不确定数据传输系统时序的最优控制与可靠性

王彩璐, 陶跃钢*, 杨鹏, 刘作军

河北工业大学控制科学与工程学院, 天津 300130

* 通信作者. E-mail: yuegangtao@hebut.edu.cn

收稿日期: 2016-08-12; 接受日期: 2016-10-14; 网络出版日期: 2016-11-10

国家自然科学基金 (批准号: 60774007, 61305101) 资助项目

摘要 研究数据发射时间、传输时间、接收时间不确定的数据传输系统时序的最优控制与可靠性. 运用极大-加代数方法, 建立不确定数据传输系统的时序演化模型. 引入不确定数据传输系统的数据接收时间参变量向量值函数和极大-加线性方程组的非负解, 在数据传输时间取自给定区间且发射时间非负的约束条件下, 求得数据接收时间的最小值 (最早接收时间) 和最优解; 在数据接收时间限制于给定区间的约束条件下, 求得数据发射时间的最大值 (最晚发射时间) 和最优解. 引入不确定数据传输系统的可靠区间, 以使数据在这一区间内的任一时刻发射后, 均可被按时接收, 而免受传输延迟的影响. 引入区间参数极大-加线性方程组的容许解区间, 给出可靠区间存在性判据, 并提供求最大可靠区间的一个有效算法.

关键词 不确定数据传输系统 时序分析 最优控制 可靠性 区间参数极大-加线性方程组 可解性

1 引言

数据传输是数据在数据源和数据宿之间传送的过程. 数据传输系统由发送端、接收端和传输媒介 3 部分组成, 基本模式如图 1 所示. 数据传输系统在卫星通信^[1]、航空通信^[2]和计算机网络通信^[3]等领域扮演着重要角色.

时序关系是数据传输系统研究的基本问题之一, 而时序分析是数据传输系统设计的重要环节. 时序参数包括数据的发射时间、传输时间、接收时间等. 由于内部因素和外部干扰的影响, 数据传输系统在运行过程中不可避免地会出现参数漂移. 例如, 温度的改变和元件的老化都会导致数据的传输时间不是固定不变的, 而是在某一区间内随机变化. 对于这类具有区间参数的数据传输系统, 克服不确定性和不稳定性, 提高安全性和可靠性, 使之按照预先设计的目标运行, 是亟待解决的问题.

本文研究不确定数据传输系统时序的最优控制和可靠性. 接收机尽早接收到数据有利于数据尽早处理. 当数据发射时间最早且传输时间最短时, 接收机接收到全部数据的时间显然是最早的. 除此以外, 在什么情况下, 接收机也能在这一最早时间接收到全部数据, 是时序最优控制问题之一. 为了确保数据按时处理, 数据接收时间需要限制在一定范围内. 此时, 发射机最晚可以在什么时间发射数据, 是

引用格式: 王彩璐, 陶跃钢, 杨鹏, 等. 不确定数据传输系统时序的最优控制与可靠性. 中国科学: 信息科学, 2016, 46: 1633–1647, doi: 10.1360/N112016-00139

图 1 数据传输系统基本模式

Figure 1 The basic mode of data transmission systems

时序最优控制的另一问题. 一旦发射机发射数据的时间超过这一最晚时间, 接收机将不能按时接收数据. 由于数据传输时间的不确定性, 使得数据接收时间具有一定的随机性. 能否找到一个时间区间, 使得无论数据的传输时间如何改变, 发射机在这一区间内的任一时刻发射数据, 都能保证接收机按时接收数据, 是时序可靠性问题.

自 20 世纪 80 年代起, 极大-加代数方法广泛地用于工程系统的建模、分析、控制与优化. 例如, Cohen 等^[4]运用极大-加代数将柔性制造系统中一类基于时间-逻辑规则的非线性关系转化为这种代数意义下的线性关系, 建立了柔性制造系统的极大-加线性模型. Olsder^[5]分别给出了极大-加代数在超大规模集成电路阵列处理器以及公共交通调度问题中的应用. Li 等^[6]将极大-加代数用于综合航空电子系统数据包传输过程的建模与优化, 提出了数据包传输的最优反馈控制方案. Goverde^[7]利用极大-加线性系统理论分析了列车运行图的稳定性. 极大-加代数上的矩阵理论已有许多系统深入研究. 例如, Cayley-Hamilton 定理^[8,9]、特征值和特征向量的刻画与计算^[10~14]以及 QR 分解^[15]等. 平行于传统线性系统理论的极大-加线性系统理论也发展到一个新的高度. 例如, 极大-加线性系统的周期性^[16]、稳定性^[17]、能达性^[18~20]和可预测性^[21,22]等.

区间参数极大-加线性方程组理论对于解决不确定系统问题具有重要的意义^[23~26]. 区间参数极大-加线性方程组的可解性已有一些研究. 例如, Cechlárová 和 Cuninghame-Green^[27]研究了区间参数极大-加线性方程组的强可解和弱可解, 并分别给出了方程组强可解和弱可解的充分必要条件. Myšková^[28,29]提出了区间参数极大-加线性方程组泛可解、容许可解、 T_1 , T_2 , T_6 和 T_7 可解等概念, 并分别给出了这些可解性的充分必要条件. Zhang 等^[26]通过引入区间参数极大-加线性方程组可解区间的概念, 得到了方程组强可解以及唯一强可解的充分必要条件, 并给出了强可解性在制造系统最优控制问题中的一个应用.

时序分析是改善系统性能的重要手段. 对于具有区间延迟且受极大-极小时间约束的紧耦合系统, Chakraborty 等^[30]研究了事件时间间隔的近似边界. 对于受极大-极小时间约束的周期事件规则系统, Zhao 等^[31]研究了事件时间间隔的有界性, 并以紧耦合系统作为特例. 对于具有区间时间参数的不确定数据传输系统, 本文运用极大-加代数方法分析系统时序的最优控制和可靠性. 首先, 利用极大-加代数的特殊运算规则, 建立表征数据发射时间、传输时间、接收时间 3 者之间时序关系的区间参数极大-加线性方程组模型. 对于所建立的模型, 极大-加线性方程组的解表示数据的发射时间. 而时间具有非负性, 这就导致对极大-加线性方程组非负可解性的研究. 然后, 通过引入表示不确定数据传输系统数据接收时间的参变量向量值函数, 研究不确定数据传输系统时序的最优控制问题. 在数据传输时间取自给定区间且发射时间非负的约束条件下, 寻求接收机接收到全部数据的最早时间及其最优解; 在数据接收时间限制于给定区间的约束条件下, 寻求发射机发射数据的最晚时间及其最优解. 最后, 利用区间参数极大-加线性方程组的容许可解性, 研究不确定数据传输系统时序的可靠性. 对于传输时间不能预先确定的情形, 寻求确保数据按时接收的发射时间区间和检验系统时序可靠

性的算法.

除引言外, 本文还有 5 节. 第 2 节介绍本文所需数学概念和结论. 第 3 节建立不确定数据传输系统的极大-加代数模型. 第 4 节研究不确定数据传输系统时序的最优控制. 第 5 节分析不确定数据传输系统时序的可靠性. 第 6 节概括本文的结论.

