角修正型双圆环面二次包络环面蜗杆传动的啮合原理

赵亚平^{①*}, SU DaiZhong^②, 张昭^①, 魏文军, 董学朱^③

① 武汉科技大学机械自动化学院, 武汉 430081;

② Advanced Design and Manufacturing Engineering Center, Nottingham Trent University, Nottingham NG1 4BU, UK;

③ 中国农业大学工学院, 北京 100083

* E-mail: zhaoyaping1975@126.com

收稿日期: 2009-05-04; 接受日期: 2009-11-11

国家自然科学基金(批准号: 50705068, 50810105045), 湖北省自然科学基金(批准号: 2007ABA282)和武汉科技大学科学研究重点项目(批准号: 2006XZ6)资助

摘要 导出了一般化的角修形条件, 解释了角修形的物理意义; 提出啮合分析的法截面法, 该方法可以用来计算奇异啮合点附近共轭齿面偶的法向距离; 运用该方法, 通过分析法截线, 指明角修形传动蜗杆螺旋面、蜗轮齿面名义原接触区、新接触区三者沿传动副瞬时接触线奇点轨迹相互交叉, 说明三者虽然相互密切, 但程度不同; 阐明角修形切去蜗轮齿面二次接触区, 并且使得蜗杆工作长度变短的机理. 在角修正型二包传动啮合理论的指导下, 对角修形双圆环面二包传动的啮合特性进行了深入系统的研究, 发现这是一种性能优良的新型环面蜗杆传动装置.

关键词
环面蜗杆
角修形
二次包络
密切
法截线

双圆环面二次包络环面蜗杆传动, 以圆环面作为蜗杆螺旋面的产形母面, 可以同时加工蜗杆齿槽的两侧螺旋面; 蜗轮齿面由产形面与蜗杆螺旋面一致的环面滚刀范成. 除了出色的制造工艺性和能够应用于多头数小传动比的场合外, 双圆环面二包传动还具备一系列的优良啮合特性, 例如蜗杆双线工作区长, 蜗轮齿面接触区宽阔且瞬时接触线分布合理, 诱导主曲率值合乎等强度原则及润滑特性优良等^[1~3].

不过, 与传统二次包络环面蜗杆传动相似, 双圆环面二包副蜗轮齿面中部也存在二次接触区, 该区域内瞬时接触线相互交叉, 蜗杆蜗轮接触频率高, 容易发生疲劳点蚀, 因此, 二次接触区是蜗轮齿面的薄弱部位, 制约着传动副承载能力的充分发挥与进一

步提高. 解决这个问题的办法之一, 就是对蜗杆进行角修形, 使得二次接触区在蜗轮齿面上不再出现. 由此, 可以得到角修正双圆环面二包传动.

20 世纪 70 年代, 日本学者率先开展了角修形环面蜗杆副的研究^[4]; 随后, 我国学者按日本学者的思路, 从数学上对这个问题进行了详细、严格地证明与诠释^[5]; 文献[6~8]研究了直平面角修形二包传动, 实际上这是角修形传动的一个特款; 文献[9]研究了双锥面角修形二包传动; 最近, 文献[10]对环面蜗杆传动角修形进行了较为全面的研究.

本文所述的角修正双圆环面二包传动的制造与相应的标准传动大致相同, 主要不同之处存在于蜗杆制造阶段. 具体陈述如下.

刀座轴线正向与蜗杆毛坯轴线正向夹角 $90^\circ + \Delta\sigma$

不是 90° , 刀座轴线与蜗杆毛坯轴线间工艺中心距为 a_d 不是蜗杆副中心距 a , 蜗杆毛坯与刀座间工艺传动比为 i_{1d} 不是蜗杆副速比 i_{12} . 刀座沿自身轴线作螺旋运动, 螺旋参数为 p_d . 这也是角修形双圆环面二包传动与角修形直平面二包传动的不同之处. 作为修形参数的 $\Delta\Sigma$, a_d , i_{1d} 和 p_d 需按一定关系确定.

啮合分析表明, 角修正双圆环面二次包络环面蜗杆副具备许多优良特性, 是一种很有前途的交叉轴间传动装置.

1 产形砂轮设计与蜗杆螺旋面的方程

1.1 产形砂轮的设计原理

在砂轮轴截面中建立坐标系 $(O_a; x, y)$, 如图 1 所示. x 轴位于砂轮中间平面内, y 轴沿砂轮轴线, 此轴截面交砂轮产形圆环面于 $\widehat{AB}$. 若砂轮半径为 r_d 且其顶宽为 s_a , 则 A 点坐标为 $x_A = r_d$, $y_A = s_a/2$. 考虑到砂轮在刀座上安装后与蜗杆毛坯的相对位置, B 点的横坐标为 $x_B = r_d - h_f - r_2(1 - \cos\psi_0)$, 其中 r_2 为蜗轮分圆半径, h_f 为蜗杆副齿根高, ψ_0 为蜗杆分圆齿槽宽半角.

图 1 中, 点 $O(p, q)$ 为 $\widehat{AB}$ 的圆心, 点 C 为弦 AB 的中点, 根据几何关系, 可以得到直线 BO 和 CO 的方程分别为

$$\begin{cases} x - y \tan \alpha_d - x_B + y_B \tan \alpha_d = 0, \\ 8(r_d - x_B)x - 4(2y_B - s_a)y - s_a^2 + 4x_B^2 + 4y_B^2 - 4r_d^2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

式中, α_d 为砂轮工作齿形角, $\alpha_d = \arctan(\tan \alpha_t \cos \beta)$, α_t 为蜗杆轴向压力角, β 为砂轮轴线倾角; y_B 为 B 点纵坐标.

解方程组(1), 可以得到点 O 的坐标为

图 1 砂轮轴截面内圆弧工作廓线的几何特性

$$\begin{cases} p = \frac{s_a^2 \tan \alpha_d + P_1 s_a + P_2}{4(s_a - 2x_B \tan \alpha_d - 2y_B + 2r_d \tan \alpha_d)}, \\ q = \frac{s_a^2 + Q}{4(s_a - 2x_B \tan \alpha_d - 2y_B + 2r_d \tan \alpha_d)}, \end{cases} \quad (2)$$

式中,

$$\begin{cases} P_1 = 4(x_B - y_B \tan \alpha_d), \\ P_2 = -4x_B^2 \tan \alpha_d + 4y_B^2 \tan \alpha_d - 8x_B y_B + 4r_d^2 \tan \alpha_d, \\ Q = 4x_B^2 - 4y_B^2 - 8x_B y_B \tan \alpha_d - 8r_d x_B + 8r_d y_B \tan \alpha_d + 4r_d^2. \end{cases}$$

考虑到 A 点在 $\widehat{AB}$ 上, 所以

$$(p - r_d)^2 + \left(q - \frac{s_a}{2}\right)^2 - \rho^2 = 0, \quad (3)$$

式中, ρ 为砂轮轴截面内工作廓线 $\widehat{AB}$ 的半径.

当给定砂轮顶宽后, 把(2)式代入(3)式可以得到关于 y_B 的四次代数方程, 解得的 y_B 值应满足 $0 < y_B \leq r_2 \sin \psi_0$, 以保证砂轮能顺利插入蜗杆齿槽. 待确定 y_B 值后, 由(2)式可以确定 p 和 q 的值, 从而完成砂轮产形面的设计.

1.2 产形圆环面方程与其特性参数

坐标系 $\sigma_a(o_a; i_a, j_a, k_a)$ 与砂轮相固连, 砂轮的任意轴截面如图 2 所示, 单位向量 k_a 沿砂轮轴线方向, 单位向量 i_a 和 j_a 在砂轮中间平面内. 利用圆向量函数与球向量函数^[11], 可以写出产形圆环面 Σ_d 的矢量方程为

$$(r_a)_a = p e_a(\theta) + q k_a + \rho m_a(\theta, \phi) = x_a i_a + y_a j_a + z_a k_a, \quad (4)$$

式中 $x_a = (\rho \sin \phi + p) \cos \theta$, $y_a = (\rho \sin \phi + p) \sin \theta$, $z_a = \rho \cos \phi + q$, ϕ 和 θ 是 Σ_d 的两个参数.

产形圆环面 Σ_d 为回转曲面, 利用微分几何中的经典方法, 容易得到其单位法向量、两个主曲率和相应的两个主方向分别为

图 2 σ_a 中的砂轮轴截面

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{n})_a = \mathbf{m}_a(\theta, \phi), \\ k_1 = -\frac{1}{\rho}, \\ k_2 = -\frac{\sin \phi}{\rho \sin \phi + p}, \\ (\mathbf{g}_1)_a = \mathbf{n}_a(\theta, \phi), \\ (\mathbf{g}_2)_a = \mathbf{g}_a(\theta). \end{array} \right\} \quad (5)$$

产形圆环面 Σ_d 的单位法向量 $(\mathbf{n})_a$ 是由砂轮的实体指向空域.

