带强阻尼的 Kirchhoff 型吊桥方程指数吸引子的存在性

贾澜, 马巧珍*

西北师范大学数学与统计学院, 兰州 730070

E-mail: jia8181@163.com, maqzh@nwnu.edu.cn

收稿日期: 2017-01-06; 接受日期: 2017-11-14; 网络出版日期: 2018-03-12; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11561064 和 11361053) 和甘肃省自然科学基金 (批准号: 1107RJZA223) 资助项目

摘要 利用算子半群分解技巧, 本文研究 Kirchhoff 型吊桥方程长时间动力学行为. 在较弱的非线性条件下, 首先验证解半群在两个空间中的渐近紧性; 其次运用算子分解技巧, 得到带有强阻尼的 Kirchhoff 型吊桥方程指数吸引子的存在性.

关键词 Kirchhoff 型吊桥方程 指数吸引子 算子分解

MSC (2010) 主题分类 35Q35, 35B40, 35B41

1 引言

为书写方便, 记 $\Omega = [0, L]$, $\nabla u = u_x$, $-\Delta u = -u_{xx}$, $\Delta^2 u = u_{xxxx}$. 本文考虑带强阻尼的 Kirchhoff 型吊桥方程

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u_t + \Delta^2 u - \left(1 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u + k^2 u^+ + f(u) = g(x), & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = \Delta u(0) = u(L) = \Delta u(L) = 0, \\ u(x, 0) = u_0, \quad u_t(x, 0) = u_1, \end{cases} \quad x \in \Omega \quad (1.1)$$

指数吸引子的存在性, 其中 k^2 是弹性系数, 外力项 $g \in L^2(\Omega)$, 函数 $u^+ = \max\{u, 0\}$. 方程 (1.1) 描述了吊桥路面的横向运动, 是由 Lazer 和 McKenna^[1] 作为非线性分析的新问题重新提出的. 此后, 一些学者对该模型进行了研究, 但他们主要讨论解的存在性, 参见文献 [2–5] 及相关文献. 文献 [6, 7] 首次证得单个及耦合吊桥方程弱解的全局吸引子. 2009 年, Ma 和 Zhong^[8] 利用 (C) 条件和能量估计的方法获得此类方程的强全局吸引子的存在性. 同年, Park 和 Kang^[9] 得到了非自治吊桥方程的拉回吸引子. 随后, Kang 和 Park^[10] 证明了带非线性阻尼吊桥方程全局吸引子的存在性. Ma 和 Wang^[11] 讨论了非自治耦合吊桥方程拉回 $\mathcal{D}$ 吸引子的存在性. 最近, Kang^[12] 利用 Lyapunov 函数的方法得到了带有记忆项吊桥方程的全局吸引子. 文献 [13] 获得了可拉伸吊桥方程全局吸引子的存在性和正则性. 本文继续研究可拉伸吊桥方程 (1.1) 的指数吸引子.

英文引用格式: Jia L, Ma Q Z. The existence of exponential attractors for strong damped Kirchhoff-type suspension bridge equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 909–922, doi: 10.1360/N012017-00004

2 函数集和预备知识

不失一般性, 定义 Hilbert 空间 $V_s = D(A^{\frac{s}{4}})$, 其内积和范数分别为

$$(u, v)_s = (A^{\frac{s}{4}}u, A^{\frac{s}{4}}v), \quad \|u\|_{V_s}^2 = \|A^{\frac{s}{4}}u\|^2,$$

当 $s = 0$ 时, 记 $H = L^2(\Omega)$; 当 $s = 2$ 时, 记 $V_2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 且相应的内积和范数分别为

$$\begin{aligned} (u, v)_H &= (u, v), \quad \|u\|_H^2 = \|u\|^2, \\ (u, v)_2 &= (A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v), \quad \|u\|_{V_2}^2 = \|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 = \|\Delta u\|^2. \end{aligned}$$

用 $\|Au\|$ 表示 $D(A)$ 的范数, 其中 $A = \Delta^2$. 显然,

$$V_4 \subset V_2 \subset H = H^* \subset V_2^*,$$

其中 H^* 和 V_2^* 分别为 H 和 V_2 的对偶空间.

特别地, 有紧嵌入 $V_{s+1} \hookrightarrow V_s$ 和 Poincaré 不等式

$$\lambda_1 \|u\|_s^2 \leq \|u\|_{s+1}^2, \quad \forall u \in V_{s+1},$$

其中 λ_1^2 是 A 的第一特征值.

此外, 非线性项满足如下条件: $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 并且

$$\liminf_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} \geq -\lambda_1, \quad F(s) = \int_0^s f(r)dr, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

$$|f'(s)| \leq k_0(1 + |s|^p), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad p \geq 1. \quad (2.2)$$

由 (2.1) 可知, 存在两个正常数 K_1 、 K_2 和 $\eta = \eta(\lambda_1) > 0$, 使得

$$f(s)s + \eta s^2 + K_1 \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

$$F(s) + \eta s^2 + K_2 \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

最后定义如下 Hilbert 空间并赋予范数:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= V_2 \times H, \quad \|z\|_{\mathcal{H}} = \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}} = \left(\frac{1}{2}(\|\Delta u\|^2 + \|u_t\|^2) \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathcal{W} &= V_3 \times V_1, \quad \|z\|_{\mathcal{W}} = \|(u, u_t)\|_{\mathcal{W}} = \left(\frac{1}{2}(\|\Delta \nabla u\|^2 + \|\nabla u_t\|^2) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

为了得到问题 (1.1) 的指数吸引子, 我们还需要下面的抽象结果:

定义 2.1 ^[2] (指数吸引子) 设 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 为完备度量空间 X 中的半群, 集合 $M \subset X$ 称为半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 的指数吸引子, 如果下面的三个条件成立:

- (i) 集合 M 在 X 中紧且有有限的分形维数;
- (ii) 集合 M 为正不变的, 即 $S(t)M \subset M$;
- (iii) 集合 $M \subset X$ 为半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 的指数吸引集, 即对每一个有界集 $B \subset X$, 存在常数 $k = k(B)$, $\iota > 0$, 使得

$$\text{dist}(S(t), B) \leq ke^{-\iota t}.$$

定理 2.1^[14, 15] 设 $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}$ 是不变紧子集, 且 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{H}$ 的紧嵌入, 存在时间 $t_* > 0$, 使得如下条件成立:

- (i) 映射 $(t, z_0) \mapsto S(t)z_0$, 即 $[0, t_*] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 是 Lipschitz 连续的;
- (ii) 映射 $S(t_*) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 有如下分解形式:

$$S(t_*) = S_0 + S_1, \quad S_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{H}, \quad S_1 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{W},$$

其中 S_0 满足

$$\|S_0(z_1) - S_0(z_2)\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{8}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}},$$

且 S_1 满足

$$\|S_1(z_1) - S_1(z_2)\|_{\mathcal{W}} \leq C_*\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}},$$

其中 $C_* > 0$, 则半群 $\{S(t)\}$ 存在指数吸引子.