2 预备知识

本节主要介绍极大-加代数^[32~34]、极大-加代数上的矩阵与向量、极大-加线性方程组^[32, 35, 36]以及极大-加代数上区间的相关概念^[37~39]. 同时还引入极大-加线性方程组非负可解的概念, 并给出非负可解的一些性质.

$\mathbb{R}$ 是实数集. 定义集合 $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 上的加法运算 $\oplus$ 和乘法运算 $\otimes$: 对于 $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,

$$a \oplus b = \max\{a, b\}, \quad a \otimes b = a + b.$$

$(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ 构成一个代数系统, 称为极大-加代数, 记为 $\mathbb{R}_{\max}$. 在 $\mathbb{R}_{\max}$ 中, 零元为 $-\infty$, 用符号 ε 表示; 单位元为 0, 用符号 e 表示. 在 $\mathbb{R}_{\max}$ 上定义二元关系 $\leq$: 对于 $a, b \in \mathbb{R}_{\max}$,

$$a \leq b \iff a \oplus b = b.$$

容易验证, $\leq$ 是 $\mathbb{R}_{\max}$ 上的一个具有自反性、反对称性和传递性的偏序关系.

$\mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ 表示 $\mathbb{R}_{\max}$ 上 $m \times n$ 矩阵的集合. 极大-加代数上矩阵的加法、乘法和标量运算定义如下:

- 加法运算 $\oplus$: 对于 $A = (A_{ij}), B = (B_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, $A \oplus B$ 定义为 $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$.
- 乘法运算 $\otimes$: 对于 $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times p}$, $B = (B_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$, $A \otimes B$ 定义为

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p A_{ik} \otimes B_{kj}.$$

- 标量运算 $\circ$: 对于 $k \in \mathbb{R}_{\max}$, $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, $k \circ A$ 定义为 $(k \circ A)_{ij} = k \otimes A_{ij}$.

在 $\mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ 上定义二元关系 $\leq$: 对于 $A = (A_{ij}), B = (B_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$,

$$A \leq B \iff A_{ij} \leq B_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

容易验证, $\leq$ 是 $\mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ 上的一个具有自反性、反对称性和传递性的偏序关系. 若 $A \leq B$ 且 $A \neq B$, 则记为 $A < B$, 或等价地表示为 $B > A$. 在不引起混淆的情况下, 乘法运算符号 $\otimes$ 和标量运算符号 $\circ$ 通常省略不写, 即 $A \otimes B := AB$, $k \circ A := kA$.

$(\mathbb{R}_{\max}^{n \times 1}, \oplus, \circ)$ 构成 $\mathbb{R}_{\max}$ 上的一个 n 维向量空间, 简记为 $\mathbb{R}_{\max}^n$.

引理1 设 $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}^n$. 若 $A \leq B$ 且 $\alpha \leq \beta$, 则 $A\alpha \leq B\beta$.

证明 由 $A \leq B$ 可知, 对于 $1 \leq i, j \leq n$ 有 $A_{ij} \leq B_{ij}$, 即 $A_{ij} \oplus B_{ij} = B_{ij}$. 于是

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} = B_{ij},$$

即 $A \oplus B = B$. 同理, 由 $\alpha \leq \beta$ 可得 $\alpha \oplus \beta = \beta$. 于是

$$A\alpha \oplus B\beta = A\alpha \oplus (A \oplus B)(\alpha \oplus \beta) = A\alpha \oplus A\alpha \oplus A\beta \oplus B\alpha \oplus B\beta$$

$$= A(\alpha \oplus \beta) \oplus B(\alpha \oplus \beta) = A\beta \oplus B\beta = (A \oplus B)\beta = B\beta.$$

因此 $A\alpha \leq B\beta$.

上述性质称为矩阵乘法运算的单调性. 下面介绍有关极大-加线性方程组及其可解性的概念和结论.

对于给定 $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}_{\max}^n$, 矩阵方程

$$Ax = b \quad (1)$$

称为极大-加线性方程组, 其中 $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$ 为方程组的未知向量. 如果存在 $\hat{x} \in \mathbb{R}_{\max}^n$ 使得 $A\hat{x} = b$, 则称方程组 (1) 可解, 而 $\hat{x}$ 称为方程组 (1) 的一个解, 否则称方程组 (1) 不可解.

引理2 ([32,35]) 对于极大-加线性方程组 (1), 令

$$x_j^*(A, b) = \min_{1 \leq k \leq n} \{b_k - t_{kj}\}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

则 $x^*(A, b) = (x_j^*(A, b)) \in \mathbb{R}_{\max}^n$ 满足以下两个性质:

- (i) 若 $\hat{x}$ 是方程组 (1) 的解, 则 $\hat{x} \leq x^*(A, b)$;
- (ii) $Ax^*(A, b) \leq b$.

引理 2 中的向量 $x^*(A, b)$ 称为极大-加线性方程组 (1) 的最大下解.

引理3 ([32,35]) 极大-加线性方程组 (1) 可解的充分必要条件是 $Ax^*(A, b) = b$.

在许多实际问题中, 需要限制系统变量的取值是非负的. 例如, 在解决与时间相关的问题时, 常考虑非负时间. 下面引入极大-加线性方程组非负可解的概念.

定义1 设 $u_e = (e \ e \ \cdots \ e)^T \in \mathbb{R}_{\max}^n$, 如果存在 $\hat{x} \geq u_e$ 使得 $A\hat{x} = b$, 则称极大-加线性方程组 (1) 非负可解, 而 $\hat{x}$ 称为方程组 (1) 的一个非负解.

定理1 极大-加线性方程组 (1) 非负可解的充分必要条件是 $x^*(A, b) \geq u_e$ 且 $Ax^*(A, b) = b$.

证明 必要性. 由方程组 (1) 可解和引理 3 可知 $Ax^*(A, b) = b$. 因为方程组 (1) 非负可解, 所以存在 $\hat{x} \geq u_e$ 使得 $A\hat{x} = b$. 由引理 2 可知 $x^*(A, b) \geq \hat{x} \geq u_e$.

充分性. 由 $Ax^*(A, b) = b$ 和引理 3 可知方程组 (1) 可解. 因为 $x^*(A, b) \geq u_e$, 所以 $x^*(A, b)$ 就是方程组 (1) 的一个非负解. 因此, 方程组 (1) 非负可解.

推论1 若极大-加线性方程组 (1) 非负可解, 则 $Au_e \leq b$.

证明 由方程组 (1) 非负可解和定理 1 可知, $x^*(A, b) \geq u_e$ 且 $Ax^*(A, b) = b$. 于是

$$Au_e \leq Ax^*(A, b) = b.$$

推论 1 中的条件 $Au_e \leq b$ 是方程组 (1) 非负可解的必要而非充分条件. 对于断定极大-加线性方程组 (1) 不存在非负解, 推论 1 是快捷而有效的方法之一. 我们来看下面的例子.

例1 考虑极大-加线性方程组 $Ax = b$ 的非负可解性, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 7 \\ 12 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

经计算得 $Au_e = (10 \ 10 \ 12)^T$, 不满足 $Au_e \leq b$. 由推论 1 可知方程组 $Ax = b$ 不存在非负解. 事实上, $x^*(A, b) = (-1 \ 2 \ 3)^T$. 容易验证, $Ax^*(A, b) = b$. 于是方程组 $Ax = b$ 可解, 但不存在非负解.

下面介绍有关极大-加代数上区间的概念.