动坐标系 $\sigma_d(o_d; \mathbf{i}_d, \mathbf{j}_d, \mathbf{k}_d)$ 与刀座相固连, $\mathbf{k}_d$ 轴沿刀座轴线方向, σ_a 与 σ_d 的相对位置如图3所示. 通过坐标变换, 在 σ_d 中可以得到 Σ_a 的方程及其单位法向量和两个主方向分别为

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{r}_d)_d = R[\mathbf{i}_d, -(90^\circ - \beta)](\mathbf{r}_a)_a - a_0 \mathbf{i}_d = x_d \mathbf{i}_d + y_d \mathbf{j}_d + z_d \mathbf{k}_d, \\ (\mathbf{n})_d = R[\mathbf{i}_d, -(90^\circ - \beta)](\mathbf{n})_a = n_x \mathbf{i}_d + n_y \mathbf{j}_d + n_z \mathbf{k}_d, \\ \left. \begin{array}{l} x_d = x_a - a_0, \\ y_d = y_a \sin \beta + z_a \cos \beta, \\ z_d = -y_a \cos \beta + z_a \sin \beta, \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} n_x = \sin \phi \cos \theta, \\ n_y = \sin \beta \sin \phi \sin \theta + \cos \beta \cos \phi, \\ n_z = -\cos \beta \sin \phi \sin \theta + \sin \beta \cos \phi, \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{g}_m)_2 = R[\mathbf{i}_2, -(90^\circ - \beta)](\mathbf{g}_m)_a \\ \quad = g_{mx} \mathbf{i}_2 + g_{my} \mathbf{j}_2 + g_{mz} \mathbf{k}_2, \quad (m=1, 2), \\ \left. \begin{array}{l} g_{1x} = \cos \phi \cos \theta, \\ g_{1y} = \sin \beta \cos \phi \sin \theta - \cos \beta \sin \phi, \\ g_{1z} = -\cos \beta \cos \phi \sin \theta - \sin \beta \sin \phi, \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} g_{2x} = -\sin \theta, \\ g_{2y} = \sin \beta \cos \theta, \\ g_{2z} = -\cos \beta \cos \theta, \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (7)$$

式中, $a_0 = a_d - r_{f1} - r_d$, r_{f1} 为蜗杆喉部根圆半径, $a_d = a + \Delta a$, Δa 为角修形中心距变动量; $R[\mathbf{i}_d, -(90^\circ - \beta)]$

图3 坐标系 σ_a 和 σ_d 的相对位置

为绕 $\mathbf{i}_d$ 轴的旋转变换矩阵^[11].

1.3 产形面族与一次包络的相对运动

如图4所示, 静坐标系 $\sigma_{od}(o_{od}; \mathbf{i}_{od}, \mathbf{j}_{od}, \mathbf{k}_{od})$ 和 $\sigma_{o1}(o_1; \mathbf{i}_{o1}, \mathbf{j}_{o1}, \mathbf{k}_{o1})$ 分别表示刀座和蜗杆毛坯的初始位置. 向量 $\mathbf{k}_{od}$ 和 $\mathbf{k}_{o1}$ 分别沿刀座和蜗杆毛坯的轴线方向, 向量 $\mathbf{i}_{od}$ 和 $\mathbf{i}_{o1}$ 沿着它们的公垂线方向, $|\overline{O_1 O_{od}}| = a_d$.

建立动坐标系 $\sigma_1(o_1; \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$ 与环面蜗杆毛坯相固连. 刀座作螺旋运动, 当它绕自身轴线 $\mathbf{k}_{od}$ 转过角度 φ_d , 蜗杆毛坯绕其轴线 $\mathbf{k}_{o1}$ 转过角度 $\varphi = i_{1d} \varphi_d$; 与此同时, 刀座沿其轴线 $\mathbf{k}_{od}$ 移动的距离是 $|\overline{O_{od} O_d}| = p_d \varphi$.

刀座作螺旋运动的过程中, 在静系 σ_{od} 中形成单参数曲面族 $\{\Sigma_d\}$. 由(6)式, 经过坐标变换, 可以得到 $\{\Sigma_d\}$ 的矢量方程及相应单位法向量族的方程分别为

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{r}_d)_{od} = R[\mathbf{k}_{od}, \varphi_d](\mathbf{r}_d)_d = x_{od} \mathbf{i}_{od} + y_{od} \mathbf{j}_{od} + z_d \mathbf{k}_{od}, \\ (\mathbf{n})_{od} = R[\mathbf{k}_{od}, \varphi_d](\mathbf{n})_d = n_{ox} \mathbf{i}_{od} + n_{oy} \mathbf{j}_{od} + n_z \mathbf{k}_{od}, \\ \left. \begin{array}{l} x_{od} = x_d \cos \varphi_d - y_d \sin \varphi_d, \\ y_{od} = x_d \sin \varphi_d + y_d \cos \varphi_d, \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} n_{ox} = n_x \cos \varphi_d - n_y \sin \varphi_d, \\ n_{oy} = n_x \sin \varphi_d + n_y \cos \varphi_d, \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (8)$$

式中, $R[\mathbf{k}_{od}, \varphi_d]$ 为绕 $\mathbf{k}_{od}$ 轴的旋转变换矩阵.

假设蜗杆毛坯绕其轴线转动的角速度为 $|\boldsymbol{\omega}| = 1 \text{ rad/s}$, 则刀座绕其轴线转动的角速度为 $|\boldsymbol{\omega}_d| = 1/i_{1d} \text{ rad/s}$. 于是, 在静坐标系 σ_{od} 中, 得到刀座与蜗杆毛坯相对运动角速度矢量和相对运动速度矢量分别为

图4 坐标系

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\omega}_{d1})_{od} = -\cos \Delta \Sigma \boldsymbol{j}_{od} + \left(\frac{1}{i_{1d}} + \sin \Delta \Sigma \right) \boldsymbol{k}_{od}, \\ (\boldsymbol{V}_{d1})_{od} = V_{d1}^{(x)} \boldsymbol{i}_{od} + V_{d1}^{(y)} \boldsymbol{j}_{od} + V_{d1}^{(z)} \boldsymbol{k}_{od}, \end{cases} \quad (9)$$

式中,

$$\begin{cases} V_{d1}^{(x)} = -y_{od} \left(\frac{1}{i_{1d}} + \sin \Delta \Sigma \right) - (z_d + p_d \varphi) \cos \Delta \Sigma \\ \quad + \frac{d\Delta a}{d\varphi}, \\ V_{d1}^{(y)} = x_{od} \left(\frac{1}{i_{1d}} + \sin \Delta \Sigma \right) + a_d \sin \Delta \Sigma, \\ V_{d1}^{(z)} = x_{od} \cos \Delta \Sigma + a_d \cos \Delta \Sigma + p_d. \end{cases}$$

1.4 一次包络的啮合函数与蜗杆螺旋面方程

根据齿轮啮合理论中的定义, 由(8)和(9)式, 得到一次包络的啮合函数为

$$\begin{aligned} \Phi_d &= (\boldsymbol{n})_{od} \cdot (\boldsymbol{V}_{d1})_{od} \\ &= A_d \sin(\varphi/i_{1d}) + B_d \cos(\varphi/i_{1d}) + C_d \\ &= \Phi_d(\phi, \theta, \varphi), \end{aligned} \quad (10)$$

式中,

$$\begin{cases} A_d = n_x a_d \sin \Delta \Sigma - n_y \left(\frac{d\Delta a}{d\varphi} - p_d \varphi \cos \Delta \Sigma \right) - T_x \cos \Delta \Sigma, \\ B_d = n_x \left(\frac{d\Delta a}{d\varphi} - p_d \varphi \cos \Delta \Sigma \right) + n_y a_d \sin \Delta \Sigma - T_y \cos \Delta \Sigma, \\ C_d = n_z (p_d + a_d \cos \Delta \Sigma) + T_z \left(\frac{1}{i_{1d}} + \sin \Delta \Sigma \right), \\ T_x = \begin{vmatrix} y_d & z_d \\ n_y & n_z \end{vmatrix}, \\ T_y = -\begin{vmatrix} x_d & z_d \\ n_x & n_z \end{vmatrix}, \\ T_z = \begin{vmatrix} x_d & y_d \\ n_x & n_y \end{vmatrix}. \end{cases}$$

由于一次包络啮合函数的系数 A_d 与 B_d 是运动参数 φ 的函数, 所以双圆环面二包角修形属于变参数修形, 或称动修形。

由(8)和(10)式, 在坐标系 σ_1 中, 可以得到蜗杆螺旋面 Σ_1 的方程及其单位法向量分别为

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r}_1)_1 = R[\boldsymbol{k}_1, -\varphi] \left\{ R[\boldsymbol{i}_{o1}, 90^\circ + \Delta \Sigma] \begin{bmatrix} x_{od} \\ y_{od} \\ z_d + p_d \varphi \end{bmatrix} + a_d \boldsymbol{i}_{o1} \right\} \\ \quad = x_{o1} \boldsymbol{e}_1(-\varphi) + y_{o1} \boldsymbol{g}_1(-\varphi) + z_1 \boldsymbol{k}_1, \\ \Phi_d = 0, \\ x_{o1} = x_{od} + a_d, \\ y_{o1} = -y_{od} \sin \Delta \Sigma - (z_d + p_d \varphi) \cos \Delta \Sigma, \\ z_1 = y_{od} \cos \Delta \Sigma - (z_d + p_d \varphi) \sin \Delta \Sigma, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} (\boldsymbol{n})_1 = R[\boldsymbol{k}_1, -\varphi] R[\boldsymbol{i}_{o1}, 90^\circ + \Delta \Sigma] (\boldsymbol{n})_{od} \\ \quad = n_{ox} \boldsymbol{e}_1(-\varphi) + n_{oy}^{(y)} \boldsymbol{g}_1(-\varphi) + n_{1z} \boldsymbol{k}_1, \\ n_{oy}^{(y)} = -n_{oy} \sin \Delta \Sigma - n_z \cos \Delta \Sigma, \\ n_{1z} = n_{oy} \cos \Delta \Sigma - n_z \sin \Delta \Sigma, \end{cases} \quad (12)$$

