满足

$$\sup_{I \subset \mathbb{T}} \frac{|Q_I|_{\sigma} |Q_I|_{\sigma^{-1}}}{|Q_I|^2} < \infty,$$

其中

$$|Q_I|_{\sigma} = \int_{Q_I} \sigma(z) dA(z).$$

接下来讨论 K -算子的单权不等式, 为此引入 $R_{2,2}$ -权. 称权 σ 是 $R_{2,2}$ -权是指它满足

$$R_{2,2}(\sigma) = \sup_{I \subset \mathbb{T}} \frac{|Q_I|_{\sigma} |Q_I|_{\sigma^{-1}}}{|Q_I|} < \infty.$$

我们猜测, $R_{2,2}$ -权能够刻画 K -算子的单权不等式. 本文不能证实这个猜测, 但可以得到如下定理.

定理 2 设 σ 是单位圆盘上的权. 如果

$$\sup_{I \subset \mathbb{T}} \frac{|Q_I|_{\sigma} |Q_I|_{\frac{1}{\sigma}}}{|Q_I|^{\frac{3}{2}}} < \infty,$$

则 K 是 $L^2(\mathbb{D}, \sigma)$ 上的有界算子.

基于极大算子 $M_{\frac{1}{2}}$, 我们给出 $R_{2,2}$ -权的算子论刻画.

定理 3 设 σ 是 $\mathbb{D}$ 上的权, 则 $R_{2,2}(\sigma) < \infty$ 当且仅当 $M_{\frac{1}{2}} : L^2(\mathbb{D}, \sigma) \rightarrow L^{2,\infty}(\mathbb{D}, \sigma)$ 有界, 这里

$$L^{2,\infty}(\mathbb{D}, \sigma) = \{f \text{ 是 } \mathbb{D} \text{ 上的可测函数且 } \|f\|_{L^{2,\infty}(\mathbb{D}, \sigma)} < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_{L^{2,\infty}(\mathbb{D},\sigma)} = \sup_{t>0} t \cdot |\{z \in \mathbb{D} : |f(z)| > t\}|^{\frac{1}{2}}.$$

为了证明定理 1-3, 我们介绍圆盘上的二进 Carleson 盒子系统^[2,5]. 令 $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, 考虑单位圆周 $\mathbb{T}$ 上的两个二进网格系统如下:

$$\mathcal{D}^0 = \left\{ \left[\frac{2\pi m}{2^j}, \frac{2\pi(m+1)}{2^j} \right) : m \in \mathbb{Z}_+, j \in \mathbb{Z}_+, 0 \leq m < 2^j \right\}$$

和

$$\mathcal{D}^{\frac{1}{3}} = \left\{ \left[\frac{2\pi m}{2^j} + \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi(m+1)}{2^j} + \frac{2\pi}{3} \right) : m \in \mathbb{Z}_+, j \in \mathbb{Z}_+, 0 \leq m < 2^j \right\}.$$

对每个 $\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}$, $\mathcal{Q}^\beta$ 表示以 $I \in \mathcal{D}^\beta$ 为边长的 Carleson 盒子 Q_I 的全体, 称 $\mathcal{Q}^\beta$ 为二进 Carleson 盒子系统.

下列引理 (参见文献 [6]) 揭示了任意 Carleson 盒子 Q_I 与二进 Carleson 盒子系统 $\mathcal{Q}^\beta$, $\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}$ 的关系.

引理 1 设 $J \subset \mathbb{T}$ 是单位圆周上的任意区间, 则存在 $I' \in \mathcal{D}^0 \cup \mathcal{D}^{\frac{1}{3}}$ 使得 $J \subset I'$ 且 $|I'| \leq 6|J|$.

2 定理 1 的证明

定理 1 的证明 首先考察 $p \geq 2$ 的情形. 固定 Carleson 盒子 Q_I , 根据 Hölder 不等式, 得

$$\frac{1}{|Q_I|^{\frac{1}{2}}} \int_{Q_I} |f(w)| dA(w) \leq \frac{1}{|Q_I|^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{Q_I} |f(w)|^p dA(w) \right]^{\frac{1}{p}} |Q_I|^{1-\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{D})}.$$

从而, 对任意 $f \in L^p(\mathbb{D})$, 有

$$M_{\frac{1}{2}} f(z) \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{D})}.$$

因此, 当 $1 \leq q \leq \infty$ 时, $M_{\frac{1}{2}} : L^p(\mathbb{D}) \rightarrow L^q(\mathbb{D})$ 有界. 特别地, $M_{\frac{1}{2}} : L^2(\mathbb{D}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{D})$ 有界.