定理 2.2^[16, 17] (解的存在唯一性) 假设条件 (2.1) 和 (2.2) 成立, 若 $g \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in V_2$, $u_1 \in H$, 则问题 (1.1) 有唯一解 $u(t)$ 满足

$$u(t) \in C([0, T], V_2), \quad u_t(t) \in C([0, T], H),$$

并且 $\{u_0, u_1\} \rightarrow \{u(t), u_t(t)\}$ 在 $\mathcal{H}$ 上连续.

利用定理 2.2, 可以定义与问题 (1.1) 相关的 C^0 半群 $S(t)$, 即

$$S(t) : \{u_0, u_1\} \rightarrow \{u(t), u_t(t)\}, \quad t > 0,$$

且 $S(t)$ 将 $\mathcal{H}$ 映射到自己本身.

3 有界吸收集

3.1 $\mathcal{H}$ 中的有界吸收集

选取 $0 < \varepsilon < 1$, 用 $v = u_t + \varepsilon u$ 和 (1.1) 在 H 中做内积得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|v\|^2 + (1 - \varepsilon) \|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^4 + k^2 \|u^+\|^2 \right) - \varepsilon \|v\|^2 + \varepsilon (1 - \varepsilon) \|\Delta u\|^2 \\ & + \varepsilon^2 (u, v) + \|\Delta v\|^2 + \varepsilon \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \|\nabla u\|^4 + \varepsilon k^2 \|u^+\|^2 + (f(u), v) \\ & = (g, v). \end{aligned} \quad (3.1)$$

结合 (2.1)、(2.2)、Hölder 不等式、Young 不等式和 Poincaré 不等式, 有

$$\begin{aligned} & -\varepsilon \|v\|^2 + \varepsilon (1 - \varepsilon) \|\Delta u\|^2 + \varepsilon^2 (u, v) + \|\Delta v\|^2 \\ & \geq -\varepsilon \|v\|^2 - \varepsilon^2 \|u\| \|v\| + \lambda_1^2 \|v\|^2 + \varepsilon (1 - \varepsilon) \|\Delta u\|^2 \\ & \geq \left(\lambda_1^2 - \frac{5\varepsilon}{4} \right) \|v\|^2 + \varepsilon \left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda_1^2} \right) \|\Delta u\|^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

此外,

$$(f(u), v) = (f(u), u_t + \varepsilon u) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u) dx + \varepsilon \int_{\Omega} f(u) u dx, \quad (3.3)$$

以及

$$(g, v) = (g, u_t + \varepsilon u) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} g u dx + \varepsilon \int_{\Omega} g u dx. \quad (3.4)$$

将 (3.2)–(3.4) 代入 (3.1), 整理可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|v\|^2 + (1 - \varepsilon) \|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^4 + k^2 \|u^+\|^2 + 2 \int_{\Omega} F(u) dx - 2 \int_{\Omega} g u dx \right) \\ & + \left(\lambda_1^2 - \frac{5\varepsilon}{4} \right) \|v\|^2 + \varepsilon \left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda_1^2} \right) \|\Delta u\|^2 + \varepsilon \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \|\nabla u\|^4 + \varepsilon k^2 \|u^+\|^2 \\ & + \varepsilon \int_{\Omega} f(u) u dx - \varepsilon \int_{\Omega} g u dx \\ & \leq 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

令

$$E(t) = \|v\|^2 + (1 - \varepsilon) \|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^4 + k^2 \|u^+\|^2 + 2 \int_{\Omega} F(u) dx - 2 \int_{\Omega} g u dx, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} I(t) &= \left(\lambda_1^2 - \frac{5\varepsilon}{4} \right) \|v\|^2 + \varepsilon \left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda_1^2} \right) \|\Delta u\|^2 + \varepsilon \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \|\nabla u\|^4 \\ &+ \varepsilon k^2 \|u^+\|^2 + \varepsilon \int_{\Omega} f(u) u dx - \varepsilon \int_{\Omega} g u dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

根据 (2.3)、(2.4)、(3.6) 和 (3.7), 利用 Sobolev 紧嵌入定理可得

$$\begin{aligned} E(t) &\geq \|v\|^2 + (1 - \varepsilon) \|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^4 + k^2 \|u^+\|^2 - 2 \int_{\Omega} (\eta u^2 + K_2) dx - \frac{2}{\lambda_1^2} \|g\|^2 - \frac{\lambda_1^2}{2} \|u\|^2 \\ &\geq \|v\|^2 + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^4 + k^2 \|u^+\|^2 - 2\eta \|u\|^2 - 2K_2 |\Omega| - \frac{2}{\lambda_1^2} \|g\|^2 \\ &\geq \|v\|^2 + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon - \frac{2\eta}{\lambda_1^2} \right) \|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^4 + k^2 \|u^+\|^2 - M_1, \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中 $M_1 = \frac{2}{\lambda_1^2} \|g\|^2 + 2K_2 |\Omega|$. 类似地,

$$I(t) \geq \left(\lambda_1^2 - \frac{5\varepsilon}{4} \right) \|v\|^2 + \varepsilon \left(\frac{1}{2} - \varepsilon - \frac{\eta}{\lambda_1^2} - \frac{\varepsilon}{\lambda_1^2} \right) \|\Delta u\|^2 + \varepsilon \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \|\nabla u\|^4 + \varepsilon k^2 \|u^+\|^2 - M_2, \quad (3.9)$$

其中 $M_2 = \frac{\varepsilon}{2\lambda_1^2} \|g\|^2 + \varepsilon K_1 |\Omega|$.