对于给定的元素对 $\underline{a}, \bar{a} \in \mathbb{R}_{\max}$, 若 $\underline{a} \leq \bar{a}$, 则集合

$$\mathbf{a} = \langle \underline{a}, \bar{a} \rangle = \{a \in \mathbb{R}_{\max} \mid \underline{a} \leq a \leq \bar{a}\}$$

称为 $\mathbb{R}_{\max}$ 上的一个区间, 其中 $\underline{a}$ 称为区间 $\mathbf{a}$ 的下端点, $\bar{a}$ 称为区间 $\mathbf{a}$ 的上端点. 符号 $\mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max})$ 表示 $\mathbb{R}_{\max}$ 上区间的集合.

以区间 $\alpha_i \in \mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max})$ ($1 \leq i \leq n$) 为分量的向量

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \underline{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1 \rangle \\ \langle \underline{\alpha}_2, \bar{\alpha}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \underline{\alpha}_n, \bar{\alpha}_n \rangle \end{pmatrix}$$

称为 $\mathbb{R}_{\max}$ 上的区间向量. 令 $\underline{\alpha} = (\underline{\alpha}_i)$, $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_i) \in \mathbb{R}_{\max}^n$, 则

$$\boldsymbol{\alpha} = \langle \underline{\alpha}, \bar{\alpha} \rangle = \{\alpha \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid \underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}\}.$$

符号 $\mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max}^n)$ 表示 $\mathbb{R}_{\max}$ 上区间向量的集合.

以区间 $\mathbf{A}_{ij} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max})$ ($1 \leq i, j \leq n$) 为元素的矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \cdots & \mathbf{A}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \underline{A}_{11}, \bar{A}_{11} \rangle & \langle \underline{A}_{12}, \bar{A}_{12} \rangle & \cdots & \langle \underline{A}_{1n}, \bar{A}_{1n} \rangle \\ \langle \underline{A}_{21}, \bar{A}_{21} \rangle & \langle \underline{A}_{22}, \bar{A}_{22} \rangle & \cdots & \langle \underline{A}_{2n}, \bar{A}_{2n} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \underline{A}_{n1}, \bar{A}_{n1} \rangle & \langle \underline{A}_{n2}, \bar{A}_{n2} \rangle & \cdots & \langle \underline{A}_{nn}, \bar{A}_{nn} \rangle \end{pmatrix}$$

称为 $\mathbb{R}_{\max}$ 上的区间矩阵. 令 $\underline{A} = (\underline{A}_{ij})$, $\bar{A} = (\bar{A}_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, 则

$$\mathbf{A} = \langle \underline{A}, \bar{A} \rangle = \{A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n} \mid \underline{A} \leq A \leq \bar{A}\}.$$

符号 $\mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max}^{n \times n})$ 表示 $\mathbb{R}_{\max}$ 上区间矩阵的集合.

对于给定 $\mathbf{A} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max}^{n \times n})$, $\mathbf{b} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}_{\max}^n)$, 区间参数极大-加线性方程组

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \quad (2)$$

表示线性方程组的集合 $\{Ax = b \mid A \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{b}\}$, 其中每个方程组 $Ax = b$ 称为式 (2) 的一个子系统.

3 不确定数据传输系统建模

考虑由 n 个发射机 $E_1, E_2, \dots, E_n$ 和 n 个接收机 $R_1, R_2, \dots, R_n$ 组成的数据传输系统. 设 x_j 表示发射机 E_j 发射数据的时刻 (简称发射时间), b_i 表示接收机 R_i 接收到全部发射机发来的数据的时

图 2 不确定数据传输系统

Figure 2 Uncertain data transmission system

刻 (简称接收时间), 符号 (i, j) 表示从 E_j 到 R_i 的传输信道, 数据在信道 (i, j) 中的传输时间设为 t_{ij} , 其中 $1 \leq i, j \leq n$. 数据的发射时间、传输时间与接收时间具有如下关系:

$$\begin{cases} \max\{t_{11} + x_1, t_{12} + x_2, \dots, t_{1n} + x_n\} = b_1, \\ \max\{t_{21} + x_1, t_{22} + x_2, \dots, t_{2n} + x_n\} = b_2, \\ \dots \\ \max\{t_{n1} + x_1, t_{n2} + x_2, \dots, t_{nn} + x_n\} = b_n. \end{cases} \quad (3)$$

令

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

则式 (3) 可表示为极大 - 加线性方程组 $Ax = b$ 的形式.

在数据传输设备的实际使用中, 确定的数据传输时间只是一种理想状态. 数据传输过程中出现的环境条件 (如温度、湿度、震动、冲击等) 的变化, 以及元件的老化都会导致数据在信道 (i, j) 中的传输时间 t_{ij} 不是一个精确值, 而是在区间 $\langle t_{ij}, \bar{t}_{ij} \rangle$ 内随机变化. 为了通信任务能够顺利完成, 接收机 R_i 必须在规定时间范围 $\langle b_i, \bar{b}_i \rangle$ 内接收到全部数据. 这类系统称为不确定数据传输系统, 基本模式如图 2 所示. 令

$$\mathbf{A} = \langle \underline{A}, \bar{A} \rangle = \begin{pmatrix} \langle t_{11}, \bar{t}_{11} \rangle & \langle t_{12}, \bar{t}_{12} \rangle & \cdots & \langle t_{1n}, \bar{t}_{1n} \rangle \\ \langle t_{21}, \bar{t}_{21} \rangle & \langle t_{22}, \bar{t}_{22} \rangle & \cdots & \langle t_{2n}, \bar{t}_{2n} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle t_{n1}, \bar{t}_{n1} \rangle & \langle t_{n2}, \bar{t}_{n2} \rangle & \cdots & \langle t_{nn}, \bar{t}_{nn} \rangle \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \langle \underline{b}, \bar{b} \rangle = \begin{pmatrix} \langle b_1, \bar{b}_1 \rangle \\ \langle b_2, \bar{b}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, \bar{b}_n \rangle \end{pmatrix},$$

则上述系统可由区间参数极大 - 加线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 来描述. 为叙述方便起见, 将这一系统记为 S.

4 时序最优控制

定义参变量向量值函数 $\mathcal{F}(x, A)$ 如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}: \mathbb{R}_{\max}^n &\rightarrow \mathbb{R}_{\max}^n, \\ x &\mapsto Ax,\end{aligned}$$

其中矩阵参数 $A \in \mathbf{A}$. 对于系统 S 而言, 数据的接收时间随数据的发射时间和传输时间变化. 当数据的发射时间为 x 且传输时间为 A 时, 数据的接收时间为 $\mathcal{F}(x, A) = Ax$. $\mathcal{F}(x, A)$ 称为系统 S 的数据接收时间参变量向量值函数.

4.1 接收机最早接收数据时间

考虑系统 S 中接收机接收数据的最早时间, 即求解最优控制问题

$$\min_{A \in \mathbf{A}, x \geq u_e} \mathcal{F}(x, A), \quad (4)$$

其中约束条件 $A \in \mathbf{A}$ 表示数据的传输时间在区间 $\mathbf{A}$ 内随机变化, $x \geq u_e$ 表示数据的发射时间非负; 目标函数 $\mathcal{F}(x, A)$ 表示数据的接收时间. 下面给出 $\mathcal{F}(x, A)$ 在约束条件 $A \in \mathbf{A}$ 和 $x \geq u_e$ 下的最小取值, 即接收机接收数据的最早时间. 同时给出最优控制问题 (4) 的最优解, 即使目标函数 $\mathcal{F}(x, A)$ 取得最小值的矩阵 A 所满足的条件以及向量 x 的取值.