下面考察 $1 < p < 2$ 的情形, 只需证明 $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$ 时, 定理 1 成立. 事实上, 对任意 $1 < p < 2$, 如果 $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$, 则考虑 $1 \leq q_0 \leq \infty$ 满足

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}.$$

显然, $q_0 > q$, 则

$$\left[\int_{\mathbb{D}} |(M_{\frac{1}{2}} f)(z)|^q dA(z) \right]^{\frac{1}{q}} \leq \left[\int_{\mathbb{D}} |(M_{\frac{1}{2}} f)(z)|^{q_0} dA(z) \right]^{\frac{1}{q_0}} \leq c_1 \left[\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z) \right]^{\frac{1}{p}},$$

其中 $c_1 = \|M_{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\mathbb{D}) \rightarrow L^{q_0}(\mathbb{D})}$. 以下假设 $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$, $1 < p < 2$. 先证 $M_{\frac{1}{2}} : L^1(\mathbb{D}) \rightarrow L^{2,\infty}(\mathbb{D})$ 有界. 也即存在常数 $c_2 > 0$ 使得对任意 $t > 0$, 有

$$t \cdot |\{z \in \mathbb{D} : (M_{\frac{1}{2}} f)(z) > t\}|^{\frac{1}{2}} \leq c_2 \|f\|_{L^1(\mathbb{D})}.$$

不失一般性, 可设 $\|f\|_{L^1(\mathbb{D})} = 1$. 对任意 $0 \neq f \in L^1(\mathbb{D})$, 考虑

$$g(z) = \frac{f(z)}{\|f\|_{L^1(\mathbb{D})}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

则

$$\begin{aligned} t \cdot |\{(M_{\frac{1}{2}}f)(z) > t\}|^{\frac{1}{2}} &= \|f\|_{L^1(\mathbb{D})} \frac{t}{\|f\|_{L^1(\mathbb{D})}} \cdot \left| \left\{ \left(M_{\frac{1}{2}} \frac{f}{\|f\|_{L^1(\mathbb{D})}} \right)(z) > \frac{t}{\|f\|_{L^1(\mathbb{D})}} \right\} \right|^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{D})} \frac{t}{\|f\|_{L^1(\mathbb{D})}} \cdot \left| \left\{ (M_{\frac{1}{2}}g)(z) > \frac{t}{\|f\|_{L^1(\mathbb{D})}} \right\} \right|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_2 \|f\|_{L^1(\mathbb{D})}. \end{aligned}$$

最后一个等式是由于 $\|g\|_{L^1(\mathbb{D})} = 1$.

给定二进 Carleson 盒子系统 $\mathcal{Q}^\beta$, $\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}$. 定义

$$M_{\frac{1}{2}}^\beta f(z) = \sup_{z \in Q_I \in \mathcal{Q}^\beta} \frac{1}{|Q_I|^{\frac{1}{2}}} \int_{Q_I} |f(w)| dA(w).$$

注意到, 对任意圆弧 $I \subset \mathbb{T}$, 有 $|Q_I| \approx |I|^2$, 则存在绝对常数 c_3 , 对任意 Carleson 盒子 Q_I , $I \subset \mathbb{T}$, 由引理 1, 存在 $Q_{I'} \in \mathcal{Q}^\beta$, $\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}$ 使得

$$Q_I \subset Q_{I'}, \quad |Q_{I'}| \leq c_3 |Q_I|.$$

从而, 存在常数 $c_4 > 0$, 对任意 $f \in L^1(\mathbb{D})$, 有

$$(M_{\frac{1}{2}}f)(z) \leq c_4 [(M_{\frac{1}{2}}^0 f)(z) + (M_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} f)(z)], \quad z \in \mathbb{D}. \quad (2.1)$$