取 ε 和 η 充分小, 使得

$$\frac{1}{2} - \varepsilon - \frac{\eta}{\lambda_1^2} - \frac{\varepsilon}{\lambda_1^2} > 0, \quad \lambda_1^2 - \frac{5\varepsilon}{4} > 0,$$

并令 $C_1 = \min\{\frac{1}{2} - \varepsilon - \frac{\eta}{\lambda_1^2} - \frac{\varepsilon}{\lambda_1^2}, \lambda_1^2 - \frac{5\varepsilon}{4}, \varepsilon\}$, 则

$$E(t) \geq C_1 (\|v\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^4 + k^2 \|u^+\|^2) - M_1, \quad (3.10)$$

$$I(t) \geq C_1(\|v\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^4 + k^2\|u^+\|^2) - M_2. \quad (3.11)$$

从而有

$$\frac{d}{dt}E(t) + 2I(t) \leq 0,$$

即

$$E(t) \leq - \int_0^t 2I(\tau) d\tau + E(0). \quad (3.12)$$

故由 (3.10)–(3.12) 可知,

$$\begin{aligned} & C_1(\|v\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^4 + k^2\|u^+\|^2) - M_1 \\ & \leq - \int_0^t 2[C_1(\|v\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^4 + k^2\|u^+\|^2) - M_2] d\tau + E(0). \end{aligned} \quad (3.13)$$

因此, 对 $\forall \rho_1 > \frac{2M_2}{C_1}$, 存在 $t_1 = t_1(B)$, 使得

$$\|v(t_1)\|^2 + \|\Delta u(t_1)\|^2 + \|\nabla u(t_1)\|^2 + \|\nabla u(t_1)\|^4 + k^2\|u^+(t_1)\|^2 \leq \rho_1. \quad (3.14)$$

所以, 若 u 是方程 (1.1) 的解, 令 $B_1 = \bigcup_{t \geq 0} S(t)B'_1$, 其中

$$B'_1 = \{(u_0, u_1) \in \mathcal{H} : \|u_1 + \varepsilon u_0\|^2 + \|\Delta u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^4 + k^2\|u_0^+\|^2 \leq \rho_1\},$$

则 B_1 是半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 在 $\mathcal{H}$ 中的有界吸收集. 从而有如下定理:

定理 3.1 假设非线性项 f 满足 (2.1) 和 (2.2), $g \in L^2(\Omega)$, 则球 $B_1 = B_{\mathcal{H}}(0, \rho_1)$ 是问题 (1.1) 生成的解半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 在 $\mathcal{H}$ 中的有界吸收集, 即对 $\mathcal{H}$ 中任意有界集 B , 存在 $t_1 = t_1(B)$, 使得当 $t \geq t_1(B)$ 时, 有 $S(t)B \subset B_1$.

推论 3.1 假设非线性项 f 满足 (2.1) 和 (2.2), $g \in L^2(\Omega)$. 对任意 $R > 0$ 和初值 $z_0 = (u_0, u_1)$, 存在 $t_1 = t_1(R)$, 当 $\|z_0\|_{\mathcal{H}} \leq R$ 时, 成立

$$\|S(t)z_0\|_{\mathcal{H}} \leq \rho_1, \quad \forall t \geq t_1.$$

3.2 $\mathcal{W}$ 中的有界吸收集

定理 3.2 假设非线性项 f 满足 (2.1) 和 (2.2), $g \in L^2(\Omega)$, 则球 $B_2 = B_{\mathcal{W}}(0, \rho_2)$ 是问题 (1.1) 生成的解半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 在 $\mathcal{W}$ 中的有界吸收集, 其中

$$\rho_2 > \sqrt{\frac{C_2}{\varepsilon_1}}, \quad \varepsilon_1 = \min \left\{ \lambda_1^2 - \frac{3\varepsilon}{2}, \varepsilon \left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda_1^2} \right), \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{4}, \varepsilon \right\}.$$

证明 用 $-\Delta v = -\Delta u_t - \varepsilon \Delta u$ 和 (1.1) 在 H 中做内积, 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\nabla v\|^2 + (1 - \varepsilon) \|\Delta \nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \|\Delta u\|^2) - \varepsilon \|\nabla v\|^2 + \varepsilon(1 - \varepsilon) \|\Delta \nabla u\|^2 + \varepsilon^2 (\nabla u, \nabla v) \\ & + \|\Delta \nabla v\|^2 + \varepsilon \|\Delta u\|^2 + \varepsilon \|\nabla u\|^2 \|\Delta u\|^2 - \|\Delta u\|^2 (\nabla u, \nabla u_t) + k^2 (u^+, -\Delta v) + (f(u), -\Delta v) \\ & = (g, -\Delta v). \end{aligned} \quad (3.15)$$

结合 (2.1)、(2.2)、定理 3.1 中的有界性以及 Hölder 不等式、Young 不等式和 Poincaré 不等式, 有

$$\begin{aligned}
 & -\varepsilon\|\nabla v\|^2 + \varepsilon(1-\varepsilon)\|\Delta\nabla u\|^2 + \varepsilon^2(\nabla u, \nabla v) + \|\Delta\nabla v\|^2 - \|\Delta u\|^2(\nabla u, \nabla u_t) \\
 & \geq \left(\lambda_1^2 - \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)\|\nabla v\|^2 + \varepsilon\left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda_1^2}\right)\|\Delta\nabla u\|^2 - \|\Delta u\|^2\|\Delta u\|\|u_t\| \\
 & \geq \left(\lambda_1^2 - \frac{5\varepsilon}{4}\right)\|\nabla v\|^2 + \varepsilon\left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda_1^2}\right)\|\Delta\nabla u\|^2 - \rho_1^4,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

并且

$$\begin{aligned}
 k^2(u^+, -\Delta v) &= \frac{d}{dt}k^2(u^+, -\Delta u) - k^2((u^+)_t, -\Delta u) + \varepsilon k^2(u^+, -\Delta u) \\
 &\geq \frac{d}{dt}k^2(u^+, -\Delta u) - k^2\|(u^+)_t\|\|\Delta u\| + \varepsilon k^2(u^+, -\Delta u) \\
 &\geq \frac{d}{dt}k^2(u^+, -\Delta u) - k^2\|u_t\|\|\Delta u\| + \varepsilon k^2(u^+, -\Delta u) \\
 &\geq \frac{d}{dt}k^2(u^+, -\Delta u) - \frac{\varepsilon^2}{4}\|\Delta u\|^2 - \frac{k^4}{\varepsilon^2}\|u_t\|^2 + \varepsilon k^2(u^+, -\Delta u) \\
 &\geq \frac{d}{dt}k^2(u^+, -\Delta u) - \frac{\varepsilon^2}{4}\|\Delta u\|^2 - \frac{k^4\rho_1}{\varepsilon^2} + \varepsilon k^2(u^+, -\Delta u).
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

根据 (2.2) 和定理 3.1, 利用 Sobolev 嵌入定理可知, 存在常数 $K > 0$, 使得

$$\|f(u)\|_{L^\infty} < K, \quad \|f'(u)\|_{L^\infty} < K, \quad \|f''(u)\|_{L^\infty} < K, \tag{3.18}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 |(f(u), -\Delta v)| &\leq |(f'(u)\nabla u, \nabla v)| \leq \int_{\Omega} |f'(u)| \cdot |\nabla u| \cdot |\nabla v| dx \leq K\|\nabla u\|\|\nabla v\| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{4}\|\nabla v\|^2 + \frac{K^2\rho_1^2}{\varepsilon},
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

并且

$$(g, -\Delta v) = (g, -\Delta u_t - \varepsilon\Delta u) = \frac{d}{dt}(g, -\Delta u) + \varepsilon(g, -\Delta u). \tag{3.20}$$

