关于Rankin-Selberg问题: Riesz余项的高次均值

谷川好男¹ 翟文广^{2*} 张德瑜²

(1. 名古屋大学多元数理科学研究科, 名古屋 464-8602, 日本; 2. 山东师范大学数学科学学院, 济南 250014)

摘要 设 $\Delta_1(x; \varphi)$ 表示 Rankin-Selberg 问题中的第 1 Riesz 余项, 研究其高次积分均值. 利用大值估计及其他技巧得到了 $\Delta_1(x; \varphi)$ 的 3 次、4 次和 5 次积分均值的渐近公式.

关键词 Rankin-Selberg 问题 Riesz 余项 Voronoï 公式 高次均值

MSC(2000) 主题分类 11N37, 11F30

1 引言

设 $\varphi(z)$ 表示全模群 $SL_2(\mathbb{Z})$ 上权为 κ 的解析模形式, $a(n)$ 表示其第 n 个 Fourier 系数. 假设 $\varphi(z)$ 是规范的, 即 $a(1) = 1$ 而且对每个阶为 n 的 Hecke 算子 $T(n)$ 有 $T(n)\varphi = a(n)\varphi$. 令

$$c_n = n^{1-\kappa} \sum_{m^2|n} m^{2(\kappa-1)} \left| a\left(\frac{n}{m^2}\right) \right|^2.$$

Deligne^[1] 证明了 $|a(n)| \leq n^{(\kappa-1)/2} d(n)$, 这意味着 $c_n \ll n^\varepsilon$, 这里 $d(n)$ 是 Dirichlet 除数函数. 经典的 Rankin-Selberg 问题是研究余项

$$\Delta(x; \varphi) := \sum_{n \leq x} c_n - Cx \quad (1.1)$$

的上界估计, 其中 C 为常数. Rankin^[2] 证明了

$$\Delta(x; \varphi) = O(x^{\frac{3}{5}}). \quad (1.2)$$

Selberg^[3] 给出了同一结论, 但未给出证明. 直到今天, 仍未能改进 Rankin 和 Selberg 的估计 (1.2). Ivić^[4] 证明了 $\Delta(x; \varphi) = \Omega_\pm(x^{\frac{3}{8}})$, 而且还猜测 $\Delta(x; \varphi) = O(x^{\frac{3}{8}+\varepsilon})$.

Ivić 等^[5] 研究了形如

$$D_\rho(x; \varphi) := \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \sum_{n \leq x} (x-n)^\rho c_n$$

的 Riesz 均值. 余项 $\Delta_\rho(x; \varphi)$ 由渐近公式

$$D_\rho(x; \varphi) = \frac{\pi^2 \kappa R_0}{6\Gamma(\rho+2)} x^{\rho+1} + \frac{Z(0)}{\Gamma(\rho+1)} x^\rho + \Delta_\rho(x; \varphi) \quad (1.3)$$

收稿日期: 2007-05-24; 接受日期: 2007-07-04

国家自然科学基金 (批准号: 10301018) 和山东省自然科学基金 (批准号: 2006A31) 资助项目

*E-mail: zhaiwg@hotmail.com

定义, 这里

$$R_0 = \frac{12(4\pi)^{\kappa-1}}{\Gamma(\kappa+1)} \iint_{\mathfrak{F}} y^{\kappa-2} |\varphi(z)|^2 dx dy,$$

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}, \quad \Re s > 1,$$

$\mathfrak{F}$ 是 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的一个基本区域, $Z(s)$ 可以解析开拓到整个复平面.

Ivić 等研究了 $\Delta(x; \varphi)$ 与 $\Delta_1(x; \varphi)$ 之间的关系. 他们证明了如果对某个 $\alpha \geq 0$ 有 $\Delta_1(x; \varphi) = O(x^\alpha)$, 则 $\Delta(x; \varphi) = O(x^{\alpha/2})$. 他们也证明了估计式

$$\Delta_1(x; \varphi) = O(x^{\frac{6}{5}}) \quad (1.4)$$

与渐近公式

$$\int_1^T \Delta_1^2(x; \varphi) dx = \frac{2}{13} (2\pi)^{-4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n^{-7/4} \right) T^{13/4} + O(T^{3+\varepsilon}). \quad (1.5)$$