断言 A 对任何 $t > 0$, $\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}$, $f \in L^1(\mathbb{D})$ 且 $\|f\|_{L^1(\mathbb{D})} = 1$, 有

$$t \cdot |\{z \in \mathbb{D} : (M_{\frac{1}{2}}^\beta f)(z) > t\}|^{\frac{1}{2}} \leq 1.$$

不妨设 $\beta = 0$. 任取 $t > 0$, 记

$$E_t = \{z \in \mathbb{D} : (M_{\frac{1}{2}}^0 f)(z) > t\}.$$

考察集族

$$\mathcal{X} = \left\{ Q_I \in \mathcal{Q}^0 : \frac{1}{|Q_I|^{\frac{1}{2}}} \int_{Q_I} |f(w)| dA(w) > t \right\}$$

和 $\mathcal{X}$ 中极大 (按包含关系) Carleson 盒子全体

$$\mathcal{X}_t = \{Q_I : Q_I \in \mathcal{Q}^\beta, I \in \Lambda\}.$$

容易验证, $\mathcal{X}_t$ 中的元素互不相交. 进一步,

$$\bigcup_{I: I \in \Lambda} Q_I = E_t.$$

显然,

$$\bigcup_{I: I \in \Lambda} Q_I \subset E_t.$$

任取 $z \in E_t$, 则存在 $Q_{I(t)} \in \mathcal{X}$ 使得 $z \in Q_{I(t)}$. 从而, 存在 $Q_{I'(t)} \in \mathcal{X}_t$ 使得 $z \in Q_{I'(t)}$, 也即

$$E_t \subset \bigcup_{I: I \in \Lambda} Q_I.$$

从而,

$$|E_t| = \sum_{J \in \Lambda} |Q_J| \leq \sum_{J \in \Lambda} \left(\frac{\int_{Q_J} |f(w)| dA(w)}{t} \right)^2.$$

注意到 $\|f\|_{L^1(\mathbb{D})} = 1$, 则

$$\int_{Q_J} |f(w)| dA(w) \leq 1.$$

于是,

$$|E_t| \leq \frac{1}{t^2} \sum_{I \in \Lambda} \int_{Q_I} |f(w)| dA(w) \leq \frac{1}{t^2} \int_{\bigcup_{I \in \Lambda} Q_I} |f(w)| dA(w) \leq \frac{1}{t^2} \int_{\mathbb{D}} |f(w)| dA(w).$$

最后一个不等号是因为 $\mathcal{X}_t$ 中的元素互不相交, 也即

$$t \cdot |E_t|^{\frac{1}{2}} \leq 1.$$

这就完成了断言 A 的证明.

由于

$$(M_{\frac{1}{2}} f)(z) \leq c_4 [(M_{\frac{1}{2}}^0 f)(z) + (M_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} f)(z)],$$

从而, $M_{\frac{1}{2}} : L^1(\mathbb{D}) \rightarrow L^{2,\infty}(\mathbb{D})$ 有界.

下证, 当 $1 < p < 2$ 且 $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$, 则 $M_{\frac{1}{2}} : L^p(\mathbb{D}) \rightarrow L^q(\mathbb{D})$ 有界. 为此, 需要 Marcinkiewick 插值定理, 可参见文献 [7].

引理 2 设 $0 < p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$ 并且 $p_0 \neq p_1$, (X, σ) 和 (Y, ω) 是可测空间. 若 T 是次线性算子使得

(1) $T : L^{p_0}(X, \sigma) \rightarrow L^{q_0, \infty}(Y, \omega)$ 有界;

(2) $T : L^{p_1}(X, \sigma) \rightarrow L^{q_1, \infty}(Y, \omega)$ 有界,

则对任意 $0 \leq \theta \leq 1$, 令

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

如果 $p \leq q$, 则

$$T : L^p(X, \sigma) \rightarrow L^q(Y, \omega) \text{ 有界.}$$

取 $p_0 = 1, q_0 = 2, p_1 = 2, q_1 = \infty$. 对于 $1 < p < 2$, 取

$$\theta = 2 - \frac{2}{p},$$

由

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{2},$$

则据引理 2 可知, $M_{\frac{1}{2}} : L^p(\mathbb{D}) \rightarrow L^q(\mathbb{D})$ 有界. 我们完成了定理 1 的证明. $\square$

3 定理 2 的证明

定理 2 的证明 定义 K -算子对应的正核积分算子 K^+ ,

$$K^+ f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{|1 - z\bar{w}|} dA(w).$$

为证定理 2, 只要证明如下引理.