将 (3.16)–(3.20) 代入 (3.15), 整理可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt}(\|\nabla v\|^2 + (1-\varepsilon)\|\Delta\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2\|\Delta u\|^2 + 2k^2(u^+, -\Delta u) - 2(g, -\Delta u)) \\
 & + 2\left(\lambda_1^2 - \frac{3\varepsilon}{2}\right)\|\nabla v\|^2 + 2\varepsilon\left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda_1^2}\right)\|\Delta\nabla u\|^2 + 2\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)\|\Delta u\|^2 \\
 & + 2\varepsilon\|\nabla u\|^2\|\Delta u\|^2 + 2\varepsilon k^2(u^+, -\Delta u) - 2\varepsilon(g, -\Delta u) \\
 & \leq \frac{2K^2\rho_1^2}{\varepsilon} + \frac{2k^4\rho_1}{\varepsilon^2} + 2\rho_1^4.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

取充分小的 $\varepsilon > 0$, 令

$$\varepsilon_1 = \min \left\{ \lambda_1^2 - \frac{3\varepsilon}{2}, \varepsilon \left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda_1^2} \right), \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{4}, \varepsilon \right\},$$

则可将 (3.21) 写为

$$\frac{d}{dt}(\|\nabla v\|^2 + (1-\varepsilon)\|\Delta\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^2\|\Delta u\|^2 + \|\Delta u - k^2u^+ + g\|^2)$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon_1 (\|\nabla v\|^2 + \|\Delta \nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \|\Delta u\|^2 + \|\Delta u - k^2 u^+ + g\|^2) \\
& \leq \frac{2K^2 \rho_1^2}{\varepsilon} + \frac{2k^4 \rho_1}{\varepsilon^2} + 2\rho_1^4 + 2k^4 \int_{\Omega} u^+(u_t^+) dx + \varepsilon_1 k^4 \|u^+\|^2 + \varepsilon_1 \|g\|^2.
\end{aligned} \quad (3.22)$$

结合 Hölder 不等式和定理 3.1 中的有界性, 可得

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} (\|\nabla v\|^2 + (1 - \varepsilon) \|\Delta \nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \|\Delta u\|^2 + \|\Delta u - k^2 u^+ + g\|^2) \\
& + \varepsilon_1 (\|\nabla v\|^2 + \|\Delta \nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \|\Delta u\|^2 + \|\Delta u - k^2 u^+ + g\|^2) \\
& \leq C_2,
\end{aligned} \quad (3.23)$$

其中

$$C_2 = \left(\frac{2K^2}{\varepsilon} + 2\rho_1^2 + 2k^4 + \varepsilon_1 k^4 \right) \rho_1^2 + \frac{2k^4 \rho_1}{\varepsilon^2} + \varepsilon_1 \|g\|^2.$$

取 ε 充分小, 再利用 Gronwall 引理, 有

$$\begin{aligned}
& \|\nabla v(t)\|^2 + (1 - \varepsilon) \|\Delta \nabla u(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 \|\Delta u(t)\|^2 + \|\Delta u(t) - k^2 u^+(t) + g\|^2 \\
& \leq (\|\nabla u_1 + \varepsilon \nabla u_0\|^2 + \|\Delta \nabla u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 \|\Delta u_0\|^2 + \|\Delta u_0 - k^2 u_0^+ + g\|^2) \exp(-\varepsilon_1 t) \\
& + \frac{C_2}{\varepsilon_1} (1 - \exp(-\varepsilon_1 t)).
\end{aligned}$$

因此, 对 $\forall \rho_2 > \sqrt{\frac{C_2}{\varepsilon_1}}$, 当 $t \geq t_1$ 时,

$$\|\nabla v(t)\|^2 + (1 - \varepsilon) \|\Delta \nabla u(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 \|\Delta u(t)\|^2 + \|\Delta u(t) - k^2 u^+(t) + g\|^2 \leq \rho_2. \quad (3.24)$$

所以, 若 u 是方程 (1.1) 的解, 令 $B_2 = \bigcup_{t \geq 0} S(t)B'_2$, 其中

$$B'_2 = \{(u_0, u_1) \in \mathcal{W} : \|\nabla u_1 + \varepsilon \nabla u_0\|^2 + (1 - \varepsilon) \|\Delta \nabla u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 \|\Delta u_0\|^2 + \|\Delta u_0 - k^2 u_0^+ + g\|^2 \leq \rho_2\}.$$

则 B_2 为问题 (1.1) 的解半群在 W 中的有界吸收集. 证毕. $\square$

4 指数吸引子

定理 4.1 对任意的 $R > 0$ 和任意的初值 $z_1 = (u_{10}, u_{11})$, $z_2 = (u_{20}, u_{21}) \in \mathcal{H}$, 使得 $\|z_i\|_{\mathcal{H}} \leq R$ ($i = 1, 2$), 那么, 存在常数 P , 有

$$\|S(t)z_1 - S(t)z_2\|_{\mathcal{H}} \leq e^{Pt} \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad (4.1)$$

其中 P 是与 λ_1 、 ρ_1 、 ε 、 L 、 k 和 K 有关的常数.

证明 设 $z^1 = (u^1, u_t^1)$ 和 $z^2 = (u^2, u_t^2)$ 分别是以 $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ 为初值的解. 令 $\bar{u} = u^1 - u^2$, 它满足

$$\bar{u}_{tt} + \Delta^2 \bar{u}_t + \Delta^2 \bar{u} - \Delta \bar{u} - (\|\nabla u^1\|^2 \Delta u^1 - \|\nabla u^2\|^2 \Delta u^2) + k^2(u^{1+} - u^{2+}) + f(u^1) - f(u^2) = 0. \quad (4.2)$$

用 $\bar{u}_t$ 与 (4.2) 做内积, 得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\Delta \bar{u}\|^2 + \|\bar{u}_t\|^2 + \|\nabla \bar{u}\|^2) + \|\Delta \bar{u}_t\|^2$$

$$= (\|\nabla u^1\|^2 \Delta u^1 - \|\nabla u^2\|^2 \Delta u^2, \bar{u}_t) + k^2((u^{2+} - u^{1+}), \bar{u}_t) + (f(u^2) - f(u^1), \bar{u}_t). \quad (4.3)$$