引理4 目标函数 $\mathcal{F}(x, A)$ 在约束条件 $A \in \mathbf{A}$ 和 $x \geq u_e$ 下的最小值为 $\underline{A}u_e$, 即

$$\min_{A \in \mathbf{A}, x \geq u_e} \mathcal{F}(x, A) = \underline{A}u_e.$$

证明 对于任意 $\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$ 和任意 $x \geq u_e$, 由引理 1 可知 $\mathcal{F}(x, A) = Ax \geq Au_e \geq \underline{A}u_e$. 因为 $\mathcal{F}(u_e, \underline{A}) = \underline{A}u_e$, 所以 $\underline{A}u_e$ 是 $\mathcal{F}(x, A)$ 的最小值.

$x = u_e$ 意味着数据最早地发射, $A = \underline{A}$ 意味着数据最快地传输, 记

$$\underline{b} = \mathcal{F}(u_e, \underline{A}) = \underline{A}u_e,$$

则 $\underline{b}$ 称为系统 S 接收数据的最早时间. 下面寻找使得接收机在这一最早时间接收到全部数据的条件. 这涉及到子系统 $Ax = \underline{b}$ 的非负可解性. 子系统 $Ax = \underline{b}$ 非负可解意味着当数据的传输时间为 A 时, 通过控制数据的发射时间, 可使数据的接收时间为 $\underline{b}$, 否则, 接收机不能在时刻 $\underline{b}$ 接收到全部数据.

定理2 系统 S 的子系统 $Ax = \underline{b}$ 非负可解的充分必要条件是 $x^*(A, \underline{b}) \geq u_e$ 且 $Au_e = \underline{A}u_e$.

证明 必要性. 由 $A \geq \underline{A}$ 和引理 1 可知 $Au_e \geq \underline{A}u_e$. 假设 $Au_e \neq \underline{A}u_e$, 则 $Au_e > \underline{A}u_e$. 因为方程组 $Ax = \underline{b}$ 非负可解, 所以由定理 1 可知 $x^*(A, \underline{b}) \geq u_e$ 且 $Ax^*(A, \underline{b}) = \underline{b}$. 于是

$$\underline{b} = Ax^*(A, \underline{b}) \geq Au_e > \underline{A}u_e = \underline{b},$$

矛盾. 因此 $Au_e = \underline{A}u_e$.

充分性. 由引理 2 可知 $Ax^*(A, \underline{b}) \leq \underline{b}$. 再由 $x^*(A, \underline{b}) \geq u_e$ 和 $Au_e = \underline{A}u_e$ 可得

$$Ax^*(A, \underline{b}) \geq Au_e = \underline{A}u_e = \underline{b}.$$

因此 $Ax^*(A, \underline{b}) = \underline{b}$. 由定理 1 可知, 方程组 $Ax = \underline{b}$ 非负可解.

定理 2 表明, 并非在任何情况下接收机都能在时刻 $\underline{b}$ 接收到全部数据, 也并非只有最早的发射和最快的传输才能保证接收机最早地接收数据. 当数据的传输时间满足条件 $Au_e = \underline{A}u_e$ 时, 通过设定发射机发射数据的时间, 可使接收机在时刻 $\underline{b}$ 接收到全部数据. 关于发射时间的设定, 有如下定理.

定理3 如果系统 S 的子系统 $Ax = \underline{b}$ 非负可解, 那么对于任意 $\hat{x} \in \langle u_e, x^*(A, \underline{b}) \rangle$, 有 $\mathcal{F}(\hat{x}, A) = \underline{b}$.

证明 如果子系统 $Ax = \underline{b}$ 非负可解, 那么由定理 2 可得 $x^*(A, \underline{b}) \geq u_e$ 且 $Au_e = \underline{A}u_e$. 于是, 对于任意 $u_e \leq \hat{x} \leq x^*(A, \underline{b})$, 有

$$\underline{b} = \underline{A}u_e = Au_e \leq A\hat{x} \leq Ax^*(A, \underline{b}) \leq \underline{b}.$$

因此 $\mathcal{F}(\hat{x}, A) = A\hat{x} = \underline{b}$.

定理 3 表明, 当子系统 $Ax = \underline{b}$ 非负可解时, 数据的发射时间在区间 $\langle u_e, x^*(A, \underline{b}) \rangle$ 内任意设定, 都能使目标函数取得最小值, 即使得接收机在最早时间接收到全部数据.

例2 考虑由 4 个发射机 E_1, E_2, E_3, E_4 和 4 个接收机 R_1, R_2, R_3, R_4 组成的不确定数据传输系统

$$Ax = b, \quad (5)$$

其中

$$A = \langle \underline{A}, \bar{A} \rangle = \begin{pmatrix} \langle 5, 7 \rangle & \langle 3, 5 \rangle & \langle 5, 7 \rangle & \langle 3, 5 \rangle \\ \langle 9, 11 \rangle & \langle 7, 9 \rangle & \langle 9, 11 \rangle & \langle 7, 9 \rangle \\ \langle 9, 11 \rangle & \langle 7, 9 \rangle & \langle 9, 11 \rangle & \langle 7, 9 \rangle \\ \langle 5, 7 \rangle & \langle 3, 5 \rangle & \langle 5, 7 \rangle & \langle 3, 5 \rangle \end{pmatrix}, \quad b = \langle \underline{b}, \bar{b} \rangle = \begin{pmatrix} \langle \underline{b}_1, \bar{b}_1 \rangle \\ \langle \underline{b}_2, \bar{b}_2 \rangle \\ \langle \underline{b}_3, \bar{b}_3 \rangle \\ \langle \underline{b}_4, \bar{b}_4 \rangle \end{pmatrix},$$

且数据的最早接收时间为 $\underline{b} = \underline{A}u_e = (5 \ 9 \ 9 \ 5)^T$. 设

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 3 \\ 9 & 7 & 9 & 7 \\ 9 & 8 & 9 & 7 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

经计算可得 $x^*(A, \underline{b}) = (e \ 1 \ e \ 2)^T \geq u_e$ 且 $Au_e = (5 \ 9 \ 9 \ 5)^T = \underline{A}u_e$. 由定理 2 可知, 子系统 $Ax = \underline{b}$ 非负可解. 由定理 3 可知, 当数据的传输时间为 A 时, 发射机发射数据的时间 x 在区间向量

$$\langle u_e, x^*(A, \underline{b}) \rangle = \left(\langle e, e \rangle \quad \langle e, 1 \rangle \quad \langle e, e \rangle \quad \langle e, 2 \rangle \right)^T$$

内任意取值, 都可使接收机在时刻 $\underline{b}$ 接收到全部数据. 例如, 取 $\hat{x} = (e \ 1 \ e \ 1)^T$, $\tilde{x} = (e \ 0.5 \ e \ 2)^T$, 有

$$\mathcal{F}(\hat{x}, A) = \mathcal{F}(\tilde{x}, A) = (5 \ 9 \ 9 \ 5)^T = \underline{b}.$$

也就是说, 当发射机 E_1, E_2, E_3, E_4 发射数据的时间分别为 0, 1, 0, 1 时, 接收机 R_1, R_2, R_3, R_4 接收到全部数据的时间分别为 5, 9, 9, 5. 当发射时间分别为 0, 0.5, 0, 2 时, 接收时间同样为 5, 9, 9, 5.