最近 Ivić^[6] 研究了 $\Delta_1(x; \varphi)$ 的 4 次积分均值, 证明了

$$\int_1^T \Delta_1^4(x; \varphi) dx \ll T^{11/2+\varepsilon}. \quad (1.6)$$

注意到若不计 ε , 上界估计 (1.6) 是最佳的. 易见 (1.5) 和 (1.6) 式支持下面的猜测:

猜测 我们有估计

$$\Delta_1(x; \varphi) \ll x^{9/8+\varepsilon}. \quad (1.7)$$

本文将证明对 $\Delta_1(x; \varphi)$ 的 4 次积分均值, 可以得到其渐近公式, 从而在本质上改进了 Ivić 的结果 (1.6). 更一般地, 对 $k = 3, 4, 5$, 我们可以得到 $\Delta_1(x; \varphi)$ 的 k 次积分均值的渐近公式. 首先证明下面的定理 1, 这是一个上界估计的结果:

定理 1 设 $A \geq 0$ 是一个固定常数, 则有

$$\int_1^T |\Delta_1(x; \varphi)|^A dx \ll \begin{cases} T^{1+9A/8} \log^{39} T, & \text{若 } 0 \leq A \leq \frac{16}{3}, \\ T^{(3+6A)/5} \log^5 T, & \text{若 } A > \frac{16}{3}. \end{cases} \quad (1.8)$$

注 1 从定理 1 知估计

$$\int_1^T |\Delta_1(x; \varphi)|^{A_0} dx \ll T^{1+9A_0/8+\varepsilon} \quad (1.9)$$

对 $A_0 = 16/3$ 成立. 使得 (1.9) 式成立的 A_0 的值和 $\Delta_1(x; \varphi)$ 的上界估计密切相关, 而常数 $16/3$ 来自于估计式 (1.4).

在叙述渐近结果之前, 我们先引进一些记号. 设 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 是满足 $f(n) \ll n^\varepsilon$ 的任意函数, $k \geq 2$ 是一固定整数. 定义

$$s_{k;l}(f) := \sum_{\sqrt[4]{n_1} + \dots + \sqrt[4]{n_l} = \sqrt[4]{n_{l+1}} + \dots + \sqrt[4]{n_k}} \frac{f(n_1) \cdots f(n_k)}{(n_1 \cdots n_k)^{7/8}}, \quad 1 \leq l < k, \quad (1.10)$$

$$B_k(f) := \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k-1}{l} s_{k;l}(f) \cos \frac{\pi(k-2l)}{4}. \quad (1.11)$$

我们用 $s_{k;l}(f)$ 表示无穷级数 (1.10), 同时也表示其值. 设 $A_0 > 3$ 为一实数, 定义

$$K_0 := \min\{n \in \mathbb{N} : n \geq A_0, 2|n\}, \quad b(k) := 4^{k-2} + \frac{k-2}{8},$$

$$\sigma(k, A_0) := \frac{3(A_0 - k)}{4(A_0 - 2)}, \quad 3 \leq k < A_0,$$

$$\delta_1(k, A_0) := \frac{\sigma(k, A_0)}{4b(K_0)}, \quad \delta_2(k, A_0) := \frac{\sigma(k, A_0)}{4b(k) + 4\sigma(k, A_0)}.$$

定理 2 设 $A_0 > 5$ 为一实数使得 (1.9) 式成立, 则对任意整数 $3 \leq k < A_0$, 有渐近公式

$$\int_1^T \Delta_1^k(x; \varphi) dx = \frac{B_k(c)}{(8+9k)2^{3k-4}\pi^{2k}} T^{1+9k/8} + O(T^{1+9k/8-\delta_1(k, A_0)+\varepsilon}). \quad (1.12)$$

注 2 从定理 1 知对 $k \in \{3, 4, 5\}$, 可以得到渐近公式 (1.12). 进一步, 如果估计式 $\Delta_1(x; \varphi) \ll x^{19/16-\delta}$ 对某个小 $\delta > 0$ 成立, 则渐近公式 (1.12) 对 $k=6$ 也成立.