结合 (3.18) 及 Hölder 不等式、Young 不等式和 Poincaré 不等式, 有

$$\begin{aligned} (\|\nabla u^1\|^2 \Delta u^1 - \|\nabla u^2\|^2 \Delta u^2, \bar{u}_t) &= (\|\nabla u^1\|^2 \Delta u^1 - \|\nabla u^1\|^2 \Delta u^2, \bar{u}_t) + (\|\nabla u^1\|^2 \Delta u^2 - \|\nabla u^2\|^2 \Delta u^2, \bar{u}_t) \\ &\leq \|\nabla u^1\|^2 \|\Delta \bar{u}\| \|\bar{u}_t\| + (\|\nabla u^1\| + \|\nabla u^2\|)(\|\nabla u^1\| - \|\nabla u^2\|) \|\Delta u^2\| \|\bar{u}_t\| \\ &\leq \rho_1 \|\Delta \bar{u}\| \|\bar{u}_t\| + 2\rho_1^2 \|\nabla u^1 - \nabla u^2\| \|\bar{u}_t\| \leq \rho_1 \|\Delta \bar{u}\| \|\bar{u}_t\| + 2\rho_1^2 \|\nabla \bar{u}\| \|\bar{u}_t\| \\ &\leq \frac{\rho_1^2}{\varepsilon} \|\Delta \bar{u}\|^2 + \frac{\varepsilon}{4} \|\bar{u}_t\|^2 + \frac{4\rho_1^4}{\varepsilon} \|\nabla \bar{u}\|^2 + \frac{\varepsilon}{4} \|\bar{u}_t\|^2 \\ &\leq \left(\frac{\rho_1^2}{\varepsilon} + \frac{4\rho_1^4}{\varepsilon \lambda_1} \right) \|\Delta \bar{u}\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\bar{u}_t\|^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

和

$$(k^2(u^{2+} - u^{1+}), \bar{u}_t) \leq k^2 \|u^{2+} - u^{1+}\| \|\bar{u}_t\| \leq Lk^2 \|u^2 - u^1\| \|\bar{u}_t\| \leq \frac{k^4 L^2}{\varepsilon \lambda_1^2} \|\Delta \bar{u}\|^2 + \frac{\varepsilon}{4} \|\bar{u}_t\|^2, \quad (4.5)$$

以及

$$(f(u^2) - f(u^1), \bar{u}_t) \leq \|f(u^2) - f(u^1)\| \|\bar{u}_t\| \leq K \|\bar{u}\| \|\bar{u}_t\| \leq \frac{K^2}{\varepsilon \lambda_1^2} \|\Delta \bar{u}\|^2 + \frac{\varepsilon}{4} \|\bar{u}_t\|^2. \quad (4.6)$$

将 (4.4)–(4.6) 代入 (4.3), 整理可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\Delta \bar{u}\|^2 + \|\bar{u}_t\|^2 + \|\nabla \bar{u}\|^2) + \|\Delta \bar{u}_t\|^2 \leq \left(\frac{\rho_1^2}{\varepsilon} + \frac{4\rho_1^4}{\varepsilon \lambda_1} + \frac{k^4 L^2}{\varepsilon \lambda_1^2} + \frac{K^2}{\varepsilon \lambda_1^2} \right) \|\Delta \bar{u}\|^2 + \varepsilon \|\bar{u}_t\|^2,$$

进一步放缩, 可变形为

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\Delta \bar{u}\|^2 + \|\bar{u}_t\|^2 + \|\nabla \bar{u}\|^2) \leq P (\|\Delta \bar{u}\|^2 + \|\bar{u}_t\|^2 + \|\nabla \bar{u}\|^2), \quad (4.7)$$

其中 P 是与 λ_1 、 ρ_1 、 ε 、 L 、 k 和 K 有关的常数.

再利用 Gronwall 引理, 则可得 (4.1). □

定理 4.2 存在常数 $M > 0$, 使得

$$\sup_{z_0 \in B_1} \|z_t(t)\|_{\mathcal{H}} \leq M, \quad (4.8)$$

其中 $z_0 = (u_0, u_1)$, $z(t) = (u(t), u_t(t))$.

证明 对问题 (1.1) 求导, 并令 $\hat{u} = u_t$, 则原方程可化为

$$\hat{u}_{tt} + \Delta^2 \hat{u}_t + \Delta^2 \hat{u} - (1 + \|\nabla u\|^2) \Delta \hat{u} - 2\Delta u(-\Delta u, \hat{u}) + k^2(u^+)_t + f'(u)\hat{u} = 0. \quad (4.9)$$

用 $\hat{v} = \hat{u}_t + \varepsilon \hat{u}$ 与上式做内积, 可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\hat{v}\|^2 + (1 - \varepsilon) \|\Delta \hat{u}\|^2 + \|\nabla \hat{u}\|^2) - \varepsilon \|\hat{v}\|^2 + \varepsilon(1 - \varepsilon) \|\Delta \hat{u}\|^2 + \varepsilon^2 (\hat{u}, \hat{v}) + \|\Delta \hat{v}\|^2 + \varepsilon \|\nabla \hat{u}\|^2 \\ &\quad + (-\|\nabla u\|^2 \Delta \hat{u}, \hat{v}) + (-2\Delta u(-\Delta u, \hat{u}), \hat{v}) + (k^2(u^+)_t, \hat{v}) + (f'(u)\hat{u}, \hat{v}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

结合 (3.18)、Hölder 不等式、Young 不等式和 Poincaré 不等式及定理 3.1 和 3.2 中得到的结果, 有

$$-\varepsilon\|\hat{v}\|^2 + \varepsilon(1-\varepsilon)\|\Delta\hat{u}\|^2 + \varepsilon^2(\hat{u}, \hat{v}) + \|\Delta\hat{v}\|^2 \geq \left(\lambda_1^2 - \frac{5\varepsilon}{4}\right)\|\hat{v}\|^2 + \varepsilon\left(1-\varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda_1^2}\right)\|\Delta\hat{u}\|^2 \quad (4.11)$$

和

$$\begin{aligned} (-\|\nabla u\|^2 \Delta\hat{u}, \hat{v}) &= (-\|\nabla u\|^2 \Delta\hat{u}, \hat{u}_t + \varepsilon\hat{u}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \|\nabla\hat{u}\|^2 - \|\nabla\hat{u}\|^2 (\nabla u_t, \nabla u) + \varepsilon \|\nabla u\|^2 \|\nabla\hat{u}\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \|\nabla\hat{u}\|^2 - \|\nabla\hat{u}\|^2 (\nabla u_t, \nabla u) - \varepsilon\rho_1^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \|\nabla\hat{u}\|^2 - \rho_2^2 \rho_1 - \varepsilon\rho_1^2, \end{aligned} \quad (4.12)$$

并且

$$\begin{aligned} |(-2\Delta u(-\Delta u, \hat{u}), \hat{v})| &= \left| -\int_{\Omega} 2\Delta u(x) \left(\int_{\Omega} -\Delta u(y) \hat{u}(y) dy \right) \hat{v}(x) dx \right| \\ &= \left| 2 \int_{\Omega} \Delta u(x) \hat{v}(x) dx \cdot \int_{\Omega} \Delta u(y) \hat{u}(y) dy \right| \\ &\leq 2\|\Delta u\|^2 \cdot \|\hat{v}\| \cdot \|\hat{u}\| \\ &\leq 2\rho_2^3 \cdot \|\hat{v}\| \leq \frac{\rho_2^6}{\varepsilon} + \varepsilon\|\hat{v}\|^2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