式中, $R[\boldsymbol{i}_{o1}, 90^\circ + \Delta \Sigma]$ 和 $R[\boldsymbol{k}_1, -\varphi]$ 分别为绕 $\boldsymbol{i}_{o1}$ 轴和绕 $\boldsymbol{k}_1$ 轴的旋转变换矩阵。

单位法向量 $(\boldsymbol{n})_1$ 的方向是由空域指向蜗杆实体。

(11)式中, 有 ϕ , θ 和 φ 三个参数, 但其中只有两个互相独立, 作为蜗杆螺旋面 Σ_1 的参数。给定不同的 φ 值, 由(11)式, 可以得到蜗杆螺旋面 Σ_1 的一族特征线。

由蜗杆螺旋面方程式(11), 可以算得蜗杆轴截面内喉部对称齿分度圆弦齿厚 $\bar{s}'_1$ 。若相应的理论弦齿厚为 $\bar{s}_1$, 则可按 $|\bar{s}'_1 - \bar{s}_1| < 0.02$ 确定砂轮顶宽 s_a 的值, 进而决定产形砂轮的其他参数。由此可见, 角修正双圆环面包络环面蜗杆产形砂轮的独立参数有三个, 分别是 r_d , ρ 和 β 。

2 角修形参数的确定

如图 4 所示, 静坐标系 σ_{o1} 和 $\sigma_{o2}(O_2; \boldsymbol{i}_{o2}, \boldsymbol{j}_{o2}, \boldsymbol{k}_{o2})$ 分别表示蜗杆蜗轮的初始位置。 $\boldsymbol{k}_{o1}$ 和 $\boldsymbol{k}_{o2}$ 分别沿蜗杆蜗轮的轴线方向, 而且二者互相垂直, $\boldsymbol{i}_{o1}$ 和 $\boldsymbol{i}_{o2}$ 沿它们的公垂线方向, 公垂线段 $|\overline{O_1 O_2}| = a$ 。动坐标系 σ_1 和 $\sigma_2(O_2; \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{j}_2, \boldsymbol{k}_2)$ 分别与蜗杆和蜗轮相固连。当蜗杆绕其轴线 $\boldsymbol{k}_{o1}$ 的转角为 φ_1 , 则蜗轮绕其轴线 $\boldsymbol{k}_{o2}$ 的相应转角为 $\varphi_2 = \varphi_1 / i_{12}$ 。

2.1 蜗杆螺旋面族与二次包络的相对运动

蜗杆与蜗轮的啮合过程中, 绕其轴线 $\boldsymbol{k}_{o1}$ 作旋转

运动, 在静坐标系 σ_{o1} 中形成单参数曲面族 $\{\Sigma_1\}$. 由(11)和(12)式, 经过坐标变换, 得到 $\{\Sigma_1\}$ 的方程及相应单位法向量族的方程为

$$\begin{cases} (\mathbf{r}_1^*)_{o1} = R[\mathbf{k}_{o1}, \varphi_1](\mathbf{r}_1) = x_{o1}^* \mathbf{i}_{o1} + y_{o1}^* \mathbf{j}_{o1} + z_1 \mathbf{k}_{o1}, \\ \Phi_d = 0, \\ (\mathbf{n}^*)_{o1} = R[\mathbf{k}_{o1}, \varphi_1](\mathbf{n}), \\ \begin{cases} x_{o1}^* = x_{o1} \cos(\varphi_1 - \varphi) - y_{o1} \sin(\varphi_1 - \varphi), \\ y_{o1}^* = x_{o1} \sin(\varphi_1 - \varphi) + y_{o1} \cos(\varphi_1 - \varphi), \end{cases} \end{cases} \quad (13)$$

式中, $R[\mathbf{k}_{o1}, \varphi_1]$ 为绕 $\mathbf{k}_{o1}$ 轴的旋转变换矩阵.

同样地, 可以假设蜗杆绕其轴线转动的角速度为 $|\boldsymbol{\omega}_1| = 1 \text{ rad/s}$, 不失一般, 则蜗轮绕其轴线转动的角速度为 $|\boldsymbol{\omega}_2| = 1/i_{12} \text{ rad/s}$. 于是, 在静坐标系 σ_{o1} 中, 得到蜗杆与蜗轮相对运动角速度矢量、相对运动速度矢量分别为

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\omega}_{12})_{o1} = \frac{1}{i_{12}} \mathbf{j}_{o1} + \mathbf{k}_{o1}, \\ (\mathbf{V}_{12})_{o1} = -\left(y_{o1}^* - \frac{z_1}{i_{12}}\right) \mathbf{i}_{o1} + x_{o1}^* \mathbf{j}_{o1} - \frac{x_{o1}^* - a}{i_{12}} \mathbf{k}_{o1}. \end{cases} \quad (14)$$

2.2 二次包络的啮合函数与角修形参数的确定

根据齿轮啮合理论中的定义, 由(13)和(14)式, 可以得到二次包络的啮合函数为 $\Phi = (\mathbf{n}^*)_{o1} \cdot (\mathbf{V}_{12})_{o1}$. 按向量回转的理论^[12]进行计算, 并利用 $\Phi_d = 0$ 化简后, 得到

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi(\phi, \theta, \varphi, \varphi_1) \\ &= 2 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} \left(A \sin \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} + B \cos \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} \right) \\ &\quad + C \cos(\varphi_1 - \varphi), \end{aligned} \quad (15)$$

式中,

$$\begin{aligned} C &= \frac{T_z}{i_{12}} \left[\frac{i_{12} - \tan \Delta \Sigma}{i_{1d}} - \frac{1}{\cos \Delta \Sigma} \right] + n_{ox} \left(1 - \frac{\tan \Delta \Sigma}{i_{12}} \right) \frac{d\Delta a}{d\varphi} \\ &\quad - n_{oy} \frac{a \sin \Delta \Sigma + \Delta a}{i_{12} \cos \Delta \Sigma} + \frac{n_z}{i_{12}} \left[p_d (i_{12} - \tan \Delta \Sigma) - a \sin \Delta \Sigma \right]. \end{aligned}$$

角修形条件下, 应使 $C \equiv 0$. 但 T_z , n_{ox} , n_{oy} 和 n_z 都是 ϕ , θ 和 φ 函数, 在蜗杆蜗轮啮合过程中, 不可能恒为 0. 不过它们的系数完全由角修形参数构成, 所以只需使它们的系数同时为零, 就可保证 $C \equiv 0$.

由 T_z 的系数为 0, 可以得到

$$\Delta \Sigma = -\arctan \frac{1}{i_{12}} \pm \arccos \frac{i_{1d}}{\sqrt{i_{12}^2 + 1}} \quad \text{或}$$

$$i_{1d} = i_{12} \cos \Delta \Sigma - \sin \Delta \Sigma. \quad (16)$$

从(16)式可知, 若以 i_{1d} 为角修形基本变量, 确定 $\Delta \Sigma$, 可以避免在选配刀座与蜗杆毛坯间传动链的交换齿轮时, 造成的工艺传动比误差; 但不利于控制角修形量 $\Delta \Sigma$ 的大小. 与直平面二包角修形不同, 双圆环面二包角修形以 $\Delta \Sigma$ 与 β 共同决定砂轮轴线与蜗杆毛坯轴线的夹角. 这一点对于磨削多头数角修正环面蜗杆极为有利. 虽然 $\Delta \Sigma$ 的值可正可负, 但是算例研究表明, 当 $\Delta \Sigma < 0$ 时, 容易造成环面蜗杆边齿顶减薄、变尖, 而且也不会对蜗杆副的啮合性能有显著的改善.

由 n_{ox} 的系数为 0, 可以得到 $(1 - \tan \Delta \Sigma / i_{12}) d\Delta a / d\varphi = 0$. 该式有意义的解应是 $d\Delta a / d\varphi = 0$, 即 $\Delta a = \text{const.}$ 由此可见, 加工角修正环面蜗杆的工艺中心距为常数.

由 n_{oy} 的系数为 0, 可以得到 $\Delta a = -a \sin^2 \Delta \Sigma$, 说明, $a_d < a$.