当 $k=3, 4, 5$ 时, 常数 $\delta_1(k, A_0)$ 很小. 在这几种情形下, 我们有下面的定理 3:

定理 3 若 $k=3, 4, 5$, 则

$$\int_1^T \Delta_1^k(x; \varphi) dx = \frac{B_k(c)}{(8+9k)2^{3k-4}\pi^{2k}} T^{1+9k/8} + O(T^{1+9k/8-\delta_2(k, 16/3)+\varepsilon}). \quad (1.13)$$

注 3 由于

$$\begin{aligned} \delta_2\left(3, \frac{16}{3}\right) &= \frac{7}{248} > \frac{1}{36}, \quad \delta_2\left(4, \frac{16}{3}\right) = \frac{3}{662} > \frac{1}{221}, \\ \delta_2\left(5, \frac{16}{3}\right) &= \frac{3}{5192} > \frac{1}{1731}, \end{aligned}$$

我们有下面的推论:

推论

$$\begin{aligned} \int_1^T \Delta_1^3(x; \varphi) dx &= \frac{B_3(c)}{1120\pi^6} T^{35/8} + O(T^{35/8-1/36+\varepsilon}), \\ \int_1^T \Delta_1^4(x; \varphi) dx &= \frac{B_4(c)}{11264\pi^8} T^{11/2} + O(T^{11/2-1/221+\varepsilon}), \\ \int_1^T \Delta_1^5(x; \varphi) dx &= \frac{B_5(c)}{108544\pi^{10}} T^{53/8} + O(T^{53/8-1/1731+\varepsilon}). \end{aligned}$$

2 预备引理

引理 2.1 设 $x > 1$ 为一实数. 对 $N \geq 1$, 定义

$$\mathcal{R}_1(x; N) = (2\pi)^{-2} x^{9/8} \sum_{n \leq N} \frac{c_n}{n^{7/8}} \cos\left(8\pi \sqrt[4]{nx} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (2.1)$$

若 $1 \ll N \ll x^2$, 则

$$\Delta_1(x; \varphi) = \mathcal{R}_1(x; N) + O(x^{1+\varepsilon} + x^{3/2+\varepsilon} N^{-1/2}). \quad (2.2)$$

证明 这是文献 [5] 引理 2 中 $\rho=1$ 的情形.

引理 2.2 设 S 是 $\mathbb{C}$ 上的内积空间, (a, b) 表示 S 中 a 与 b 的内积, $\|a\|^2 = (a, a)$. 设 $\xi, \varphi_1, \dots, \varphi_R$ 为 S 中的任意向量, 则

$$\sum_{l \leq R} |(\xi, \varphi_l)|^2 \leq \|\xi\|^2 \max_{l_1 \leq R} \sum_{l_2 \leq R} |(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2})|.$$

证明 这是熟知的 Halasz-Montgomery 不等式, 可见文献 [7] 的附录.

引理 2.3 设 $k \geq 3$, $(i_1, \dots, i_{k-1}) \in \{0, 1\}^{k-1}$ 满足

$$\sqrt[4]{n_1} + (-1)^{i_1} \sqrt[4]{n_2} + (-1)^{i_2} \sqrt[4]{n_3} + \dots + (-1)^{i_{k-1}} \sqrt[4]{n_k} \neq 0,$$

则

$$|\sqrt[4]{n_1} + (-1)^{i_1} \sqrt[4]{n_2} + (-1)^{i_2} \sqrt[4]{n_3} + \dots + (-1)^{i_{k-1}} \sqrt[4]{n_k}| \gg \max(n_1, \dots, n_k)^{-(4^{k-2}-4^{-1})}.$$

证明 使用 Tsang^[8] 的证明方法. 考虑数域 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{n_1}, \dots, \sqrt[4]{n_k})$, 其阶 h 是下列数之一: $1, 4, 4^2, \dots, 4^k$. 若 $h = 1$, 则结论显然. 下设 $h \geq 4$. 令

$$\alpha = \sqrt[4]{n_1} + (-1)^{i_1} \sqrt[4]{n_2} + (-1)^{i_2} \sqrt[4]{n_3} + \dots + (-1)^{i_{k-1}} \sqrt[4]{n_k},$$