以及

$$|(k^2(u^+)_t, \hat{v})| \leq k^2\|(u^+)_t\| \|\hat{v}\| \leq \frac{\lambda_1^2}{2} \|\hat{v}\|^2 + \frac{k^4}{2\lambda_1^2} \|(u^+)_t\|^2 \leq \frac{\lambda_1^2}{2} \|\hat{v}\|^2 + \frac{k^4\rho_1}{2\lambda_1^2}, \quad (4.14)$$

$$|(f'(u)\hat{u}, \hat{v})| \leq K\|\hat{u}\| \|\hat{v}\| \leq \frac{\lambda_1^2}{4} \|\hat{v}\|^2 + \frac{K^2}{\lambda_1^2} \|\hat{u}\|^2 \leq \frac{\lambda_1^2}{4} \|\hat{v}\|^2 + \frac{K^2\rho_1}{\lambda_1^2}. \quad (4.15)$$

将 (4.11)–(4.15) 代入 (4.10), 整理可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\hat{v}\|^2 + (1-\varepsilon)\|\Delta\hat{u}\|^2 + \|\nabla\hat{u}\|^2 + \|\nabla u\|^2 \|\nabla\hat{u}\|^2) \\ &\quad + \left(\frac{\lambda_1^2}{4} - \frac{9\varepsilon}{4} \right) \|\hat{v}\|^2 + \varepsilon \left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda_1^2} \right) \|\Delta\hat{u}\|^2 \\ &\leq \rho_2^2 \rho_1 + \varepsilon\rho_1^2 + \frac{\rho_2^6}{\varepsilon} + \frac{k^4\rho_1}{2\lambda_1^2} + \frac{K^2\rho_1}{\lambda_1^2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

取 ε 充分小, 令

$$\alpha = \min \left\{ \frac{\lambda_1^2}{4} - \frac{9\varepsilon}{4}, \varepsilon \left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda_1^2} \right), 1 \right\},$$

且令

$$Q(t) = \|\hat{v}\|^2 + (1-\varepsilon)\|\Delta\hat{u}\|^2 + \|\nabla\hat{u}\|^2 + \|\nabla u\|^2 \|\nabla\hat{u}\|^2,$$

由定理 3.1 的有界性及范数的等价性, 可得

$$C_3(\|\hat{v}\|^2 + \|\Delta\hat{u}\|^2) \leq Q(t) \leq C_4(\|\hat{v}\|^2 + \|\Delta\hat{u}\|^2) + C_5, \quad (4.17)$$

对 (4.16) 利用 Gronwall 引理并结合 (4.17), 有

$$\|\hat{v}\|^2 + \|\Delta \hat{u}\|^2 \leq C, \quad (4.18)$$

其中 C_3 、 C_4 、 C_5 和 C 都为正常数.

通过比较, 可得出 u_{tt} 和 Δu_t 的有界性. 那么就有

$$\|z_t(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|u_{tt}\|^2 + \|\Delta u_t\|^2 \leq C, \quad (4.19)$$

即

$$\sup_{z_0 \in B_1} \|z_t(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C.$$

接下来利用本文中最重要算子分解法 (即定理 2.2) 来证明指数吸引子的存在性. 对于定理 2.2 中的空间 $\mathcal{X}$, 借助文献 [18] 的方法, 定义

$$\mathcal{X} = \overline{\bigcup_{\tau \geq t_2} S(\tau)B_2}^{\mathcal{H}},$$

根据文献 [18] 中所给出的性质, $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的不变紧子集. □

定理 4.3 对任意 $T > 0$, 映射 $(t, z_0) \mapsto S(t)z_0$, 即 $[0, T] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 是 Lipschitz 连续的.

证明 对任意 $z_1, z_2 \in \mathcal{X}$ 和 $t_1, t_2 \in [0, T]$, 有

$$\|S(t_1)z_1 - S(t_2)z_2\|_{\mathcal{H}} \leq \|S(t_1)z_1 - S(t_1)z_2\|_{\mathcal{H}} + \|S(t_1)z_2 - S(t_2)z_2\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.20)$$

对上述不等式第二项, 由引理 4.2 可得

$$\|S(t_1)z_2 - S(t_2)z_2\|_{\mathcal{H}} = \|z(t_1) - z(t_2)\|_{\mathcal{H}} \leq \int_{t_1}^{t_2} \|z_t(\tau)\|_{\mathcal{H}} d\tau \leq C|t_1 - t_2|,$$

再结合引理 4.1, 代入 (4.20), 有

$$\|S(t_1)z_1 - S(t_2)z_2\|_{\mathcal{H}} \leq L(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}),$$

其中 $L = L(T) \geq 0$. □

定理 4.4 设 $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}$ 是不变紧子集, 且 $\mathcal{W}$ 到 $\mathcal{H}$ 是紧嵌入, 则映射 $S(t_*) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 有如下分解形式:

$$S(t_*) = S_0 + S_1, \quad S_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{H}, \quad S_1 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{W},$$

并且 S_0 和 S_1 满足下列不等式:

$$\|S_0(z_1) - S_0(z_2)\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{8} \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.21)$$

$$\|S_1(z_1) - S_1(z_2)\|_{\mathcal{W}} \leq C_* \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.22)$$

证明 对 $z_0 \in \mathcal{X}$, 用 $S_0 z_0$ 表示方程 (1.1) 的线性齐次问题的解, 则 $S(t)z_0 = S_1(t)z_0 + S_0(t)z_0$. 假设 $z^1 = (u^1, u_t^1)$ 和 $z^2 = (u^2, u_t^2)$ 分别是以 $z_1, z_2 \in \mathcal{X}$ 为初值的解. 令 $\bar{z} = z^1 - z^2 = (\bar{u}, \bar{u}_t)$, 我们将 $\bar{z}$ 分解为

$$\bar{z} = \bar{z}_d + \bar{z}_c = (\bar{v}, \bar{v}_t) + (\bar{w}, \bar{w}_t),$$

其中 $\bar{v}$ 满足

$$\bar{v}_{tt} + \Delta^2 \bar{v}_t + \Delta^2 \bar{v} - \Delta \bar{v} = 0, \quad (4.23)$$

$$\bar{z}_d(0) = z_1 - z_2, \quad (4.24)$$

而 $\bar{w}$ 满足

$$\bar{w}_{tt} + \Delta^2 \bar{w}_t + \Delta^2 \bar{w} - \Delta \bar{w} - \|\nabla u^1\|^2 \Delta u^1 + \|\nabla u^2\|^2 \Delta u^2 + k^2 u^{1+} - k^2 u^{2+} + f(u^1) - f(u^2) = 0, \quad (4.25)$$

$$\bar{z}_c(0) = 0. \quad (4.26)$$

显然, $\bar{z}_d(t) = S_0(t)z_1 - S_0(t)z_2$, $\bar{z}_c = S_1(t)z_1 - S_1(t)z_2$.