由 n_z 的系数为 0, 可以得到

$$p_d = \frac{a \sin \Delta \Sigma}{i_{12} - \tan \Delta \Sigma}. \quad (17)$$

综上, 可以总结出一般化的包络环面蜗杆角修形条件为.

i) 刀座轴线与蜗杆轴线正向夹角为 $90^\circ + \Delta \Sigma$, 蜗杆毛坯与刀座间的传动比为 i_{1d} . $\Delta \Sigma$ 和 i_{1d} 不相互独立, 二者之一确定后, 另一个由(16)式决定.

ii) 加工蜗杆的工艺中心距为 $a_d = a \cos^2 \Delta \Sigma$.

iii) 如果产形面的单位法向量与刀座轴线垂直, $p_d = 0$, 刀座可以不延自身轴线移动, 只作旋转运动; 否则, 刀座须作螺旋运动, 螺旋运动的参数 p_d 由(17)式决定.

角修形条件下, (15)式中 A 和 B 的值分别为

$$A = \frac{T_z}{i_{1d}} + p_d n_z + \frac{a}{i_{12}} n_{1z},$$

$$B = \frac{1}{i_{12}} [T_x \cos(\varphi/i_{1d}) - T_y \sin(\varphi/i_{1d}) - n_{oy} p_d \varphi].$$

3 一次包络的啮合特性参数

3.1 一次包络的两类界限曲线

根据定义, 一次包络啮合函数 Φ_d 对 φ 求一阶偏

导数, 可以得到一次包络的啮合界线函数 $\Phi_{d\varphi}$. 令 $\Phi_d = \Phi_{d\varphi} = 0$, 与(4)式联立, 得到砂轮产形面 Σ_d 上的一次包络啮合界线 $L_2^{(1)}$ 的方程为

$$\begin{cases} (\mathbf{r}_a)_a = x_a \mathbf{i}_a + y_a \mathbf{j}_a + z_a \mathbf{k}_a, \\ \Phi_d(\phi, \theta, \varphi) = 0, \\ \Phi_{d\varphi}(\phi, \theta, \varphi) = -i_{12} B \cos \Delta \Sigma / i_{1d} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

根据齿轮啮合理论, 可以得到一次包络曲率干涉界线函数为

$$\Psi_d = \Psi_d(\phi, \theta, \varphi) = \lambda_d(\mathbf{g}_1)_{od} \cdot (\mathbf{V}_{d1})_{od} + \mu_d(\mathbf{g}_2)_{od} \cdot (\mathbf{V}_{d1})_{od} + \Phi_{d\varphi}, \quad (19)$$

式中,

$$\begin{cases} (\mathbf{g}_m)_{od} = R[\mathbf{k}_{od}, \varphi_d](\mathbf{g}_m)_d = g_{ox}^{(m)} \mathbf{i}_{od} + g_{oy}^{(m)} \mathbf{j}_{od} + g_{mz} \mathbf{k}_{od}, \\ g_{ox}^{(m)} = g_{mx} \cos \varphi_d - g_{my} \sin \varphi_d, \\ g_{oy}^{(m)} = g_{mx} \sin \varphi_d + g_{my} \cos \varphi_d, \\ \lambda_d = k_1 (\mathbf{V}_{d1})_{od} \cdot (\mathbf{g}_1)_{od} + (\boldsymbol{\omega}_{d1})_{od} \cdot (\mathbf{g}_2)_{od}, \\ \mu_d = k_2 (\mathbf{V}_{d1})_{od} \cdot (\mathbf{g}_2)_{od} - (\boldsymbol{\omega}_{d1})_{od} \cdot (\mathbf{g}_1)_{od}, \\ (\mathbf{V}_{d1})_{od} \cdot (\mathbf{g}_m)_{od} = V_{d1}^{(x)} g_{ox}^{(m)} + V_{d1}^{(y)} g_{oy}^{(m)} + V_{d1}^{(z)} g_{mz}, \\ (\boldsymbol{\omega}_{d1})_{od} \cdot (\mathbf{g}_m)_{od} = -g_{oy}^{(m)} \cos \Delta \Sigma + g_{mz} \left(\frac{1}{i_{1d}} + \sin \Delta \Sigma \right), \end{cases} \quad m = 1, 2.$$

令 $\Psi_d = 0$ 与蜗杆螺旋面方程式(11)联立, 得到一次包络曲率干涉界线 $L_1^{(1)}$ 的方程为

$$\begin{cases} (\mathbf{r}_1)_1 = x_{o1} \mathbf{e}_1(-\varphi) + y_{o1} \mathbf{g}_1(-\varphi) + z_1 \mathbf{k}_1, \\ \Phi_d = 0, \\ \Psi_d = 0. \end{cases} \quad (20)$$

3.2 蜗杆螺旋面的曲率参数

根据齿轮啮合理论, 可以得到蜗杆螺旋面 Σ_1 上任意点沿 $(\mathbf{g}_1)_{od}$ 和 $(\mathbf{g}_2)_{od}$ 方向的法曲率分别为 $k_{\xi}^{(1)} = k_1 - \lambda_d^2 / \Psi_d$ 和 $k_{\eta}^{(1)} = k_2 - \mu_d^2 / \Psi_d$; 还可以得到沿 $(\mathbf{g}_1)_{od}$ 方向的短程挠率为 $\tau_{\xi}^{(1)} = -\lambda_d \mu_d / \Psi_d$.

在此基础上, 能够得到蜗杆螺旋面 Σ_1 上任意点 Gauss 曲率为 $K^{(1)} = k_{\xi}^{(1)} k_{\eta}^{(1)} - (\tau_{\xi}^{(1)})^2$. 角修正型双圆环面包络环面蜗杆螺旋面, 与标准型双圆环面包络环面蜗杆螺旋面一样, 都是单参数圆环面族的包络面. 算例研究表明, 角修正蜗杆螺旋面上任意点 Gauss 曲率 $K^{(1)} < 0$, 为双曲点. 因此, 角修正双圆环面包络环面蜗杆螺旋面为不可展的曲纹曲面.

4 二次包络的啮合特性分析

4.1 蜗轮齿面方程

对(13)式进行坐标变换后, 与 $\Phi = 0$ 联立, 在坐标系 σ_2 中, 得到蜗轮齿面共轭区 Σ_2 的方程为

$$\begin{cases} (\mathbf{r}_2)_2 = R[\mathbf{k}_2, -\varphi_1 / i_{12}] \{ R[\mathbf{i}_{o2}, -90^\circ](\mathbf{r}_1)_{o1} - \mathbf{a} \mathbf{i}_{o2} \} \\ = x_2 \mathbf{i}_2 + y_2 \mathbf{j}_2 - y_{o1}^* \mathbf{k}_2, \\ \Phi_d = 0, \\ \Phi = 0, \end{cases} \quad (21)$$

式中 $x_2 = (x_{o1}^* - a) \cos(\varphi_1 / i_{12}) + z_1 \sin(\varphi_1 / i_{12})$, $y_2 = -(x_{o1}^* - a) \sin(\varphi_1 / i_{12}) + z_1 \cos(\varphi_1 / i_{12})$, $R[\mathbf{i}_{o2}, -90^\circ]$ 和 $R[\mathbf{k}_2, -\varphi_1 / i_{12}]$ 分别为绕 $\mathbf{i}_{o2}$ 轴和 $\mathbf{k}_2$ 轴的旋转变换矩阵.

由(15)式可见, 与标准传动类似, 角修形条件下, 二次包络啮合函数 Φ 仍可以分解为两个因子的乘积, 相应地, 蜗轮齿面共轭区 Σ_2 也就由 Σ_{2A} 和 Σ_{2B} 两部分构成. Σ_{2A} 和 Σ_{2B} 的方程分别为

$$\begin{cases} (\mathbf{r}_2)_2 = x_2 \mathbf{i}_2 + y_2 \mathbf{j}_2 - y_{o1}^* \mathbf{k}_2, \\ \Phi_d = 0, \\ \varphi_1 - \varphi = 0, \end{cases} \quad (22a)$$

$$\begin{cases} (\mathbf{r}_2)_2 = x_2 \mathbf{i}_2 + y_2 \mathbf{j}_2 - y_{o1}^* \mathbf{k}_2, \\ \Phi_d = 0, \\ A \sin \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} + B \cos \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} = 0. \end{cases} \quad (22b)$$

由(22)式可见, 在二次包络过程中, 蜗杆螺旋面 Σ_1 作为产形面, 在蜗轮齿面上范成出共轭区 Σ_2 . 当 $\varphi_1 = \varphi$ 时, 得到 Σ_{2A} ; 当 $\varphi_1 \neq \varphi$ 时, 得到 Σ_{2B} . 与标准传动不同, 对于角修形传动, 因为在一次包络中 Σ_d 与 Σ_1 的相对位置及相对运动和二次包络中 Σ_{2A} 与 Σ_1 的相对位置及相对运动不同, 所以 Σ_{2A} 不再是产形母圆环面 Σ_d 在蜗轮齿面上的再现. 但是, 因为 Σ_{2A} 毕竟是 $\varphi_1 = \varphi$ 时得到的, 所以把 Σ_{2A} 称作名义原接触区. Σ_{2B} 是在二次包络过程中形成的, 因此称为新接触区.

令 φ_1 取不同值, 利用(22)式, 可以得到 Σ_2 上、分别位于 Σ_{2A} 和 Σ_{2B} 内的两族瞬时接触线, 这两族瞬时接触线, 是 Σ_{2A} 和 Σ_{2B} 各自的特征线. 因此, 角修正双圆环面二包传动也能实现瞬时双线接触, 这对于提高传动副的承载能力是非常有利的.