引理 3 设 σ 为 $\mathbb{D}$ 的权. 如果

$$\sup_{I \subset \mathbb{T}} \frac{|Q_I|_\sigma |Q_I|_{\frac{1}{\sigma}}}{|Q_I|^{\frac{3}{2}}} < \infty,$$

则 K^+ 是 $L^2(\mathbb{D}, \sigma)$ 上的有界算子.

考虑 K^+ 算子的离散化算子, 回顾文献 [2, 5] 中的如下结果.

引理 4 存在绝对常数 c_5 和 c_6 对任意 $z, w \in \mathbb{D}$, 都有 Carleson 盒子 Q_I 使得 $z, w \in Q_I$ 且

$$c_5 |Q_I|^{\frac{1}{2}} \leq |1 - z\bar{w}| \leq c_6 |Q_I|^{\frac{1}{2}}.$$

由引理 1, 存在 $I' \in \mathcal{D}^0 \cup \mathcal{D}^{\frac{1}{3}}$ 使得 $z, w \in Q_{I'}$ 且

$$\frac{1}{|1 - z\bar{w}|} \leq c_7 \frac{1}{|Q_{I'}|^{\frac{1}{2}}},$$

其中 c_7 是不依赖 z 和 w 的常数. 从而,

$$\frac{1}{|1 - z\bar{w}|} \leq \frac{c_7 \chi_{Q_{I'}}(z) \chi_{Q_{I'}}(w)}{|Q_{I'}|^{\frac{1}{2}}}.$$

令不等号右边求和取遍 $Q_{I'} \in \mathcal{Q}^\beta$, $\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}$ 中包含 z 和 w 的 Carleson 盒子, 则对任意 $z, w \in \mathbb{D}$, 有

$$\frac{1}{|1 - z\bar{w}|} \leq c_7 \sum_{Q_{I'} \in \mathcal{Q}^\beta: \beta \in \{0, \frac{1}{3}\}} \frac{\chi_{Q_{I'}}(z) \chi_{Q_{I'}}(w)}{|Q_{I'}|^{\frac{1}{2}}}.$$

令 $\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}$, 考虑积分核

$$k_\beta(z, w) = \sum_{Q_{I'} \in \mathcal{Q}^\beta} \frac{\chi_{Q_{I'}}(z) \chi_{Q_{I'}}(w)}{|Q_{I'}|^{\frac{1}{2}}}$$

和它对应的积分算子

$$K^\beta f(z) = \int_{\mathbb{D}} k_\beta(z, w) f(w) dA(w),$$

则对于任意 $f \in L^1(\mathbb{D})$, 有

$$(K_+ |f|)(z) \leq c_7 [(K^0 |f|)(z) + (K^{\frac{1}{3}} |f|)(z)], \quad z \in \mathbb{D}. \quad (3.1)$$

引理 3 的证明 利用 Sawyer 的对偶技巧 (参见文献 [8, 命题 2.1]), 有 $K^+ : L^2(\mathbb{D}, \sigma) \rightarrow L^2(\mathbb{D}, \sigma)$ 有界当且仅当 $K_{\frac{1}{\sigma}}^+ : L^2(\mathbb{D}, \frac{1}{\sigma}) \rightarrow L^2(\mathbb{D}, \sigma)$ 有界, 其中

$$K_{\frac{1}{\sigma}}^+ f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{|1 - z\bar{w}|} \frac{1}{\sigma(w)} dA(w).$$

取 $\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}$, 定义

$$K_{\frac{1}{\sigma}}^\beta f(z) = \sum_{I \in \mathcal{D}^\beta} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w) \chi_{Q_I}(w)}{|Q_I|^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sigma(w)} dA(w) \chi_{Q_I}(z).$$

置 $f > 0$, 则对任意 $z \in \mathbb{D}$,

$$K_{\frac{1}{\sigma}}^+ f(z) \leq c_7 \sum_{\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}} K_{\frac{1}{\sigma}}^\beta f(z).$$

对任意 Carleson 盒子 Q_I , 定义

$$T_I = \left\{ z : 1 - |I| < |z| < 1 - \frac{|I|}{2}, \frac{z}{|z|} \in I \right\},$$

则 $\{T_I : I \in \mathcal{D}^0\}$ 是单位圆盘的一个划分.