用 $\bar{v}_t + \varepsilon \bar{v}$ 与 (4.23) 做内积, 得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\bar{v}_t\|^2 + (1 + \varepsilon) \|\Delta \bar{v}\|^2 + \|\nabla \bar{v}\|^2 + 2\varepsilon(\bar{v}_t, \bar{v})) - \varepsilon \|\bar{v}_t\|^2 + \|\Delta \bar{v}_t\|^2 + \varepsilon \|\Delta \bar{v}\|^2 + \varepsilon \|\nabla \bar{v}\|^2 = 0, \quad (4.27)$$

运用 Poincaré 不等式并且去掉 $\varepsilon \|\nabla \bar{v}\|^2$, 有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\bar{v}_t\|^2 + (1 + \varepsilon) \|\Delta \bar{v}\|^2 + \|\nabla \bar{v}\|^2 + 2\varepsilon(\bar{v}_t, \bar{v})) + (\lambda_1 - \varepsilon) \|\bar{v}_t\|^2 + \varepsilon \|\Delta \bar{v}\|^2 < 0. \quad (4.28)$$

引入泛函

$$\Phi(t) = \|\bar{v}_t\|^2 + (1 + \varepsilon) \|\Delta \bar{v}\|^2 + \|\nabla \bar{v}\|^2 + 2\varepsilon(\bar{v}_t, \bar{v}),$$

由范数的等价性, 当 ε 足够小时, 可得到

$$\frac{1}{2} \|(\bar{v}, \bar{v}_t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \Phi(t) \leq b \|(\bar{v}, \bar{v}_t)\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (4.29)$$

其中 b 是正常数.

取 ε 充分小, 使 $\lambda_1 - \varepsilon > 0$, 且记 $\Lambda_1 = \lambda_1 - \varepsilon$, 则有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Phi(t) + \Lambda_1 \|(\bar{v}, \bar{v}_t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 0,$$

结合 (4.29) 得

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) + \frac{2\Lambda_1}{b} \Phi(t) \leq 0,$$

再利用 Gronwall 引理和 (4.29), 有

$$\|(\bar{v}, \bar{v}_t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \Phi(t) \leq b e^{-\frac{2\Lambda_1}{b} t} \Phi(0) \leq \tilde{b} b e^{-\frac{2\Lambda_1}{b} t} \|(\bar{v}(0), \bar{v}_t(0))\|_{\mathcal{H}}^2,$$

取 $t_* = \frac{b}{2\Lambda_1} \ln 8b\tilde{b}$, 则可得 (4.21).

用 $-\Delta\bar{w}_t$ 与 (4.25) 做内积, 得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\Delta\nabla\bar{w}\|^2 + \|\nabla\bar{w}_t\|^2 + \|\Delta\bar{w}\|^2) + \|\Delta\nabla\bar{w}_t\|^2 \\ &= (\|\nabla u^1\|^2 \Delta u^1 - \|\nabla u^2\|^2 \Delta u^2, -\Delta\bar{w}_t) + (k^2(u^{2+} - u^{1+}), -\Delta\bar{w}_t) + (f(u^2) - f(u^1), -\Delta\bar{w}_t). \end{aligned} \quad (4.30)$$

结合 (3.18) 及定理 3.1 中的有界性, 我们有

$$\begin{aligned} & (\|\nabla u^1\|^2 \Delta u^1 - \|\nabla u^2\|^2 \Delta u^2, -\Delta\bar{w}_t) \\ &= (\|\nabla u^1\|^2 \Delta u^1 - \|\nabla u^1\|^2 \Delta u^2, -\Delta\bar{w}_t) + (\|\nabla u^1\|^2 \Delta u^2 - \|\nabla u^2\|^2 \Delta u^2, -\Delta\bar{w}_t) \\ &\leq \|\nabla u^1\|^2 \|\Delta\bar{u}\| \|\Delta\bar{w}_t\| + (\|\nabla u^1\| + \|\nabla u^2\|)(\|\nabla u^1\| - \|\nabla u^2\|) \|\Delta u^2\| \|\Delta\bar{w}_t\| \\ &\leq \rho_1 \|\Delta\bar{u}\| \|\Delta\bar{w}_t\| + 2\rho_1^2 \|\nabla u^1 - \nabla u^2\| \|\Delta\bar{w}_t\| \leq \rho_1 \|\Delta\bar{u}\| \|\Delta\bar{w}_t\| + 2\rho_1^2 \|\nabla\bar{u}\| \|\Delta\bar{w}_t\| \\ &\leq \frac{\rho_1^2}{\varepsilon} \|\Delta\bar{u}\|^2 + \frac{\varepsilon}{4} \|\Delta\bar{w}_t\|^2 + \frac{4\rho_1^4}{\varepsilon} \|\nabla\bar{u}\|^2 + \frac{\varepsilon}{4} \|\Delta\bar{w}_t\|^2 \\ &\leq \frac{\rho_1^2}{\varepsilon} \|\Delta\bar{u}\|^2 + \frac{4\rho_1^4}{\varepsilon} \|\nabla\bar{u}\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta\bar{w}_t\|^2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

和

$$\begin{aligned} (k^2(u^{2+} - u^{1+}), -\Delta\bar{w}_t) &\leq k^2 \|u^{2+} - u^{1+}\| \|\Delta\bar{w}_t\| \leq Lk^2 \|u^2 - u^1\| \|\Delta\bar{w}_t\| \\ &\leq \frac{k^4 L^2}{\varepsilon} \|\bar{u}\|^2 + \frac{\varepsilon}{4} \|\Delta\bar{w}_t\|^2, \end{aligned} \quad (4.32)$$

以及

$$(f(u^2) - f(u^1), -\Delta\bar{w}_t) \leq \|f(u^2) - f(u^1)\| \|\Delta\bar{w}_t\| \leq K \|\bar{u}\| \|\Delta\bar{w}_t\| \leq \frac{K^2}{\varepsilon} \|\bar{u}\|^2 + \frac{\varepsilon}{4} \|\Delta\bar{w}_t\|^2. \quad (4.33)$$

将 (4.31)–(4.33) 代入 (4.30) 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\Delta\nabla\bar{w}\|^2 + \|\nabla\bar{w}_t\|^2 + \|\Delta\bar{w}\|^2) + \|\Delta\nabla\bar{w}_t\|^2 \\ &\leq \frac{\rho_1^2}{\varepsilon} \|\Delta\bar{u}\|^2 + \frac{4\rho_1^4}{\varepsilon} \|\nabla\bar{u}\|^2 + \frac{k^4 L^2 + K^2}{\varepsilon} \|\bar{u}\|^2 + \varepsilon \|\Delta\bar{w}_t\|^2, \end{aligned} \quad (4.34)$$