4.2 发射机最晚发射数据时间

考虑系统 S 中发射机发射数据的最晚时间, 即求解最优控制问题

$$\max_{\mathcal{F}(x,A) \in \mathbf{b}} x, \quad (7)$$

其中约束条件 $\mathcal{F}(x, A) \in \mathbf{b}$ 表示数据的接收时间限制在时间范围 $\mathbf{b}$ 内, 目标函数 x 表示数据的发射时间. 下面给出 x 的最大取值, 即发射机发射数据的最晚时间. 显然, 目标函数 x 的最大值同时也是最优控制问题 (7) 的最优解.

定理4 对于给定 $A \in \mathbf{A}$, 若 $x^*(A, \bar{b}) \geq u_e$, 则

(i) 对于任意 $\hat{x} \in \langle u_e, x^*(A, \bar{b}) \rangle$, 有 $\mathcal{F}(\hat{x}, A) \in \mathbf{b}$;

(ii) 对于任意 $\hat{x} > x^*(A, \bar{b})$, 有 $\mathcal{F}(\hat{x}, A) \notin \mathbf{b}$.

证明 (i) 对于任意 $u_e \leq \hat{x} \leq x^*(A, \bar{b})$, 有

$$\underline{b} \leq \underline{A}u_e \leq Au_e \leq A\hat{x} \leq Ax^*(A, \bar{b}) \leq \bar{b}.$$

于是 $\mathcal{F}(\hat{x}, A) = A\hat{x} \in \mathbf{b}$.

(ii) 假设存在 $\hat{x} > x^*(A, \bar{b})$ 使得 $\mathcal{F}(\hat{x}, A) \in \mathbf{b}$, 则存在 $b \in \mathbf{b}$ 使得 $A\hat{x} = b$. 于是对于任意 $1 \leq j \leq n$,

$$x_j^*(A, b) = \min_{1 \leq k \leq n} \{b_k - A_{kj}\} \leq \min_{1 \leq k \leq n} \{\bar{b}_k - A_{kj}\} = x_j^*(A, \bar{b}),$$

即 $x^*(A, b) \leq x^*(A, \bar{b}) < \hat{x}$. 因为 $\hat{x}$ 是 $Ax = b$ 的解, 所以由引理 2 可知 $\hat{x} \leq x^*(A, b)$, 矛盾. 因此, 对于任意 $\hat{x} > x^*(A, \bar{b})$, 有 $\mathcal{F}(\hat{x}, A) \notin \mathbf{b}$.

定理 4 表明, 发射机在区间 $\langle u_e, x^*(A, \bar{b}) \rangle$ 中的任意时刻发射数据, 都能使接收机在规定时间内 $\mathbf{b}$ 内接收到全部数据, 而一旦数据的发射时间超过 $x^*(A, \bar{b})$, 接收机将不能按时接收数据. 下面证明 $x^*(A, \bar{b})$ 的确是保证数据按时接收的最晚发射时间.

定理5 对于给定 $A \in \mathbf{A}$, 若 $x^*(A, \bar{b}) \geq u_e$, 则

$$\max_{\mathcal{F}(x,A) \in \mathbf{b}} x = x^*(A, \bar{b}).$$

证明 因为 $x^*(A, \bar{b}) \geq u_e$, 所以

$$\underline{b} = \underline{A}u_e \leq Au_e \leq Ax^*(A, \bar{b}) \leq \bar{b}.$$

于是 $\mathcal{F}(x^*(A, \bar{b}), A) = Ax^*(A, \bar{b}) \in \mathbf{b}$. 设 $\hat{x}$ 是任意满足约束条件 $\mathcal{F}(x, A) \in \mathbf{b}$ 的向量, 则存在 $b \in \mathbf{b}$ 使得 $A\hat{x} = b$. 由引理 2 可知 $\hat{x} \leq x^*(A, b) \leq x^*(A, \bar{b})$.

例3 对于不确定数据传输系统 (5), 为了完成通信任务, 接收机需在时间范围

$$\mathbf{b} = \langle \underline{b}, \bar{b} \rangle = \left(\langle 5, 10 \rangle \quad \langle 9, 13 \rangle \quad \langle 9, 12 \rangle \quad \langle 5, 9 \rangle \right)^T \quad (8)$$

内接收到全部数据. 设

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 5 \\ 10 & 8 & 10 & 7 \\ 9 & 7 & 10 & 8 \\ 7 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

经计算可得 $x^*(A, \bar{b}) = (2 \ 5 \ 2 \ 4)^\tau \geq u_e$. 于是

$$\langle u_e, x^*(A, \bar{b}) \rangle = \left(\langle e, 2 \rangle \quad \langle e, 5 \rangle \quad \langle e, 2 \rangle \quad \langle e, 4 \rangle \right)^\tau.$$

由定理 4 可知, 发射机在区间 $\langle u_e, x^*(A, \bar{b}) \rangle$ 内的任意时间发射数据, 都能使接收机在时间范围 $\mathbf{b}$ 内接收到全部数据. 例如, 取 $\hat{x} = (1 \ 3 \ 2 \ 4)^\tau$, $\tilde{x} = (2 \ 2 \ 1 \ 3)^\tau$, 有

$$\mathcal{F}(\hat{x}, A) = A\hat{x} = (9 \ 12 \ 12 \ 8)^\tau \in \mathbf{b}, \quad \mathcal{F}(\tilde{x}, A) = A\tilde{x} = (8 \ 12 \ 11 \ 9)^\tau \in \mathbf{b}.$$

由定理 5 可知, $(2 \ 5 \ 2 \ 4)^\tau$ 是保证数据按时接收的最晚发射时间. 例如, 取 $\hat{x} = (2 \ 5 \ 3 \ 4)^\tau$, 有

$$\mathcal{F}(\hat{x}, A) = A\hat{x} = (9 \ 13 \ 13 \ 9)^\tau \notin \mathbf{b}.$$

也就是说, 当发射机 E_1, E_2, E_3, E_4 发射数据的时间分别为 2, 5, 3, 4 时, 接收机 R_1, R_2, R_3, R_4 的接收时间分别为 9, 13, 13, 9. 显然, 接收机 R_3 不能按时接收数据. 再如, 取 $\tilde{x} = (2 \ 6 \ 1 \ 3)^\tau$, 有

$$\mathcal{F}(\tilde{x}, A) = A\tilde{x} = (10 \ 14 \ 13 \ 9)^\tau \notin \mathbf{b}.$$

也就是说, 当发射机 E_1, E_2, E_3, E_4 发射数据的时间分别为 2, 6, 1, 3 时, 接收机 R_1, R_2, R_3, R_4 的接收时间分别为 10, 14, 13, 9. 显然, 接收机 R_2 和 R_3 都不能按时接收数据.

定理 4 和 5 针对传输时间属于区间 $\mathbf{A}$ 但取固定值 A 的区间参数不确定数据传输系统, 而最晚发射时间 $x^*(A, \bar{b})$ 因传输时间 A 的不同可能取不同的数值. 在实际数据传输过程中, 传输时间通常不能预先确定. 针对这类情况, 下一节将给出确保数据按时接收的定量描述.