由(11)与(22a)式可知, 共轭齿面偶 $[\Sigma_1, \Sigma_{2A}]$ 在 Σ_1 上的名义原瞬时接触线与共轭齿面偶 $[\Sigma_d, \Sigma_1]$ 在 Σ_1 上

的瞬时接触线是相同的.

Σ_{2A} 和 Σ_{2B} 光滑相连, 交界线处存在公法线. 由 (22) 式, 可以得到它们的交界线方程为

$$\begin{cases} (\mathbf{r}_2)_2 = x_2 \mathbf{i}_2 + y_2 \mathbf{j}_2 - y_{o1}^* \mathbf{k}_2, \\ \Phi_d(\phi, \theta, \varphi) = 0, \\ \varphi_1 - \varphi = 0, \\ B(\phi, \theta, \varphi) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

对比 (18) 与 (23) 式, 可以发现 Σ_{2A} 和 Σ_{2B} 的交界线在蜗杆螺旋面 Σ_1 上的共轭线, 是一次包络啮合界线 $L_2^{(1)}$ 的共轭线.

4.2 二次包络的两类界线

根据定义, 由 (15) 式可以得到二次包络啮合界线函数为

$$\begin{aligned} \Phi_{\varphi_1} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} = \Phi_{\varphi_1}(\phi, \theta, \varphi, \varphi_1) \\ &= A \sin(\varphi_1 - \varphi) + B \cos(\varphi_1 - \varphi). \end{aligned} \quad (24)$$

令 $\Phi = \Phi_{\varphi_1} = 0$, 与 (11) 式联立, 得到二次包络啮合曲线 $L_2^{(2)}$ 的方程为

$$\begin{cases} (\mathbf{r}_1)_1 = x_{o1} \mathbf{e}_1(-\varphi) + y_{o1} \mathbf{g}_1(-\varphi) + z_1 \mathbf{k}_1, \\ \Phi_d(\phi, \theta, \varphi) = 0, \\ \varphi_1 - \varphi = 0, \\ B(\phi, \theta, \varphi) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

对比 (18) 与 (25) 式, 可知蜗杆螺旋面 Σ_1 上的二次包络啮合界线 $L_2^{(2)}$, 是一次包络啮合界线共轭线, 所以二次包络名义原接触线与 $L_2^{(2)}$ 相交于二次包络的二类界点. 二次包络啮合界线 $L_2^{(2)}$ 是新接触线族的包络线, 新接触线与 $L_2^{(2)}$ 相切于二次包络的二类界点. 因此, $L_2^{(2)}$ 上的点是 Σ_1 上的名义原瞬时接触线与新接触线的交点. 另外, 在蜗杆螺旋面 Σ_1 上, $L_2^{(2)}$ 的一侧存在双线接触区, $L_2^{(2)}$ 的位置决定了蜗杆双线工作长度. 由 (23) 和 (25) 式还可知, 二次包络啮合界线 $L_2^{(2)}$ 的共轭线, 是 Σ_{2A} 和 Σ_{2B} 的交界线.

根据齿轮啮合理论, 二次包络瞬时接触线法向量可以表示成

$$(\mathbf{N})_{o1} = N_{\xi}(\boldsymbol{\alpha}_1^*)_{o1} + N_{\eta}(\boldsymbol{\alpha}_2^*)_{o1}, \quad (26)$$

式中,

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\alpha}_m^*)_{o1} = R[\mathbf{k}_{o1}, \varphi_1 - \varphi] R[\mathbf{i}_{od}, 90^\circ + \Delta\Sigma](\mathbf{g}_m)_{od} \\ \quad = \alpha_{mx} \mathbf{i}_{o1} + \alpha_{my} \mathbf{j}_{o1} + \alpha_{mz} \mathbf{k}_{o1}, \\ \alpha_{mx} = g_{ox}^{(m)} \cos(\varphi_1 - \varphi) + \left(g_{oy}^{(m)} \sin \Delta\Sigma + g_{mz} \cos \Delta\Sigma\right) \\ \quad \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi), \\ \alpha_{my} = g_{ox}^{(m)} \sin(\varphi_1 - \varphi) - \left(g_{oy}^{(m)} \sin \Delta\Sigma + g_{mz} \cos \Delta\Sigma\right) \\ \quad \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi), \\ \alpha_{mz} = g_{oy}^{(m)} \cos \Delta\Sigma - g_{mz} \sin \Delta\Sigma, \quad m = 1, 2. \\ (\mathbf{V}_{12})_{o1} \cdot (\boldsymbol{\alpha}_m^*)_{o1} = -\alpha_{mx} \left(y_{o1}^* - \frac{z_{o1}}{i_{12}}\right) + \alpha_{my} x_{o1}^* \\ \quad - \alpha_{mz} \frac{x_{o1}^* - a}{i_{12}}, \\ (\boldsymbol{\omega}_{12})_{o1} \cdot (\boldsymbol{\alpha}_m^*)_{o1} = \frac{\alpha_{my}}{i_{12}} + \alpha_{mz}, \\ N_{\xi} = k_{\xi}^{(1)} (\mathbf{V}_{12})_{o1} \cdot (\boldsymbol{\alpha}_1^*)_{o1} + \tau_{\xi}^{(1)} (\mathbf{V}_{12})_{o1} \cdot (\boldsymbol{\alpha}_2^*)_{o1} \\ \quad + (\boldsymbol{\omega}_{12})_{o1} \cdot (\boldsymbol{\alpha}_2^*)_{o1}, \\ N_{\eta} = \tau_{\xi}^{(1)} (\mathbf{V}_{12})_{o1} \cdot (\boldsymbol{\alpha}_1^*)_{o1} + k_{\eta}^{(1)} (\mathbf{V}_{12})_{o1} \cdot (\boldsymbol{\alpha}_2^*)_{o1} \\ \quad - (\boldsymbol{\omega}_{12})_{o1} \cdot (\boldsymbol{\alpha}_1^*)_{o1}, \end{cases}$$

根据 (21) 式, 可以认为共轭区 Σ_2 的参数为 ϕ 和 φ_1 . 由 (15) 式可以计算出 Φ 对 ϕ 的偏导数为

$$\Phi_{\phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = \frac{\partial A}{\partial \phi} [1 - \cos(\varphi_1 - \varphi)] + \frac{\partial B}{\partial \phi} \sin(\varphi_1 - \varphi). \quad (27)$$

由 (24) 和 (27) 式可见, 当 $\varphi_1 = \varphi$ 且 $B = 0$ 时, $\Phi_{\phi} = \Phi_{\varphi_1} = 0$. 根据齿轮啮合理论, 此时 $(\mathbf{N})_{o1} = 0$ [11]. 因此, 二次包络的啮合界线 $L_2^{(2)}$ 及其共轭线, 是二次包络瞬时接触线的奇点轨迹. 事实上, 因为二次包络的啮合界线 $L_2^{(2)}$ 及其共轭线由瞬时接触线的交点构成, 所以这两条线上任意点瞬时接触线的法矢无定向.

根据齿轮啮合理论, 还可以得到二次包络的曲率干涉界线函数为 $\Psi = (\mathbf{N})_{o1} \cdot (\mathbf{V}_{12})_{o1} + \Phi_{\varphi_1}$. 当 $\Psi = 0$ 时, 得到蜗轮齿面的曲率干涉界线 $L_1^{(2)}$. 由于共轭区 Σ_2 分为 Σ_{2A} 和 Σ_{2B} 两部分, 干涉界线 $L_1^{(2)}$ 也包含相应的两支. 与 Σ_{2A} 对应的一支, 是蜗轮齿面上瞬时接触线奇点轨迹, 满足 $\Phi_{\varphi_1} = \Psi = 0$, 所以不是 Σ_{2A} 上名义原接触线族的包络线, 不引起 Σ_{2A} 根切. 与 Σ_{2B} 对应的一支, 如果存在, 是二包新接触线族的包络线. 通过分析二包新接触线的分布与走向可知, 与 Σ_{2B} 对应的曲率干涉

界线一般不会出现。综上所述, 角修正双圆环面二包副的蜗轮齿面通常无根切。

4.3 蜗杆副微观啮合特性

通常, 以诱导主曲率半径系数 $k_\rho = \Psi / [a(N_\xi^2 + N_\eta^2)]$ 和滑动角 $\theta_v = \arcsin[\Phi_{\phi_1} - \Psi / (|\mathbf{V}_{12}|_{o1} | \sqrt{N_\xi^2 + N_\eta^2})]$, 作为衡量环面蜗杆副微观啮合质量的标准^[10,13]。

此外, 还可得到共轭区 Σ_2 的 Gauss 曲率为 $K^{(2)} = (k_\xi^{(1)} - N_\xi^2 / \Psi)(k_\eta^{(1)} - N_\eta^2 / \Psi) - (\tau_\xi^{(1)} - N_\xi N_\eta / \Psi)^2$ 。算例研究表明, 名义原接触区 Σ_{2A} 由椭圆点和双曲点构成, 在 Σ_{2A} 靠近新接触区 Σ_{2B} 的一侧为双曲点, 另一侧为椭圆点。这就从曲率特征的角度, 反映了名义原接触区 Σ_{2A} 与蜗杆产形母圆环面 Σ_d 的差异。