由 Poincaré 不等式有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\Delta\nabla\bar{w}\|^2 + \|\nabla\bar{w}_t\|^2 + \|\Delta\bar{w}\|^2) + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\right) \|\Delta\nabla\bar{w}_t\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\rho_1^2 + \frac{4\rho_1^4}{\lambda_1} + \frac{k^4 L^2}{\lambda_1^2} + \frac{K^2}{\lambda_1^2} \right) \|\Delta\bar{u}\|^2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

取 ε 充分小, 使得 $1 - \frac{1}{\lambda_1} > 0$, $1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1} > 0$, 有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\Delta\nabla\bar{w}\|^2 + \|\nabla\bar{w}_t\|^2 + \|\Delta\bar{w}\|^2) \leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\rho_1^2 + \frac{4\rho_1^4}{\lambda_1} + \frac{k^4 L^2}{\lambda_1^2} + \frac{K^2}{\lambda_1^2} \right) \|\Delta\bar{u}\|^2. \quad (4.36)$$

记 $\Lambda = \frac{1}{\varepsilon} (\rho_1^2 + \frac{4\rho_1^4}{\lambda_1} + \frac{k^4 L^2}{\lambda_1^2} + \frac{K^2}{\lambda_1^2})$, 则有

$$\frac{d}{dt} (\|\Delta\nabla\bar{w}\|^2 + \|\nabla\bar{w}_t\|^2 + \|\Delta\bar{w}\|^2) \leq \Lambda \|\Delta\bar{u}\|^2 \leq \Lambda (\|\Delta\bar{u}\|^2 + \|\bar{u}_t\|^2) = \Lambda \|\bar{z}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \Lambda e^{\tilde{K}t} \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2,$$

在 $(0, t_*)$ 上积分, 结合初值条件, 有

$$\begin{aligned} & \|\Delta \nabla \bar{w}(t_*)\|^2 + \|\nabla \bar{w}_t(t_*)\|^2 + \|\Delta \bar{w}(t_*)\|^2 \\ & \leq \int_0^{t_*} \Lambda e^{\tilde{K}t} \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2 dt \\ & \leq \frac{\Lambda}{\tilde{K}} (e^{\tilde{K}t_*} - 1) \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2 = C^* \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

其中

$$C^* = \frac{\Lambda}{\tilde{K}} (e^{\tilde{K}t_*} - 1).$$

因此,

$$\|\Delta \nabla \bar{w}(t_*)\|^2 + \|\nabla \bar{w}_t(t_*)\|^2 \leq C^* \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2.$$

证毕. □

于是, 由定理 2.2、4.3 和 4.4 即得我们的主要结论:

定理 4.5 (指数吸引子) 假设非线性项满足 (2.1) 和 (2.2), $g \in L^2(\Omega)$, 则问题 (1.1) 生成的解半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 在 $\mathcal{X}$ 上存在指数吸引子.

致谢 衷心感谢各位评审老师的详细建议.

参考文献

- 1 Lazer A C, McKenna P J. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: Some new connections with nonlinear analysis. *SIAM Rev*, 1990, 32: 537–578
- 2 Eden A, Foias C, Nicolaenko B, et al. *Exponential Attractors for Dissipative Evolution Equations*. New York: John Wiley & Sons, 1994
- 3 Harbi H, Ahmed N U. Mathematical analysis of dynamic models of suspension bridges. *SIAM J Appl Math*, 1998, 58: 853–874
- 4 Choi Q H, Jung T. A nonlinear suspension bridge equation with nonconstant load. *Nonlinear Anal*, 1999, 35: 649–668
- 5 Hill S, Humphreys L D. Mountain pass solutions for a system of partial differential equations: An existence theorem with computational results. *Nonlinear Anal*, 2000, 39: 731–743
- 6 Ma Q, Zhong C. Existence of global attractors for the coupled system of suspension bridge equations. *J Math Anal Appl*, 2005, 308: 365–379
- 7 Ma Q Z, Zhong C K. Existence of global attractors for the suspension bridge equations. *Sichuan Norm Univ Nat Sci Ed*, 2006, 43: 271–276
- 8 Ma Q, Zhong C. Existence of strong solutions and global attractors for the coupled suspension bridge equations. *J Differential Equations*, 2009, 246: 3755–3775
- 9 Park J Y, Kang J R. Pullback-attractors for non-autonomous suspension bridge equations. *Nonlinear Anal*, 2009, 71: 4618–4623
- 10 Park J Y, Kang J R. Global attractors for the suspension bridge equations with nonlinear damping. *Quart Appl Math*, 2011, 69: 465–475
- 11 Ma Q Z, Wang B L. Existence of pullback attractors for the coupled suspension bridge equations. *Electron J Differential Equations*, 2011, 10: 1–10
- 12 Kang J R. Long-time behavior of a suspension bridge equations with past history. *Appl Math Comput*, 2015, 265: 509–519
- 13 Boichchio I, Giorgi C, Vuk E. Long-term damped dynamics of the extensible suspension bridge. *Int J Difference Equ*, 2010, 10: 1155–1174
- 14 Miranville A, Zelik S. Attractors for dissipative differential equations in bounded and unbounded domains. *Handb Differ Equ*, 2008, 4: 103–200
- 15 Efendiev M, Miranville A, Zelik S. Exponential attractors for a nonlinear reaction-diffusion system in $\mathbb{R}$. *C R Acad Sci Ser I Math*, 2000, 330: 713–718

- 16 Zhong C, Ma Q, Sun C. Existence of strong solutions and global attractors for the suspension bridge equations. *Nonlinear Anal*, 2007, 67: 442–454
- 17 Temam R. *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1997
- 18 Pata V, Squassina M. On the strongly damped wave equation. *Comm Math Phys*, 2005, 253: 511–533

The existence of exponential attractors for strong damped Kirchhoff-type suspension bridge equations

Lan Jia & Qiaozhen Ma

Abstract In this paper, we study the long time dynamical behavior of strong damped Kirchhoff-type suspension bridge equations by the decomposing technique of operator semigroup. Under the weaker condition of the nonlinearity, we first verify the asymptotic compactness of solution semigroup in two spaces. Then we use the decomposing technique of operator semigroup to obtain the existence of exponential attractors for the strong damped Kirchhoff-type suspension bridge equations.

Keywords Kirchhoff-type suspension bridge equations, exponential attractor, decomposition of operator

MSC(2010) 35Q35, 35B40, 35B41

doi: 10.1360/N012017-00004