令

$$c_8 = \sup_{I \subset \mathbb{T}} \frac{|Q_I|_\sigma |Q_I|_{\frac{1}{\sigma}}}{|Q_I|^{\frac{3}{2}}} < \infty.$$

取圆盘上的正值函数 g 满足

$$\int_{\mathbb{D}} |g(z)|^2 \sigma(z) dA(z) = 1.$$

任取 $f \in L^2(\mathbb{D}, \frac{1}{\sigma})$, 则

$$\begin{aligned} \langle K_{\frac{1}{\sigma}}^0 f, g \rangle_\sigma &= \int_{\mathbb{D}} \sum_{I \in \mathcal{D}^0} \frac{1}{|Q_I|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{D}} f(w) \chi_{Q_I}(w) \frac{1}{\sigma(w)} dA(w) g(z) \chi_{Q_I}(z) \sigma(z) dA(z) \\ &= \sum_{I \in \mathcal{D}^0} \frac{1}{|Q_I|^{\frac{1}{2}}} \int_{Q_I} f(w) \frac{1}{\sigma(w)} dA(w) \int_{Q_I} g(z) \sigma(z) dA(z) \\ &= \sum_{I \in \mathcal{D}^0} \frac{|Q_I|_\sigma |Q_I|_{\frac{1}{\sigma}}}{|Q_I|^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{|Q_I|^{\frac{1}{\sigma}}} \int_{Q_I} f(z) \frac{1}{\sigma(z)} dA(z) \frac{1}{|Q_I|_\sigma} \int_{Q_I} g(z) \sigma(z) dA(z) |Q_I| \\ &\leq c_8 \sum_{I \in \mathcal{D}^0} |Q_I| \frac{1}{|Q_I|^{\frac{1}{\sigma}}} \int_{Q_I} |f(z)| \frac{1}{\sigma(z)} dA(z) \frac{1}{|Q_I|_\sigma} \int_{Q_I} |g(z)| \sigma(z) dA(z) \\ &\leq 3c_8 \sum_{I \in \mathcal{D}^0} \int_{T_I} \mathcal{M}_{\frac{1}{\sigma}}^0 f(w) \mathcal{M}_\sigma^0 g(z) dA(z) \\ &= 3c_8 \int_{\mathbb{D}} \mathcal{M}_{\frac{1}{\sigma}}^0 f(w) \mathcal{M}_\sigma^0 g(z) dA(z) \\ &\leq c_9 \|f\|_{L^2(\mathbb{D}, \frac{1}{\sigma})} \|g\|_{L^2(\mathbb{D}, \sigma)}, \end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{M}_\sigma^0 f(z) = \sup_{z \in Q_I} \frac{1}{|Q_I|_\sigma} \int_{Q_I} |f(w)| \sigma(w) dA(w).$$

最后一个等式是因为 $\{T_I : I \in \mathcal{D}^0\}$ 是单位圆盘的一个划分. 最后一个不等式是因为对任何权 σ 和 $1 < p < \infty$, $\mathcal{M}_\sigma^0$ 是 $L^p(\mathbb{D}, \sigma)$ 上的有界算子 (参见文献 [9, 定理 2.5]). 这证明了引理 3, 从而完成了定理 2 的证明. $\square$

4 定理 3 的证明

定理 3 的证明 先证必要性. 存在常数 $c_{10} > 0$, 任取 $t > 0$, $f > 0$ 及 $f \in L^2(\mathbb{D}, \sigma)$ 使得

$$|\{z \in \mathbb{D} : (M_{\frac{1}{2}} f)(z) > t\}|_\sigma \leq \frac{c_{10}}{t^2} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \sigma(z) dA(z).$$

固定 Carleson 盒子 Q_I , 任取 $\epsilon > 0$, 考虑

$$t_\epsilon = \frac{1}{|Q_I|^{\frac{1}{2}}} \int_{Q_I} |f(z)| dA(z) - \epsilon,$$