$\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_h$ 表示 α 的所有 conjugates. 不失一般性, 设

$$\begin{aligned} \alpha_{\frac{h}{4}+j} &= -\alpha_j, \quad 1 \leq j \leq \frac{h}{4}; \\ \alpha_{\frac{h}{2}+j} &= \sqrt{-1}\alpha_j, \quad 1 \leq j \leq \frac{h}{4}, \\ \alpha_{\frac{3h}{4}+j} &= -\sqrt{-1}\alpha_j, \quad 1 \leq j \leq \frac{h}{4}. \end{aligned}$$

由于 $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_h$ 是一非零整数, 所以 $|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_h| \geq 1$ 及

$$|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{h/4}| \geq 1,$$

这结合估计 $|\alpha_j| \leq k \max(n_1, \dots, n_k)$ 蕴含了

$$\begin{aligned} |\alpha| &\geq \frac{1}{\prod_{j=2}^{h/4} |\alpha_j|} \geq k^{1-h/4} \max(n_1, \dots, n_k)^{-(h/16-1/4)} \\ &\geq k^{1-4^{k-1}} \max(n_1, \dots, n_k)^{-(4^{k-2}-1/4)}. \end{aligned}$$

引理 2.4 设 $y > 1$, 定义

$$s_{k;l}(f; y) := \sum_{\substack{\sqrt[4]{n_1} + \dots + \sqrt[4]{n_l} = \sqrt[4]{n_{l+1}} + \dots + \sqrt[4]{n_k} \\ n_j \leq y, \quad 1 \leq j \leq k}} \frac{f(n_1) \dots f(n_k)}{(n_1 \dots n_k)^{7/8}}, \quad 1 \leq l < k,$$

则

$$|s_{k;l}(f; y) - s_{k;l}(f)| \ll y^{-3/4+\varepsilon}.$$

此引理的证明与文献 [9] 中引理 3.1 的证明相同, 故略去.

3 定理 1 的证明

为证明定理 1, 只需研究积分 $\int_T^{2T} |\Delta_1(x; \varphi)|^A dx$ 的上界估计.

3.1 $\Delta_1(x; \varphi)$ 的大值估计

首先用 Ivić 的技巧 (例如, 文献 [7] 第 13 章) 证明下面的定理 4:

定理 4 设 $T \leq x_1 < x_2 < \dots < x_M \leq 2T$ 满足 $|\Delta_1(x_l; \varphi)| \gg VT$ ($l = 1, 2, \dots, M$), 而且 $|x_j - x_i| \gg V \gg T^{2/21} \mathcal{L}^{34/21}$ ($i \neq j$), 则有

$$M \ll TV^{-3} \mathcal{L}^5 + T^4 V^{-25} \mathcal{L}^{39}, \quad (3.1)$$

这里 $\mathcal{L} = \log T$.

证明 设 $V < T_0$ 为一待定参量, I 为长度不超过 T_0 的 $[T, 2T]$ 的任意子区间, $G = I \cap \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$. 不失一般性, 设 $G = \{x_1, x_2, \dots, x_{M_0}\}$.

令 $J = \left[\frac{(1+4\varepsilon)\mathcal{L}-2\log V}{\log 2} \right]$, 则 $N = 2^{J+1} \asymp T^{1+4\varepsilon}V^{-2}$. 由引理 2.1 得 ($T \leq x \leq 2T$)

$$\begin{aligned} \Delta_1(x; \varphi) &\ll T^{\frac{9}{8}} \left| \sum_{n \leq N} \frac{c_n}{n^{7/8}} e(4(nx)^{1/4}) \right| + T^{1-\varepsilon}V \\ &\ll T^{\frac{9}{8}} \left| \sum_{j=0}^J \sum_{n \sim 2^j} \frac{c_n}{n^{7/8}} e(4(nx)^{1/4}) \right| + T^{1-\varepsilon}V. \end{aligned}$$

在集合 G 上对上式平方, 求和并进而使用 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned} \sum_{l \leq M_0} \Delta_1^2(x_l; \varphi) &\ll T^{\frac{9}{4}} \sum_{l \leq M_0} \left| \sum_j \sum_{n \sim 2^j} c_n n^{-7/8} e(4(nx_l)^{1/4}) \right|^2 \\ &\ll T^{\frac{9}{4}} \mathcal{L} \sum_{l \leq M_0} \sum_j \left| \sum_{n \sim 2^j} c_n n^{-7/8} e(4(nx_l)^{1/4}) \right|^2 \\ &\ll T^{\frac{9}{4}} \mathcal{L}^2 \sum_{l \leq M_0} \left| \sum_{n \sim 2^{j_0}} c_n n^{-7/8} e(4(nx_l)^{1/4}) \right|^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

对某 $0 \leq j_0 \leq J$ 成立. 令 $N_0 = 2^{j_0}$.