5 角修形传动的啮合特性

5.1 角修形的物理意义

(14)式中令 $\phi_1 = \phi$, 可以得到共轭齿面偶 $[\Sigma_1, \Sigma_{2A}]$ 的相对运动角速度矢和相对运动速度矢, 在坐标系 σ_{od} 中, 它们与 ω_{d1} 和 $\mathbf{V}_{d1}$ 的关系分别为

$$\begin{cases} (\omega_{12}^{(A)})_{od} = -\frac{i_{1d}}{i_{12} \cos \Delta \Sigma} (\omega_{d1})_{od}, \\ (\mathbf{V}_{12}^{(A)})_{od} = -\frac{i_{1d}}{i_{12} \cos \Delta \Sigma} (\mathbf{V}_{d1})_{od}. \end{cases} \quad (28)$$

由(28)式可见, 共轭齿面偶 $[\Sigma_d, \Sigma_1]$ 与 $[\Sigma_1, \Sigma_{2A}]$ 的瞬时相对螺旋运动轴共线, 它们的相对运动速度反向共线, 且相对运动速度数值之比与相对运动角速度数值之比相等, 比值为角修形参数的函数。对于标准传动, 以上结论仍然成立, 只不过 $i_{1d} = i_{12}$ 且 $\Delta \Sigma = 0$ 。

5.2 瞬时接触线奇点轨迹的切方向

在蜗轮齿面 Σ_2 上的瞬时接触线奇点轨迹上任取一点 $P(x_p, y_p, z_p)$, σ_2 中点 P 的径矢为 $(\mathbf{r}_p)_2$, 与点 P 相对应的蜗杆转角为 $\phi_1^{(p)}$, 点 P 处存在蜗轮齿面 Σ_2 的法线 $(\mathbf{n}_p)_2$ 。

以 ϕ 为蜗轮齿面瞬时接触线奇点轨迹的参数, 利用相对微分法^[5], 得到蜗轮齿面瞬时接触线奇点轨迹的切向量为

$$\frac{d_2 \mathbf{r}_2}{d\phi} = \frac{d\phi}{d\phi} \frac{\partial_d \mathbf{r}_d}{\partial \phi} + \frac{d\theta}{d\phi} \frac{\partial_d \mathbf{r}_d}{\partial \theta} + 3(\mathbf{V}_{d1} + \mathbf{V}_{12}). \quad (29)$$

蜗轮齿面瞬时接触线奇点轨迹方程式(23)中, $\Phi_d = 0$ 与 $B = 0$ 分别对 ϕ 求偏导数, 可以得到

$$\begin{cases} \Phi_{d\phi} \frac{d\phi}{d\phi} + \Phi_{d\theta} \frac{d\theta}{d\phi} = 0, \\ B_\phi \frac{d\phi}{d\phi} + B_\theta \frac{d\theta}{d\phi} + B_\phi = 0, \end{cases} \quad (30)$$

式中,

$$\begin{cases} \Phi_{d\phi} = -\rho \lambda_d \\ \Phi_{d\theta} = -\mu_d (\rho \sin \phi + p), \\ B_\phi = \frac{-1}{i_{12} i_{1d}} \left(T_x \sin \frac{\phi}{i_{1d}} + T_y \cos \frac{\phi}{i_{1d}} + p_d n_{ox} \phi + i_{1d} p_d n_{oy} \right), \\ B_\theta = \frac{-1}{i_{12}} \left\{ \sin \theta (p \sin \phi + q \cos \phi) \cos \frac{\phi}{i_{1d}} \right. \\ \quad \left. + [\sin \beta \cos \theta (p \sin \phi + q \cos \phi) + a_0 g_{1z}] \sin \frac{\phi}{i_{1d}} \right. \\ \quad \left. + p_d \phi g_{oy}^{(1)} \right\}, \\ B_\theta = \frac{1}{i_{12}} \left\{ [\cos \theta (p \cos \phi - q \sin \phi) - p_d n_x \phi \sin \beta] \cos \frac{\phi}{i_{1d}} \right. \\ \quad \left. + [p_d \phi \sin \phi \sin \theta - \sin \beta \sin \theta (p \cos \phi - q \sin \phi) \right. \\ \quad \left. + a_0 n_x \cos \beta] \sin \frac{\phi}{i_{1d}} \right\}. \end{cases}$$

解方程组(30)得到

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\phi} = \frac{\mu_d B_\phi (\rho \sin \phi + p)}{\begin{vmatrix} \rho \lambda_d & \mu_d (\rho \sin \phi + p) \\ B_\phi & B_\theta \end{vmatrix}}, \\ \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{-\rho \lambda_d B_\phi}{\begin{vmatrix} \rho \lambda_d & \mu_d (\rho \sin \phi + p) \\ B_\phi & B_\theta \end{vmatrix}}. \end{cases} \quad (31)$$

记 $(\mathbf{J})_d = \frac{d\phi}{d\phi} \frac{\partial_d \mathbf{r}_d}{\partial \phi} + \frac{d\theta}{d\phi} \frac{\partial_d \mathbf{r}_d}{\partial \theta} = J_x \mathbf{i}_d + J_y \mathbf{j}_d + J_z \mathbf{k}_d$, 则 $J_x =$

$$\rho g_{1x} \frac{d\phi}{d\phi} - y_a \frac{d\theta}{d\phi}, J_y = \rho g_{1y} \frac{d\phi}{d\phi} + x_a \sin \beta \frac{d\theta}{d\phi}, J_z = \rho g_{1z} \frac{d\phi}{d\phi} - x_a \cos \beta \frac{d\theta}{d\phi}. \text{ 于是由(29)式, 在坐标系 } \sigma_{o1} \text{ 中, 得到蜗}$$

轮齿面瞬时接触线奇点轨迹的切向量为

$$\begin{aligned} (\ell)_{o1} &= R[i_{o1}, 90^\circ + \Delta\Sigma][R[k_{od}, \varphi_d](J)_d \\ &\quad + 3(V_{d1})_{od}] + 3(V_{12})_{o1} \\ &= \ell_x i_{o1} + \ell_y j_{o1} + \ell_z k_{o1}, \end{aligned} \quad (32)$$

式中,

$$\begin{cases} \ell_x = J_x \cos \frac{\varphi}{i_{1d}} - J_y \sin \frac{\varphi}{i_{1d}} \\ \quad - \frac{3 \sin \Delta\Sigma}{i_{12}} \left[\frac{y_{od}}{i_{1d}} (i_{12} \sin \Delta\Sigma + \cos \Delta\Sigma) + z_d + p_d \varphi \right], \\ \ell_y = - \left(J_x \sin \frac{\varphi}{i_{1d}} + J_y \cos \frac{\varphi}{i_{1d}} \right) \sin \Delta\Sigma - J_z \cos \Delta\Sigma \\ \quad - \frac{3 \sin \Delta\Sigma}{i_{1d}} \left(x_{od} + a \cos \Delta\Sigma \right), \\ \ell_z = \left(J_x \sin \frac{\varphi}{i_{1d}} + J_y \cos \frac{\varphi}{i_{1d}} \right) \cos \Delta\Sigma - J_z \sin \Delta\Sigma \\ \quad + \frac{3 \sin \Delta\Sigma}{i_{12} i_{1d}} \left(x_{od} - a \sin \Delta\Sigma \right). \end{cases}$$

所以, 在坐标系 σ_2 中可以得到单位化后的蜗轮齿面瞬时接触线奇点轨迹的切向量为

$$\begin{aligned} (L)_2 &= \frac{\ell_x \cos(\varphi_1/i_{12}) + \ell_z \sin(\varphi_1/i_{12})}{\sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2}} i_2 \\ &\quad - \frac{\ell_x \sin(\varphi_1/i_{12}) - \ell_z \cos(\varphi_1/i_{12})}{\sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2}} j_2 \\ &\quad - \frac{\ell_y}{\sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2}} k_2. \end{aligned} \quad (33)$$

在给定点 P , 蜗轮齿面瞬时接触线奇点轨迹的切向量 $(L_p)_2$ 为已知向量。

5.3 蜗杆螺旋面和蜗轮齿面的法截线

在点 P 以蜗轮齿面瞬时接触线奇点轨迹的法平面作共轭齿面偶 $[\Sigma_1, \Sigma_2]$ 的法截面 Π , 如图 5 所示, 则平面 Π 的单位法向量为 L_p 。于是可以得到蜗杆螺旋面 Σ_1 在法截面 Π 内的法截线 Γ_w 的方程为

$$\begin{cases} (r_w)_2 = x_2(\phi, \theta, \varphi, \varphi_1^{(p)}) i_2 + y_2(\phi, \theta, \varphi, \varphi_1^{(p)}) j_2 \\ \quad - y_{o1}^*(\phi, \theta, \varphi, \varphi_1^{(p)}) k_2, \\ \Phi_d = 0, \\ (L_p)_2 \cdot [(r_w)_2 - (r_p)_2] = 0. \end{cases} \quad (34)$$