则有

$$|Q_I|_\sigma \leq |\{z \in \mathbb{D} : (M_{\frac{1}{2}}f)(z) > t_\epsilon\}|_\sigma \leq \frac{c_{10}}{(t_\epsilon)^2} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \sigma(z) dA(z).$$

从而,

$$t_\epsilon^2 \leq \frac{c_{10}}{|Q_I|_\sigma} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \sigma(z) dA(z).$$

这就得到

$$\left(\frac{1}{|Q_I|^{\frac{1}{2}}} \int_{Q_I} f(z) dA(z) - \epsilon \right)^2 \leq \frac{c_{10}}{|Q_I|_\sigma} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \sigma(z) dA(z).$$

令 $\epsilon \rightarrow 0$, 可得

$$\left(\frac{\int_{Q_I} f(z) dA(z)}{|Q_I|^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \leq \frac{c_{10}}{|Q_I|_\sigma} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \sigma(z) dA(z).$$

取 $f(z) = \frac{1}{\sigma(z)} \chi_{Q_I}(z)$, 则

$$\frac{|Q_I|_\sigma |Q_I|^{\frac{1}{\sigma}}}{|Q_I|} \leq c_{10}.$$

下证充分性. 假设 $R_{2,2}(\sigma) < \infty$. 根据 (2.1), 只需证明 $M_{\frac{1}{2}}^0$ 和 $M_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}}$ 都是弱 (2,2) 的, 即 $M_{\frac{1}{2}}^\beta : L^2(\mathbb{D}, \sigma) \rightarrow L^{2,\infty}(\mathbb{D}, \sigma)$ 有界. 不失一般性, 我们证明 $M_{\frac{1}{2}}^0$ 是弱 (2,2) 的.

用 $\mathbb{Z}_+$ 表示非负整数. 任取 $k \in \mathbb{Z}_+$, 得到单位圆周的划分 $\mathbb{T}$ 满足

$$\mathbb{T} = \bigcup_{j=0}^{2^k-1} I_j,$$

其中 $I_j = [j, j+1) \frac{2\pi}{2^k}$. 用 $\mathcal{Q}_k$ 表示由此划分诱导的 Carleson 盒子系统. 注意到

$$\mathcal{Q}^0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{Q}_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

取 $f > 0, t > 0$,

$$E_t = \{z \in \mathbb{D} : (M_{\frac{1}{2}}^0 f)(z) > t\}.$$

考察集族

$$\mathcal{Y}_k = \left\{ Q_I \in \mathcal{Q}_k : \frac{1}{|Q_I|^{\frac{1}{2}}} \int_{Q_I} |f(w)| dA(w) > t, \frac{1}{|Q'_I|^{\frac{1}{2}}} \int_{Q'_I} |f(w)| dA(w) \leq t, Q_I \subsetneq Q'_I \in \mathcal{Q}^0 \right\}.$$

定义

$$\Omega_k = \bigcup_{Q_I \in \mathcal{Y}_k} Q_I.$$

我们断言

$$E_t = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_k.$$

显然, $\Omega_k \subset E_t$. 任取 $z \in E_t$, 注意到只有有限个 Carleson 盒子 $Q_I \in \mathcal{Q}^0$ 使得 $z \in Q_I$. 考虑 $z \in Q_J \in \mathcal{Q}^0$ 是使得

$$\frac{1}{|Q_J|^{\frac{1}{2}}} \int_{Q_J} |f(w)| dA(w) > t$$

的最大的 Carleson 盒子, 则 $Q_J \in \mathcal{Y}_{k_0}$. 于是, 对任意 $Q_J \subsetneq Q_{I'} \in \mathcal{Q}^0$, 都有

$$\frac{1}{|Q_{I'}|^{\frac{1}{2}}} \int_{Q_{I'}} |f(w)| dA(w) \leq t.$$

这得到 $z \in \Omega_{k_0}$, 从而,

$$E_t \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_k.$$

进一步, 如果 $k \neq j$, 则 $\Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset$. 假设 $j < k$, 令 $z \in \Omega_k \cap \Omega_j$, 则存在 Carleson 盒子 $Q_I \in \mathcal{Y}_k$, $Q'_I \in \mathcal{Y}_j$ 使得

$$z \in Q_I \subset Q'_I.$$

因为 $Q_I \in \mathcal{Y}_k$, 对于任何 $Q_I \subsetneq \tilde{Q}_I$, 有

$$\frac{1}{|\tilde{Q}_I|^{\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{Q}_I} f(w) dA(w) \leq t,$$