令 $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty$, 这里当 $n \sim N_0$ 时 $\xi_n = c_n n^{-7/8}$, 其他情形下 $\xi_n = 0$. 令 $\varphi_l = \{\varphi_{l,n}\}_{n=1}^\infty$, 这里当 $n \sim N_0$ 时 $\varphi_{l,n} = e(4(nx_l)^{1/4})$, 其他情形下 $\varphi_{l,n} = 0$. 易见

$$\begin{aligned} (\xi, \varphi_l) &= \sum_{n \sim N_0} \frac{c_n}{n^{7/8}} e(4(nx_l)^{1/4}), \\ (\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}) &= \sum_{n \sim N_0} e(4n^{1/4}(x_{l_1}^{1/4} - x_{l_2}^{1/4})), \\ \|\xi\|^2 &= \sum_{n \sim N_0} \frac{c_n^2}{n^{7/4}} \ll N_0^{-7/4} \sum_{n \sim N_0} c_n^2 \ll N_0^{-3/4} \mathcal{L}^{1+\varepsilon}, \end{aligned}$$

其中在最后一个估计式中用到了 Matsumoto^[10] 证明的估计

$$\sum_{n \leq x} c_n^2 \ll x \log^{1+\varepsilon} x. \quad (3.3)$$

由 (3.2) 式和引理 2.2 可得

$$\begin{aligned} M_0 V^2 &\ll T^{1/4} \mathcal{L}^2 \sum_{l \leq M_0} \left| \sum_{n \sim N_0} c_n n^{-7/8} e(4(nx_l)^{1/4}) \right|^2 \\ &\ll \mathcal{L}^{3+\varepsilon} T^{1/4} N_0^{-3/4} \max_{l_1 \leq M_0} \sum_{l_2 \leq M_0} \left| \sum_{n \sim N_0} e(4n^{1/4}(x_{l_1}^{1/4} - x_{l_2}^{1/4})) \right| \\ &\ll \mathcal{L}^{3+\varepsilon} T^{1/4} N_0^{1/4} + \frac{\mathcal{L}^{3+\varepsilon} T^{1/4}}{N_0^{3/4}} \max_{l_1 \leq M_0} \sum_{\substack{l_2 \leq M_0, \\ l_2 \neq l_1}} \left| \sum_{n \sim N_0} e(4n^{1/4}(x_{l_1}^{1/4} - x_{l_2}^{1/4})) \right|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

由 Kuzmin-Landau 不等式, 指数对 $(1/11, 9/11) = C_{6/11}((0, 1), (1/6, 4/6))$, 中值定理并注意 $|x_{l_1} - x_{l_2}| \leq T_0$ 可得

$$\sum_{n \sim N_0} e(4n^{1/4}(x_{l_1}^{1/4} - x_{l_2}^{1/4})) \ll \frac{N_0^{3/4}}{|\sqrt[4]{x_{l_1}} - \sqrt[4]{x_{l_2}}|} + \left(\frac{|\sqrt[4]{x_{l_1}} - \sqrt[4]{x_{l_2}}|}{N_0^{3/4}} \right)^{1/11} N_0^{9/11}$$

$$\begin{aligned} &\ll \frac{(N_0 T)^{3/4}}{|x_{l_1} - x_{l_2}|} + \left(\frac{|x_{l_1} - x_{l_2}|}{(N_0 T)^{3/4}} \right)^{1/11} N_0^{9/11} \\ &\ll \frac{(N_0 T)^{3/4}}{|x_{l_1} - x_{l_2}|} + T^{-3/44} T_0^{1/11} N_0^{3/4}. \end{aligned}$$