5 时序可靠性

对于不确定数据传输系统 S , 由于数据传输时间的不确定性, 使数据接收时间具有一定的随机性. 系统 S 时序的可靠性可用可靠度来衡量, 即在整个数据传输过程中, 接收机按时接收数据的比率. 为了提高时序可靠性, 希望找到一个区间使得无论传输时间在规定范围内怎样取值, 发射机在这一区间内的任一时刻发射数据, 都能使接收机在规定时间内接收到全部数据. 这样的区间称为系统 S 的可靠发射区间, 简称可靠区间. 下面利用区间参数极大-加线性方程组的容许可解性寻求不确定数据传输系统的可靠区间.

定义2 ([28]) 设 $\hat{x} \in \mathbb{R}_{\max}^n$, 如果对于任意 $A \in \mathbf{A}$, 存在 $b \in \mathbf{b}$, 使得 $A\hat{x} = b$, 则称 $\hat{x}$ 为区间参数极大-加线性方程组 (2) 的一个容许解. 如果方程组 (2) 存在容许解, 则称其容许可解.

引理5 ([40]) 区间参数极大-加线性方程组 (2) 容许可解的充分必要条件是 $Ax^*(\bar{A}, \bar{b}) \geq \bar{b}$.

定义3 设区间参数极大-加线性方程组 (2) 容许可解, 如果区间向量 $\mathbf{x}$ 中的任意向量都是方程组 (2) 的容许解, 即 $(\forall x \in \mathbf{x})(\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})[Ax = b]$, 则称 $\mathbf{x}$ 为方程组 (2) 的一个容许解区间.

定义 3 的实际意义是, 当数据的传输时间在 $\mathbf{A}$ 内变化时, 数据的发射时间在 $\mathbf{x}$ 中任意设定, 都能将数据的接收时间控制在范围 $\mathbf{b}$ 内. 因此, 区间参数极大-加线性方程组 (2) 的非负容许解区间就是系统 S 的一个可靠区间. 下面给出可靠区间存在的条件, 并在此条件下给出最大可靠区间.

定理6 若 $x^*(\bar{A}, \bar{b}) \geq u_e$, 则系统 S 的可靠区间存在, 并且 $\langle u_e, x^*(\bar{A}, \bar{b}) \rangle$ 是最大的可靠区间.

证明 因为 $x^*(\bar{A}, \bar{b}) \geq u_e$, 所以 $\underline{A}x^*(\bar{A}, \bar{b}) \geq \underline{A}u_e = \underline{b}$. 由引理 5 可知, 方程组 (2) 容许可解. 下面证明非负区间向量 $\langle u_e, x^*(\bar{A}, \bar{b}) \rangle$ 是方程组 (2) 的一个容许解区间. 对于任意 $u_e \leq \hat{x} \leq x^*(\bar{A}, \bar{b})$ 和任意 $\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$, 有

$$\underline{b} = \underline{A}u_e \leq Au_e \leq A\hat{x} \leq Ax^*(\bar{A}, \bar{b}) \leq \bar{A}x^*(\bar{A}, \bar{b}) \leq \bar{b}.$$

于是 $A\hat{x} \in \mathbf{b}$, 即存在 $b \in \mathbf{b}$ 使得 $A\hat{x} = b$. 因此, $\langle u_e, x^*(\bar{A}, \bar{b}) \rangle$ 是系统 S 的一个可靠区间. 设 $\tilde{x}$ 是方程组 (2) 的任意容许解, 则 $\bar{A}\tilde{x} \in \mathbf{b}$. 由定理 5 可知,

$$\max_{\bar{A}\tilde{x} \in \mathbf{b}} x = x^*(\bar{A}, \bar{b}).$$

于是 $\tilde{x} \in \langle u_e, x^*(\bar{A}, \bar{b}) \rangle$. 因此 $\langle u_e, x^*(\bar{A}, \bar{b}) \rangle$ 是系统 S 最大的可靠区间.

定理 6 针对传输时间 A 在区间 $\mathbf{A}$ 内任意取值的区间参数不确定数据传输系统. 无论传输时间 A 在区间 $\mathbf{A}$ 内如何取值, 只要发射时间取自可靠区间 $\langle u_e, x^*(\bar{A}, \bar{b}) \rangle$, 接收时间就总能锁定在规定时间范围 $\mathbf{b}$ 内. 下面给出求最大可靠区间的算法, 并证明它是一个多项式算法.

求最大可靠区间的算法

第 1 步: 计算 $x^*(\bar{A}, \bar{b})$. $x^*(\bar{A}, \bar{b}) = (x_1^*(\bar{A}, \bar{b}), x_2^*(\bar{A}, \bar{b}), \dots, x_n^*(\bar{A}, \bar{b}))^T$, 其中

$$x_j^*(\bar{A}, \bar{b}) = \min\{\bar{b}_1 - \bar{t}_{1j}, \bar{b}_2 - \bar{t}_{2j}, \dots, \bar{b}_n - \bar{t}_{nj}\}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

第 2 步: 计算 $x^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus u_e$. $x^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus u_e = (x_1^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus e, x_2^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus e, \dots, x_n^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus e)^T$.

若 $x^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus u_e \neq x^*(\bar{A}, \bar{b})$, 则系统 S 的可靠区间不存在;

若 $x^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus u_e = x^*(\bar{A}, \bar{b})$, 则进行下一步.

第 3 步: 计算 $\underline{A}x^*(\bar{A}, \bar{b})$.

$$\underline{A}x^*(\bar{A}, \bar{b}) = \begin{pmatrix} \underline{t}_{11} & \underline{t}_{12} & \cdots & \underline{t}_{1n} \\ \underline{t}_{21} & \underline{t}_{22} & \cdots & \underline{t}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{t}_{n1} & \underline{t}_{n2} & \cdots & \underline{t}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^*(\bar{A}, \bar{b}) \\ x_2^*(\bar{A}, \bar{b}) \\ \vdots \\ x_n^*(\bar{A}, \bar{b}) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

其中 $c_j = \underline{t}_{j1}x_1^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus \underline{t}_{j2}x_2^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus \cdots \oplus \underline{t}_{jn}x_n^*(\bar{A}, \bar{b})$, $1 \leq j \leq n$.

第 4 步: 计算 $\underline{A}x^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus \underline{b}$. $\underline{A}x^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus \underline{b} = (c_1 \oplus \underline{b}_1, c_2 \oplus \underline{b}_2, \dots, c_n \oplus \underline{b}_n)^T$.

若 $\underline{A}x^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus \underline{b} \neq \underline{A}x^*(\bar{A}, \bar{b})$, 则系统 S 的可靠区间不存在;

若 $\underline{A}x^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus \underline{b} = \underline{A}x^*(\bar{A}, \bar{b})$, 则 $\langle u_e, x^*(\bar{A}, \bar{b}) \rangle$ 是系统 S 最大的可靠区间.

定理 7 求最大可靠区间的算法具有时间复杂度 $O(n^2)$.

证明 在第 1 步中, 计算每个 $x_j^*(\bar{A}, \bar{b})$ 需要进行 n 次减法 ($-$) 运算和 $(n-1)$ 次取极小 ($\min$) 运算. 因此, 第 1 步的运算次数为 $n(n+n-1) = 2n^2 - n$.