图 5 蜗轮齿面瞬时接触线奇点处的法截面

同理, 还可以得到蜗轮齿面名义原接触区 Σ_{2A} 和新接触区 Σ_{2B} 在法截面 Π 内的法截线 Γ_A 与 Γ_B 的方程分别为

$$\begin{cases} (r_g)_2 = x_2 i_2 + y_2 j_2 - y_{o1}^* k_2, \\ \Phi_d(\phi, \theta, \varphi) = 0, \\ \varphi_1 - \varphi = 0, \\ (L_p)_2 \cdot [(r_g)_2 - (r_p)_2] = 0, \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} (r_g)_2 = x_2 i_2 + y_2 j_2 - y_{o1}^* k_2, \\ \Phi_d = 0, \\ A \sin \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} + B \cos \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} = 0, \\ (L_p)_2 \cdot [(r_g)_2 - (r_p)_2] = 0. \end{cases} \quad (36)$$

通过分析法截面 Π 内的法截线 Γ_w , Γ_A 和 Γ_B 的位置关系, 可以明确蜗杆螺旋面 Σ_1 、蜗轮齿面名义原接触区 Σ_{2A} 和新接触区 Σ_{2B} 的位置关系, 还可以计算传动副瞬时接触线奇点周围蜗杆螺旋面与蜗轮齿面的法向间隙。

6 算例与讨论

各算例的参数列于表 1。算例甲、乙和丙为角修

表 1 各算例的参数

参数及单位	甲	乙	丙	丁
设计参数				
a (mm)	240	200	320	200
i_{12}	40	12	4	12
蜗杆头数 Z_1	1	3	12	3
r_d (mm)	100	120	95	120
工艺参数				
$\rho = 5.5 m_t$ (mm)	52.11	47.97	58.44	47.97
β ($^\circ$)	8	8	25	23
$\Delta\Sigma$ ($^\circ$)	11.4821	14.02	20	0
修形参数				
i_{1d}	39	11.4	3.42	0
Δa (mm)	-9.5145	-11.74	-37.43	0
p_d (mm)	1.2007	4.1247	30.10	0
环面蜗杆边齿顶厚				
系数 k_s	0.36	0.38	0.36	0.37
传动副特性参数				
蜗杆名义工作长度系数 k_L	0.99	0.74	0.54	0.81

形传动; 为了进行角修形传动与标准传动的对比, 给出标准传动算例丁, 其设计参数与算例乙相同, 工艺参数相近.

由于头数少、传动比大, 算例甲和乙以工艺传动比为基本角修形变量. 此时据(16)式, 应注意使得 $i_{1d} < i_{12}$. 由于头数多、传动比小, 算例丙以 $\Delta\Sigma$ 为基本角修形变量, 有利于避免蜗杆边齿顶变尖.

利用蜗杆螺旋面方程式(11), 可以计算出蜗杆轴截面内边齿顶厚, 用该边齿顶厚与蜗轮端面模数 m_t 的比值 k_s 作为环面蜗杆边齿顶厚系数, 通常以 $k_s \geq 0.35$ 为环面蜗杆边齿顶无变尖的判据^[10,13]. 表 1 的计算结果表明, 角修正双圆环面包络环面蜗杆, 在头数多、传动比小的情况下, 能够有效地避免边齿顶变尖.

以算例丙为例, 研究多头数、小传动比条件下蜗

杆的根切特性. 图 6 在蜗杆轴截面内及其产形砂轮轴截面内, 分别绘出算例丙的一次包络曲率干涉界线 $L_1^{(1)}$ 及其共轭线, 并且在蜗杆螺旋面上任选一点 M , 计算了该点曲率干涉界线函数的值 $\Psi_d^{(M)} < 0$. 由该图可见, 因为曲线 $L_1^{(1)}$ 的共轭线位于产形砂轮实体内部, 曲线 $L_1^{(1)}$ 上诸点不能参与实际工艺啮合, 故曲线 $L_1^{(1)}$ 不会进入蜗杆螺旋面 Σ_1 ; 于是蜗杆螺旋面 Σ_1 整个位于曲率干涉界线 $L_1^{(1)}$ 的 $\Psi_d < 0$ 一侧; 又因为产形圆环面 Σ_d 的单位法向量是由砂轮实体指向空域, 所以算例丙中蜗杆无根切.

图 7 和 8 用虚线分别绘出了算例乙和丁的接触区, 用实线绘出了此二算例的瞬时接触线. 为便于观察, 蜗杆螺旋面 Σ_1 上的接触区在坐标系 $(o_1; \mathbf{j}_{o1}, \mathbf{k}_{o1})$ 中绘制. 蜗轮齿面接触区为 $ABHG$, 其中 $ABFE$ 为名义原

图 6 算例丙的 $L_1^{(1)}$ 曲线(蜗杆轴截面内)(a)和曲线共轭线(砂轮轴截面内)(b)

图 7 算例乙蜗轮齿面瞬时接触线族(a)和蜗杆瞬时接触线族(b)

图 8 算例丁蜗轮齿面瞬时接触线族(a)和蜗杆瞬时接触线族(b)

接触区 Σ_{2A} , $EFHG$ 为新接触区 Σ_{2B} . AB 线与蜗杆啮入端对应. EF 线是 Σ_{2A} 与 Σ_{2B} 的交界线. CD 线与蜗杆啮出端相对应.

对于标准传动算例丁, 如图 8 所示, CD 线在原接触区内, $CDFE$ 构成蜗轮齿面上啮合质量差的二次接触区. 通过选择足够的角修形量, 算例乙中 CD 线能够完全移入新接触区内, 所以二次接触区被切去, 如图 7 所示. 不过, 角修形量也不能过大, 否则会过多地减小名义原接触区, 使蜗杆啮入端瞬时接触线密集, 传动副在较长的时间内处于单线接触状态; 而且可能还会导致环面蜗杆边齿顶变尖.

在蜗杆螺旋面 Σ_1 上, 名义原接触线族 1, 2, ... 与 EF 线相交, 新接触线族 $1'$, $2'$, ... 被其包络. 对于标准传动, 每条原接触线在一包二界共轭点一侧的部分将在 CD 线与 EF 线之间实现与蜗轮齿面上二次接触区的啮合. 对于角修形传动, 由于蜗轮齿面上 CD 线移入了新接触区, 因此, 每条名义原接触线在一包二界共轭点一侧的部分将不能在 CD 线与 EF 线之间实现与蜗轮齿面啮合. 这就造成从啮出端到 EF 线, 成为角修形蜗杆螺旋面 Σ_1 上的无效区.

由此可见, 角修形蜗杆不可能利用其全长, 但是, 角修形蜗杆整个工作长度在理论上都是双线工作区. 标准蜗杆虽然可以利用其全长, 但是在全长范围内存在单线工作区与双线工作区, 其中单线工作区和蜗轮齿面上二次接触区相啮合.

有鉴于此, 可以采用啮入端 AB 线到 F 点的距离

与蜗杆螺旋部分长度 L_w 的比值定义蜗杆名义工作长度系数 k_L , 作为评价角修形传动性能的指标. 传动副具有较长的蜗杆名义工作长度, 能够延长瞬时接触线总长, 对提高传动副承载能力、增厚弹流润滑油膜都很有帮助. 由表 1 的计算结果可见, 角修正双圆环面二包传动通常具有较长的蜗杆名义工作长度, 特别是蜗杆头数少、传动比大时.

角修形蜗轮齿面上两族瞬时接触线大致成“八”字形分布. 由于切去了二次接触区, 因此名义原接触区 Σ_{2A} 内的名义原接触线族只保留了二包二界共轭点一侧的部分, 于是名义原接触线族在 Σ_{2A} 中无交叉; 新接触区 Σ_{2B} 内的瞬时接触线族分布稀疏, 移动速度快, 有利于传动副的承载与散热.

每一条名义原接触线和与之相对应的新接触线相交于 EF 线上一点. 分别以算例乙和丁原接触线 3 和新接触线 $3'$ 在 EF 线上的交点为 P 点, 作法截面 II , 得到蜗杆螺旋面 Σ_1 与蜗轮齿面 Σ_2 的法截线如图 9 所示. 有关数值计算结果列于表 2.

图 9 中以 $(n_p)_2 \times (L_p)_2$ 为横坐标正向, $(n_p)_2$ 为纵坐标正向, 点 P 为坐标原点, 则横坐标为负的部分对应新接触区 Σ_{2B} , 横坐标为正的部分对应原接触区或名义原接触区 Σ_{2A} .