把上述估计代入 (3.4) 式, 并注意到 $\{x_l\}$ 是 V -佳位组以及 $N_0 \ll T^{1+4\varepsilon} V^{-2}$, 得到

$$\begin{aligned} M_0 V^2 &\ll \mathcal{L}^{3+\varepsilon} T^{1/4} N_0^{1/4} + \mathcal{L}^{3+\varepsilon} T^{1/4} N_0^{-3/4} \\ &\quad \times \max_{l_1 \leq M_0} \sum_{\substack{l_2 \leq M_0, \\ l_2 \neq l_1}} \left(\frac{(N_0 T)^{3/4}}{|x_{l_1} - x_{l_2}|} + T^{-3/44} T_0^{1/11} N_0^{3/4} \right) \\ &\ll \mathcal{L}^{3+\varepsilon} T^{1/4} N_0^{1/4} + \mathcal{L}^{4+\varepsilon} T V^{-1} + \mathcal{L}^{3+\varepsilon} M_0 T^{2/11} T_0^{1/11} \\ &\ll \mathcal{L}^{4+\varepsilon} T V^{-1} + \mathcal{L}^{3+\varepsilon} M_0 T^{2/11} T_0^{1/11}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

取 $T_0 = V^{22} T^{-2} \mathcal{L}^{-34}$, 易验证若 $V \gg T^{2/21} \mathcal{L}^{34/21}$, 则有 $T_0 \gg V$. 对此 T_0 有

$$M_0 \ll \mathcal{L}^{4+\varepsilon} T V^{-3}.$$

现将区间 $[T, 2T]$ 分成 $O(1 + T/T_0)$ 长度不超过 T_0 的若干子区间. 在每一个这样的子区间中, x_l 的数目是 $O(\mathcal{L}^{4+\varepsilon} T V^{-3})$, 所以有

$$M \ll \mathcal{L}^{4+\varepsilon} T V^{-3} \left(1 + \frac{T}{T_0} \right) \ll \mathcal{L}^5 T V^{-3} + \mathcal{L}^{39} T^4 V^{-25}. \quad (3.6)$$

定理证毕.

3.2 定理 1 的证明

现在证明定理 1. 当 $A = 0$ 时, 结论显然. 当 $0 < A < 2$ 时, 由 (1.6) 式和 Hölder 不等式可得. 以后总假设 $A > 2$. 由二分法只需证明

$$\int_T^{2T} |\Delta_1(x; \varphi)|^A dx \ll \begin{cases} T^{1+9A/8} \log^{39} T, & \text{若 } 2 < A \leq \frac{16}{3}, \\ T^{(3+6A)/5} \log^5 T, & \text{若 } A > \frac{16}{3}. \end{cases} \quad (3.7)$$

设 $x^\varepsilon \ll y \leq x/2$, 由 $D_\rho(x; \varphi)$ 的定义得

$$\Delta_1(x; \varphi) = \sum_{n \leq x} (x - n) c_n - \frac{\pi^2 \kappa R_0}{12} x^2 - Z(0)x.$$

由此及估计 $\sum_{x < n \leq x+y} c_n \ll y$ (见文献 [5]) 可得

$$\begin{aligned} |\Delta_1(x+y; \varphi) - \Delta_1(x; \varphi)| &\ll \left| \sum_{n \leq x+y} (x+y-n) c_n - \sum_{n \leq x} (x-n) c_n \right| + |(x+y)^2 - x^2| + y \\ &\ll y \left| \sum_{n \leq x} c_n \right| + \left| \sum_{x < n \leq x+y} (x+y-n) c_n \right| + yx \ll yx. \end{aligned}$$

由上式知存在绝对正常数 $c_0 > 0$, 使得估计式

$$|\Delta_1(x+y; \varphi) - \Delta_1(x; \varphi)| \leq c_0 xy$$

成立, 从而若 $|\Delta_1(x; \varphi)| \geq 2c_0 xy$, 则

$$|\Delta_1(x+y; \varphi)| \geq |\Delta_1(x; \varphi)| - |\Delta_1(x+y; \varphi) - \Delta_1(x; \varphi)| \geq c_0 xy. \quad (3.8)$$

由 (3.8) 式并类似于文献 [7] 中 (13.70) 式有

$$\int_T^{2T} |\Delta_1(x; \varphi)|^A dx \ll T^{(8+9A)/8} + \sum_V V \sum_{r \leq N_V} |\Delta_1(x_r; \varphi)|^A, \quad (3.9)$$

这里 $T^{1/8} \leq V = 2^m \leq T^{1/5}$, $VT < |\Delta_1(x_r; \varphi)| \leq 2VT$ ($r = 1, \dots, N_V$) 以及 $|x_r - x_s| \geq V$ ($r \neq s \leq N_V$).