在第 2 步中, 计算向量 $x^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus u_e$ 需要进行 n 次取极大 ($\oplus$) 运算. 比较 $x^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus u_e$ 和 $x^*(\bar{A}, \bar{b})$ 的各个分量是否相等需要进行 n 次比较运算. 因此, 第 2 步的运算次数为 $n+n = 2n$.

在第 3 步中, 计算每个 c_j 需要进行 n 次加法运算 ($\otimes$) 和 $(n-1)$ 次取极大 ($\oplus$) 运算. 因此, 第 3 步的运算次数为 $n(n+n-1) = 2n^2 - n$.

在第 4 步中, 计算向量 $\underline{A}x^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus \underline{b}$ 需要进行 n 次取极大 ($\oplus$) 运算. 比较 $\underline{A}x^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus \underline{b}$ 和 $\underline{A}x^*(\bar{A}, \bar{b})$ 的各个分量是否相等需要进行 n 次比较运算. 因此, 第 4 步的运算次数为 $n+n = 2n$.

综上所述, 至多经 $2n^2 - n + 2n + 2n^2 - n + 2n = 4n^2 + 2n$ 次算术运算, 或者断定可靠区间不存在, 或者求出最大可靠区间. 由此可知, 求最大可靠区间的算法具有时间复杂度 $O(n^2)$.

下面看一个数值例子.

例4 求不确定数据传输系统 (5) 的最大可靠区间, 其中 $\mathbf{b}$ 如式 (8) 所示.

第 1 步: 计算 $x^*(\bar{A}, \bar{b})$.

$$x_1^*(\bar{A}, \bar{b}) = \min\{\bar{b}_1 - \bar{t}_{11}, \bar{b}_2 - \bar{t}_{21}, \bar{b}_3 - \bar{t}_{31}, \bar{b}_4 - \bar{t}_{41}\} = \min\{10 - 7, 13 - 11, 12 - 11, 9 - 7\} = 1,$$

$$x_2^*(\bar{A}, \bar{b}) = \min\{\bar{b}_1 - \bar{t}_{12}, \bar{b}_2 - \bar{t}_{22}, \bar{b}_3 - \bar{t}_{32}, \bar{b}_4 - \bar{t}_{42}\} = \min\{10 - 5, 13 - 9, 12 - 9, 9 - 5\} = 3,$$

$$x_3^*(\bar{A}, \bar{b}) = \min\{\bar{b}_1 - \bar{t}_{13}, \bar{b}_2 - \bar{t}_{23}, \bar{b}_3 - \bar{t}_{33}, \bar{b}_4 - \bar{t}_{43}\} = \min\{10 - 7, 13 - 11, 12 - 11, 9 - 7\} = 1,$$

$$x_4^*(\bar{A}, \bar{b}) = \min\{\bar{b}_1 - \bar{t}_{14}, \bar{b}_2 - \bar{t}_{24}, \bar{b}_3 - \bar{t}_{34}, \bar{b}_4 - \bar{t}_{44}\} = \min\{10 - 5, 13 - 9, 12 - 9, 9 - 5\} = 3.$$

于是 $x^*(\bar{A}, \bar{b}) = (1 \ 3 \ 1 \ 3)^T$.

第 2 步: 计算 $x^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus u_e$. $x^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus u_e = (1 \ 3 \ 1 \ 3)^T \oplus (e \ e \ e \ e)^T = (1 \ 3 \ 1 \ 3)^T = x^*(\bar{A}, \bar{b})$.

第 3 步: 计算 $\underline{A}x^*(\bar{A}, \bar{b})$.

$$\underline{A}x^*(\bar{A}, \bar{b}) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 3 \\ 9 & 7 & 9 & 7 \\ 9 & 7 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

第 4 步: 计算 $\underline{A}x^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus \underline{b}$. $\underline{A}x^*(\bar{A}, \bar{b}) \oplus \underline{b} = (6 \ 10 \ 10 \ 6)^T \oplus (5 \ 9 \ 9 \ 5)^T = (6 \ 10 \ 10 \ 6)^T = \underline{A}x^*(\bar{A}, \bar{b})$.

于是系统 (5) 的可靠区间存在. 由定理 6 可知

$$\mathbf{x} = \langle u_e, x^*(\bar{A}, \bar{b}) \rangle = \left(\langle e, 1 \rangle \quad \langle e, 3 \rangle \quad \langle e, 1 \rangle \quad \langle e, 3 \rangle \right)^T$$

是系统 (5) 的最大可靠区间. 发射机在这一区间内的任一时刻发射数据, 接收机总是可以按时接收数据. 例如, 取 $\hat{x} = (e \ 3 \ 1 \ 2)^T$, A 如式 (6) 所示, 有 $A\hat{x} = (7 \ 11 \ 11 \ 8)^T \in \mathbf{b}$. 再如, 取 $\tilde{x} = (1 \ 2 \ 1 \ 2)^T$, A 如式 (9) 所示, 有 $A\tilde{x} = (7 \ 10 \ 11 \ 7)^T \in \mathbf{b}$.

6 结论

本文运用极大-加代数方法建立了不确定数据传输系统的时序演化模型, 研究了时序最优控制和时序可靠性问题, 同时扩展了极大-加线性方程组的可解性理论. 引入极大-加线性方程组非负可解的概念, 给出了方程组非负可解的一个充分必要条件. 在此基础上, 解决了两个最优控制问题. 一是在数据传输时间取自给定区间且发射时间非负的约束条件下, 得到了接收机接收数据的最早时间以及使接收时间达到最小的最优解; 二是在数据接收时间限制于给定区间的约束条件下, 得到了发射机发射数据的最晚时间以及使发射时间达到最大的最优解. 引入不确定数据传输系统的可靠区间和区间参数极大-加线性方程组的容许解区间, 指出了区间参数极大-加线性方程组的非负容许解区间就是相应不确定数据传输系统的一个可靠区间. 在此基础上, 研究时序可靠性问题. 在传输时间不能预先确定的情况下, 找到了一个确保数据按时接收的可靠发射区间, 并给出了一个求最大可靠区间的多项式

算法. 理论推导和数值例子表明, 本文的控制与优化方法有助于提高不确定数据传输系统传输数据的及时性和可靠性.

致谢 第二作者感谢檀润华教授对研究工作的支持.