对于标准传动算例丁, 在蜗轮齿面 Σ_2 上, EF 线是原接触线族的包络线, 构成原接触区的自然边界. 因此, 图 9(b)中原接触区 Σ_{2A} 的法截线 Γ_A , 在新接触区 Σ_{2B} 对应的横轴负半轴部分不出现, 蜗杆螺旋面 Σ_1

表 2 算例乙和丁法截线上对应点的法向距离

算例	第②点处 Σ_1 与 Σ_{2A} 的距离 $d_{1A}^{(2)}$ (mm)	第②点处 Σ_1 与 Σ_{2B} 的距离 $d_{1B}^{(2)}$ (mm)	第④点处 Σ_1 与 Σ_{2A} 的距离 $d_{1A}^{(4)}$ (mm)	第④点处 Σ_1 与 Σ_{2B} 的距离 $d_{1B}^{(4)}$ (mm)
乙	-0.6721	0.0030	0.1472	-0.0031
丁	-	0.0004	0.3182	-0.0002

图 9 算例乙的法截线(a)和算例丁的法截线(b)

也就与原接触区 Σ_{2A} 在点 P 相切而不密切. 由表2的计算结果可见, 新接触区 Σ_{2B} 的法截线 Γ_B 与蜗杆螺旋面 Σ_1 的法截线 Γ_w 在点 P 相交叉, 在原接触区 Σ_{2A} 内进入蜗杆实体, 所以新接触区 Σ_{2B} 与蜗杆螺旋面 Σ_1 沿 EF 线密切.

对于角修形传动算例乙, 作为 Σ_{2A} 特征线的名义原接触线族, 不再是一次包络瞬时接触线族在蜗轮齿面 Σ_2 上的再现. 虽然 Σ_2 上 EF 线仍满足 $\Phi_{d\varphi}=0$, 但 EF 线也不再是名义原接触线族的包络线, 名义原接触线与之相交. 如图9(a)所示, 名义原接触区 Σ_{2A} 的法截线 Γ_A 与蜗杆螺旋面 Σ_1 的法截线 Γ_w 在点 P 相交叉, 在新接触区 Σ_{2B} 内进入蜗杆实体, 说明名义原接触区 Σ_{2A} 与蜗杆螺旋面 Σ_1 沿 EF 线密切. 由表2的计算结果说明, 新接触区 Σ_{2B} 的法截线 Γ_B 与蜗杆螺旋面 Σ_1 的法截线 Γ_w 在点 P 相交叉, 在名义原接触区 Σ_{2A} 内进入蜗杆实体, 表明新接触区 Σ_{2B} 与蜗杆螺旋面 Σ_1 沿 EF 线密切.

各瞬时接触线由蜗轮齿顶到齿根依次取 a, b 和 c 三点, 分别计算算例乙和丁在各点的微观啮合质量参数 k_ρ 和 θ_{vt} 的值, 结果列于表3和4. 角修形传动与标准传动一样, 瞬时接触线奇点轨迹 EF 线上诸点 $k_\rho \rightarrow \infty$, 滑动角 θ_{vt} 无定义.

由于角修形使得蜗杆螺旋面 Σ_1 与 Σ_{2A} 和 Σ_{2B} 都密切, 因此, 相对于标准传动, 角修形传动蜗杆螺旋面 Σ_1 与 Σ_{2A} 的微观啮合质量得到了改善, 表3和4从 k_ρ 的数值上反映了这一点. 不过, 蜗杆螺旋面 Σ_1 与 Σ_{2A}

和 Σ_{2B} 密切的程度不同, Σ_1 与 Σ_{2B} 的贴近程度, 远远超过它和 Σ_{2A} 的贴近程度, 所以角修形蜗轮齿面新接触区的微观啮合质量仍好于名义原接触区. 此外, 角修形对蜗杆副滑动角影响不大, 对于新接触区 Σ_{2B} 的微观啮合质量一般影响也不大.

总的看来, 角修形能够使得整个蜗轮齿面的微观啮合质量得到改善. 角修正双圆环面二包传动的微观啮合质量稳定, 随着蜗杆头数增加、传动比减小变化不大.

7 结论

本文主要做了两个方面的工作, 一是丰富和发展了角修形传动啮合理论; 一是基于该理论提出了一种新型环面蜗杆传动—角修正双圆环面二次包络环面蜗杆传动.

角修形传动啮合理论方面, 本文得到的主要结论为.

- 1) 得到了一般化的角修形条件, 解释了角修形的物理意义.
- 2) 角修形传动蜗杆螺旋面、蜗轮齿面名义原接触区及新接触区三者相互密切, 沿瞬时接触线奇点轨迹互相交叉, 因此名义原接触区及新接触区各自只有一部分保留在蜗轮齿面上. 角修形蜗杆螺旋面和蜗轮齿面名义原接触区的密切程度, 与它和新接触区的密切程度不同, 所以角修形能够改善名义原接触区的微

表3 算例乙的 k_ρ 和 θ_{vt} 的值

瞬时接触线		1	2	3	4	4'	3'	2'
计算点	$\varphi_d(^{\circ})$	-15.39	-5.69	4.01	13.71	13.71	4.01	-5.69
a	k_ρ	0.28	0.35	∞	—	—	∞	1.33
	$\theta_{vt}(^{\circ})$	43.3	49.0	$(N)_{o1}=0$	—	—	$(N)_{o1}=0$	78.9
b	k_ρ	—	0.29	0.61	∞	∞	3.06	0.83
	$\theta_{vt}(^{\circ})$	—	43.2	49.5	$(N)_{o1}=0$	$(N)_{o1}=0$	53.2	68.5
c	k_ρ	—	0.27	0.36	—	—	1.14	0.68
	$\theta_{vt}(^{\circ})$	—	43.4	45.4	—	—	53.3	67.4

表4 算例丁的 k_ρ 和 θ_{vt} 的值

瞬时接触线		1	2	3	3'	2'
计算点	$\varphi_d(^{\circ})$	-13	-1	11	11	-1
a	k_ρ	0.21	0.20	0.19	—	2.69
	$\theta_{vt}(^{\circ})$	42.6	50.2	58.5	—	66.7
b	k_ρ	0.19	0.20	0.2	∞	1.01
	$\theta_{vt}(^{\circ})$	42.7	45.0	53.3	$(N)_{o1}=0$	61.4
c	k_ρ	0.19	0.19	0.2	1.79	0.69
	$\theta_{vt}(^{\circ})$	47.3	44.4	49.1	36	60.7

观啮合质量, 但新接触区的微观啮合质量, 相对于标准传动, 变动不大, 不过仍好于名义原接触区。

3) 与标准传动不同, 角修形传动蜗轮齿面瞬时接触线奇点轨迹不再是名义原接触线族的包络线, 名义原接触线与蜗轮齿面瞬时接触线奇点轨迹相交于二次包络二界共轭点。二次包络二界共轭点一侧的名义原接触线, 在蜗轮齿面上保留下来, 形成名义原接触区; 另一侧的名义原接触线(对应于标准传动蜗杆螺旋面单线工作区和蜗轮齿面二次接触区), 进入蜗杆实体, 不能参与角修形传动副的实际啮合。因

此, 角修形可以切去蜗轮齿面的二次接触区, 但角修形蜗杆只能部分参与啮合。

角修正双圆环面二包传动, 由于蜗杆边齿顶变尖与根切的问题不突出, 可以应用于多头数、小传动比的场合, 另外也有利于对传动副啮合性能进行优化; 蜗轮齿面二次接触区被切去, 整个共轭区覆盖大部分蜗轮齿面且和蜗杆螺旋面密切; 蜗轮齿面上瞬时接触线分布均匀、稀疏、无交叉, 蜗杆双线工作长度长; 该传动副的诱导主曲率和滑动角数值合理, 有利于降低接触应力水平, 形成弹流润滑油膜及增加油膜厚度。

参考文献

- 1 Zhao Y, Dong X, Wei W, et al. Study on the tooth surface configuration of dual tori double-enveloping worm pair without tooth flank modification. In: Proceeding of ICMT'2006, September, 2006, Chongqing, China. 180—184
- 2 Zhao Y, Wei W, Dong X. Tooth thickness of dual toroi enveloping toroidal worm. In: Proc. of the 12th World Congress in Mechanism and Machine Science, June, 2007, Besançon, France. 133—138
- 3 赵亚平. 双圆环面二次包络环面蜗杆传动的啮合界线与蜗杆螺旋面的结构. 武汉科技大学学报, 2008, 31(1): 74—77
- 4 酒井高男, 牧充. 交错轴齿轮传动中第二次作用的研究, 见: 国际齿轮装置与传动会议论文选. 北京: 机械工业出版社, 1977
- 5 吴大任, 骆家舜. 齿轮啮合理论. 北京: 科学出版社, 1985
- 6 吴晓玲. 角修正可展弧面蜗杆传动的啮合分析. 齿轮, 1978(4): 48—62
- 7 陈惟荣. 齿轮啮合理论. 北京: 煤炭工业出版社, 1985
- 8 胡来瑑. 空间啮合原理及应用(下). 北京: 煤炭工业出版社, 1988
- 9 田村久司, 酒井高男, 牧充. 以圆锥面为媒介齿轮齿面的弧面蜗杆(第一报: 齿形论的研究). 见: 酒井高男论文选集. 重庆: 重庆大学, 1981
- 10 董学朱. 环面蜗杆传动设计和修形. 北京: 机械工业出版社, 2004
- 11 董学朱. 齿轮啮合理论基础. 北京: 机械工业出版社, 1989
- 12 陈志新. 共轭曲面原理(上). 北京: 科学出版社, 1974
- 13 齐麟, 张亚雄, 黎上威, 等. 蜗杆传动设计. 北京: 机械工业出版社, 1987