设 $2 < A < 24$, 由定理 4 得

$$\begin{aligned} V \sum_{r \leq N_V} |\Delta_1(x_r; \varphi)|^A &\ll T^A N_V V^{A+1} \\ &\ll \mathcal{L}^5 T^{1+A} V^{A-2} + \mathcal{L}^{39} T^{4+A} V^{A-24} \\ &\ll T^{1+A+1/5(A-2)} \mathcal{L}^5 + T^{1+9A/8} \mathcal{L}^{39}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

若 $A > 24$, 再次由定理 4 可得

$$\begin{aligned} V \sum_{r \leq N_V} |\Delta_1(x_r; \varphi)|^A &\ll T^A N_V V^{A+1} \\ &\ll \mathcal{L}^5 T^{1+A} V^{A-2} + \mathcal{L}^{39} T^{4+A} V^{A-24} \\ &\ll T^{1+A+1/5(A-2)} \mathcal{L}^5 + T^{(6A-4)/5} \mathcal{L}^{39} \\ &\ll T^{(6A+3)/5} \mathcal{L}^5. \end{aligned} \quad (3.11)$$

从 (3.8)–(3.11) 式可容易地得到 (3.7) 式. 定理证毕.

4 定理 2 和 3 的证明

设 $T \geq 10$ 为一实数. 由二分法只需计算积分 $\int_T^{2T} \Delta_1^k(x) dx$. 设 y 为一参量, 满足 $T^\varepsilon < y \leq T^{1/3}$. 对任意 $T \leq x \leq 2T$, 定义

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1(x, y) := (2\pi)^{-2} x^{9/8} \sum_{n \leq y} \frac{c_n}{n^{7/8}} \cos \left(8\pi \sqrt[4]{xn} - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2(x, y) := \Delta_1(x; \varphi) - \mathcal{R}_1.$$

我们将证明 $\mathcal{R}_2$ 的高次积分均值很小, 所以积分 $\int_T^{2T} \Delta_1^k(x; \varphi) dx$ 的主要部分是 $\int_T^{2T} \mathcal{R}_1^k dx$, 而后者是容易计算的.

4.1 $\int_T^{2T} \mathcal{R}_1^k dx$ 的计算

为简单, 令 $\mathbb{I} = \{0, 1\}$,

$$\mathbb{N}^k = \{\mathbf{n} : \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k), n_j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq k\}.$$

对每个 $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_{k-1}) \in \mathbb{I}^{k-1}$, 令 $|\mathbf{i}| = i_1 + \dots + i_{k-1}$. 由初等公式

$$\cos a_1 \cdots \cos a_k = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}^{k-1}} \cos(a_1 + (-1)^{i_1} a_2 + (-1)^{i_2} a_3 + \cdots + (-1)^{i_{k-1}} a_k),$$

有

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^k &= (2\pi)^{-2k} x^{9k/8} \sum_{n_1 \leq y} \cdots \sum_{n_k \leq y} \frac{c_{n_1} \cdots c_{n_k}}{(n_1 \cdots n_k)^{7/8}} \prod_{j=1}^k \cos \left(8\pi \sqrt[4]{n_j x} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{x^{9k/8}}{(2\pi)^{2k} 2^{k-1}} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}^{k-1}} \sum_{n_1 \leq y} \cdots \sum_{n_k \leq y} \frac{c_{n_1} \cdots c_{n_k}}{(n_1 \cdots n_k)^{7/8}} \cos \left(8\pi \sqrt[4]{x} \alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i}) - \frac{\pi}{4} \beta(\mathbf{i}) \right), \end{aligned}$$