参考文献

- 1 Roddy D. Satellite Communications. New Jersey: Prentice Hall, 1989
- 2 Collinson R P G. Introduction to Avionics Systems. New York: Springer Science+Business Media, 2011
- 3 Dumas M B. Principles of Computer Networks and Communications. New Jersey: Prentice Hall, 2008
- 4 Cohen G, Dunois D, Quadrat J P, et al. A linear-system-theoretic view of discrete-event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Trans Autom Contr*, 1985, 30: 210–220
- 5 Olsder G J. Applications of the theory of stochastic discrete-event systems to array processors and scheduling in public transportation. In: *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, 1989. 2012–2017
- 6 Li Q, Zhang X, Xiong H. An optimization for packet delivery in integrated avionics systems. In: *Proceedings of the 23rd Digital Avionics Systems Conference*, Salt Lake City, 2004
- 7 Goverde R M P. Railway timetable stability analysis using max-plus system theory. *Transport Res B-Meth*, 2007, 41: 179–201
- 8 Olsder G J, Roos C. Cramer and Cayley-Hamilton in the max algebra. *Linear Algebra Appl*, 1988, 101: 87–108
- 9 De Schutter B, De Moor B. A note on the characteristic equation in the max-plus algebra. *Linear Algebra Appl*, 1997, 261: 237–250
- 10 Chen W, Qi X, Deng S. The eigen-problem and period analysis of the discrete event system. *Syst Sci Math Sci*, 1990, 3: 243–260
- 11 Gaubert S. Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioides. Dissertation for Ph.D. Degree. Paris: L'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1992
- 12 Gaubert S, Gunawardena J. The duality theorem for min-max functions. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Series I: Mathematics*, 1998, 326: 43–48
- 13 Zhao Q. A remark on inseparability of min-max systems. *IEEE Trans Autom Contr*, 2004, 49: 967–970
- 14 Butkovič P, MacCaig M. On integer eigenvectors and subeigenvectors in the max-plus algebra. *Linear Algebra Appl*, 2013, 438: 3408–3424
- 15 De Schutter B, De Moor B. The QR decomposition and the singular value decomposition in the symmetrized max-plus algebra. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 1998, 19: 378–406
- 16 Chen W, Qi X. Period assignment of discrete event dynamic systems. *Sci China Ser A*, 1993, 13: 1–7
- 17 Cohen G, Dubois D, Quadrat J P, et al. Linear system theory for discrete event systems. In: *Proceedings of the 23rd IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, 1984. 539–544
- 18 Wang L, Zheng D. On the reachability of linear discrete event dynamic systems. *Appl Math A J Chinese Univ*, 1990, 5: 292–301
- 19 Tao Y, Liu G-P, Mu X. Max-plus matrix method and cycle time assignability and feedback stabilizability for min-max-plus systems. *Math Contr Signals Syst*, 2013, 25: 197–229
- 20 Adzkiya D, De Schutter B, Abate A. Computational techniques for reachability analysis of max-plus-linear systems. *Automatica*, 2015, 53: 293–302
- 21 De Schutter B, van den Boom T J J. Model predictive control for max-plus-linear discrete event systems. *Automatica*, 2001, 37: 1049–1056
- 22 van den Boom T J J, De Schutter B. Properties of MPC for max-plus-linear systems. *Eur J Contr*, 2002, 8: 453–462
- 23 Moore R E. *Methods and Applications of Interval Analysis*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied

- Mathematics, 1979
- 24 Lhommeau M, Hardouin L, Cottenceau B, et al. Interval analysis and dioid: application to robust controller design for timed event graphs. *Automatica*, 2004, 40: 1923–1930
 - 25 Aubry C, Desmare R, Jaulin L. Loop detection of mobile robots using interval analysis. *Automatica*, 2013, 49: 463–470
 - 26 Zhang H, Tao Y, Zhang Z. Strong solvability of interval max-plus systems and applications to optimal control. *Syst Contr Lett*, 2016, 96: 88–94
 - 27 Cechlárová K, Cuninghame-Green R A. Interval systems of max-separable linear equations. *Linear Algebra Appl*, 2002, 340: 215–224
 - 28 Myšková H. Interval systems of max-separable linear equations. *Linear Algebra Appl*, 2005, 423: 263–272
 - 29 Myšková H. Interval max-plus systems of linear equations. *Linear Algebra Appl*, 2012, 437: 1992–2000
 - 30 Chakraborty S, Yun K Y, Dill D L. Timing analysis of asynchronous systems using time separation of events. *IEEE Trans Comput Aided Design Integr Circ Syst*, 1999, 18: 1061–1076
 - 31 Zhao Q, Mao J, Tao Y. Time separations of cyclic event rule systems with min-max timing constraints. *Theor Comput Sci*, 2008, 407: 496–510
 - 32 Cuninghame-Green R A. *Minimax Algebra*. Berlin: Springer-Verlag, 1979
 - 33 Baccelli F, Cohen G, Olsder G J, et al. *Synchronization and Linearity*. New York: John Wiley and Sons, 1992
 - 34 Heidergott B, Olsder G J, van der Woude J. *Max-Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems*. New Jersey: Princeton University Press, 2006
 - 35 Zimmermann K. *Extremální Algebra*. Praha: Ekonomicko-matematická laboratoř Ekonomického ústavu ČSAV, 1976
 - 36 Butkovič P. *Max-Linear Systems: Theory and Algorithms*. Berlin: Springer-Verlag, 2010
 - 37 Alefeld G, Herzberger J. *Introduction to Interval Computations*. New York: Academic Press, 1983
 - 38 Alefeld G, Mayer G. Interval analysis: theory and applications. *J Comput Appl Math*, 2000, 121: 421–464
 - 39 Litvinov G L, Sobolevskii A N. Idempotent interval analysis and optimization problems. *Reliable Comput*, 2001, 7: 353–377
 - 40 Cechlárová K. Solutions of interval linear systems in max-plus algebra. In: *Proceedings of the Symposium on Operations Research*, Preddvor, 2001. 321–326

Timing optimal control and reliability of uncertain data transmission systems with interval parameters

Cailu WANG, Yuegang TAO*, Peng YANG & Zuojun LIU

School of Control Science and Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China

*E-mail: yuegangtao@hebut.edu.cn

Abstract This paper presents an investigation of the timing optimal control and timing reliability of data transmission systems of which the launch time, transmission time, and reception time are uncertain. The time series model of uncertain data transmission systems is established by using max-plus algebra. We introduce the parametric vector-valued function of uncertain data transmission systems and the non-negative solution of max-plus linear equations. We determine, on the one hand, the minimum value of the reception time (the earliest reception time) of the data and the corresponding optimal solutions under the constraints for which the transmission time is valued in given intervals and the launch time is non-negative. On the other hand, we establish the maximum value of the launch time (the latest launch time) of the data and the corresponding optimal solutions under the constraints for which the reception time is limited in some intervals. We define reliable intervals of uncertain data transmission systems such that the data can be received within the required time and the influence of transport

delays can be avoided as long as they are launched at any time during such intervals. The tolerance solution intervals of interval systems of max-plus linear equations is introduced to establish the existing criterion of reliable intervals, and an effective algorithm for finding the largest reliable interval is developed.

Keywords uncertain data transmission system, timing analysis, optimal control, reliability, interval system of max-plus linear equations, solvability

Cailu WANG is a Ph.D. candidate at the School of Control Science and Engineering, Hebei University of Technology. Her research interests include the control and optimization of discrete-event systems.

Yuegang TAO received the Ph.D. degree from the Academy of Mathematics and Systems Science, the Chinese Academy of Sciences. He is currently a professor at the School of Control Science and Engineering, Hebei University of Technology. His research interests include the modeling, control, and optimization of discrete-event systems.

Peng YANG received the Ph.D. degree in electrical engineering from Hebei University of Technology. He is currently a professor and dean in the School of Control Science and Engineering, Hebei University of Technology. His research interests are in system modeling and control, service robotics, and intelligent prostheses.

Zuojun LIU received the Ph.D. degree from Nankai University. He is currently a professor in the School of Control Science and Engineering, Hebei University of Technology. His research interests include the control and optimization of complex systems.