而 $j < k$, 与 $z \in Q_I \subset Q'_I \in \mathcal{Y}_j$ 矛盾. 从而,

$$\begin{aligned} |E_t|_{\sigma} &= \sum_{k=0}^{\infty} |\Omega_k|_{\sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{Q_I \in \mathcal{Y}_k} |Q_I|_{\sigma} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{Q_I \in \mathcal{Y}_k} \frac{1}{t^2} \int_{Q_I} \left[\frac{1}{|Q_I|^{\frac{1}{2}}} \int_{Q_I} f(w) dA(w) \right]^2 \sigma(z) dA(z) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{Q_I \in \mathcal{Y}_k} \frac{1}{t^2} \frac{|Q_I|_{\sigma}}{|Q_I|} \left[\int_{Q_I} |f(w)|^2 \sigma(w) dA(w) \right] |Q_I|_{\frac{1}{\sigma}} \\ &\leq c_{11} \frac{1}{t^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{Q_I \in \mathcal{Y}_k} \int_{Q_I} |f(w)|^2 \sigma(w) dA(w) \\ &\leq c_{11} \frac{\|f\|_{L^2(\sigma)}^2}{t^2}, \end{aligned}$$

其中

$$c_{11} = \sup_{I \subset \mathbb{T}} \frac{|Q_I|_{\sigma} |Q_I|_{\sigma^{-1}}}{|Q_I|} < \infty.$$

这就得到 M_0^d 是弱 (2, 2) 的. 同样的讨论可得到 $M_{\frac{1}{3}}^d$ 是弱 (2, 2) 的, 从而, 定理 3 得证. $\square$

致谢 对审稿人提出的宝贵意见表示衷心感谢.

参考文献

- 1 Bekolle D, Bonami A. Inegalites a poids pour le noyau de Bergman. C R Acad Sci Paris Ser A-B, 1978, 286: 775–778
- 2 Aleman A, Pott S, Reguera M. Sarason conjecture on the Bergman space. ArXiv:1304.1750, 2013
- 3 Cheng G Z, Fang X, Wang Z P, et al. Three Measure-theoretic Problems for the Hardy Kernel. Submitted, 2014
- 4 Pott S, Reguera M. Sharp Bekolle estimates for the Bergman projection. J Funct Anal, 2013, 265: 3233–3244
- 5 Fang X, Guo K Y, Wang Z P. Composition operators on the Bergman space via quasiconformal mappings. Submitted, 2014
- 6 Mei T. BMO is the intersection of two translates of dyadic BMO. C R Math Acad Sci Paris, 2003, 336: 1003–1006
- 7 Bergh J, Lofstrom J. Interpolation Spaces-An Introduction. New York: Springer-Verlag, 1976

8 Reguera M. On Muckenhoupt-Wheeden conjecture. *Adv Math*, 2011, 227: 1436–1450

9 Tolsa X. *Analytic Capacity, the Cauchy Transform, and Non-Homogeneous Calderon-Zygmund Theory*. Basel: Birkhäuser, 2014

The one weight inequality of integral operator induced by Hardy kernel

GUO KunYu & WANG ZiPeng

Abstract The integral operator induced by the reproducing kernel of $H^2(\mathbb{D})$ plays an important role in operator theory on the function spaces. In this paper, by the techniques of discrete harmonic analysis and dyadic methods, the one weight inequality of integral operator induced by Hardy kernel is established. We introduce $R_{2,2}$ -weight and characterize it by a Carleson box maximal operator $M_{\frac{1}{2}}$. Meanwhile, we discuss the p - q boundedness of $M_{\frac{1}{2}}$.

Keywords one weight inequality, K -operator, $R_{2,2}$ -weight

MSC(2010) 47B34, 42B20

doi: 10.1360/N012015-00131