这里

$$\alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i}) := \sqrt[4]{n_1} + (-1)^{i_1} \sqrt[4]{n_2} + (-1)^{i_2} \sqrt[4]{n_3} + \cdots + (-1)^{i_{k-1}} \sqrt[4]{n_k},$$

$$\beta(\mathbf{i}) := 1 + (-1)^{i_1} + (-1)^{i_2} + \cdots + (-1)^{i_{k-1}}.$$

于是可以写

$$\mathcal{R}_1^k = \frac{1}{(2\pi)^{2k} 2^{k-1}} (S_1(x) + S_2(x)), \quad (4.1)$$

这里

$$S_1(x) := x^{9k/8} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}^{k-1}} \cos\left(-\frac{\pi\beta(\mathbf{i})}{4}\right) \sum_{\substack{n_j \leq y, 1 \leq j \leq k \\ \alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i})=0}} \frac{c_{n_1} \cdots c_{n_k}}{(n_1 \cdots n_k)^{7/8}},$$

$$S_2(x) := x^{9k/8} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}^{k-1}} \sum_{\substack{n_j \leq y, 1 \leq j \leq k \\ \alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i}) \neq 0}} \frac{c_{n_1} \cdots c_{n_k}}{(n_1 \cdots n_k)^{7/8}} \cos\left(8\pi\alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i}) \sqrt[4]{x} - \frac{\pi\beta(\mathbf{i})}{4}\right).$$

首先考虑 $S_1(x)$ 的贡献. 我们有

$$\int_T^{2T} S_1(x) dx = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}^{k-1}} \cos\left(-\frac{\pi\beta(\mathbf{i})}{4}\right) \sum_{\substack{n_j \leq y, 1 \leq j \leq k \\ \alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i})=0}} \frac{c_{n_1} \cdots c_{n_k}}{(n_1 \cdots n_k)^{7/8}} \int_T^{2T} x^{9k/8} dx. \quad (4.2)$$

易见若 $\alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i}) = 0$, 则 $1 \leq |\mathbf{i}| \leq k-1$. 令 $l = |\mathbf{i}|$, 则有

$$\sum_{\substack{n_j \leq y, 1 \leq j \leq k \\ \alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i})=0}} \frac{c_{n_1} \cdots c_{n_k}}{(n_1 \cdots n_k)^{7/8}} = s_{k;l}(c; y),$$

这里 $s_{k;l}(f; y)$ 已在引理 2.4 中定义. 由引理 2.4 得到

$$\int_T^{2T} S_1(x) dx = B_k^*(c) \int_T^{2T} x^{9k/8} dx + O(T^{1+9k/8+\varepsilon} y^{-3/4}), \quad (4.3)$$

这里

$$B_k^*(c) := \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}^{k-1}} \cos\left(-\frac{\pi\beta(\mathbf{i})}{4}\right) \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k \\ \alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i})=0}} \frac{c_{n_1} \cdots c_{n_k}}{(n_1 \cdots n_k)^{7/8}}.$$

对任意 $\mathbf{i} \in \mathbb{I}^{k-1} \setminus \mathbf{0}$, 令

$$S(c; \mathbf{i}) := \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k \\ \alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i})=0}} \frac{c_{n_1} \cdots c_{n_k}}{(n_1 \cdots n_k)^{7/8}}.$$

易见若 $|\mathbf{i}| = |\mathbf{i}'|$ 或者 $|\mathbf{i}| + |\mathbf{i}'| = k$, 则

$$S(c; \mathbf{i}) = S(c; \mathbf{i}') = s_{k;|\mathbf{i}|}(c).$$

由 $(-1)^j = 1 - 2j$ ($j = 0, 1$) 可得 $\beta(\mathbf{i}) = k - 2|\mathbf{i}|$. 所以

$$\begin{aligned} B_k^*(c) &= \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{|\mathbf{i}|=l} \cos\left(-\frac{\pi\beta(\mathbf{i})}{4}\right) S(c; \mathbf{i}) \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} s_{k;l}(c) \cos \frac{\pi(k-2l)}{4} \sum_{|\mathbf{i}|=l} 1 \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k-1}{l} s_{k;l}(c) \cos \frac{\pi(k-2l)}{4} = B_k(c). \end{aligned} \quad (4.4)$$

现考虑 $S_2(x)$ 的贡献. 由一阶导数判定法及引理 2.3 可得

$$\begin{aligned} \int_T^{2T} S_2(x) dx &\ll T^{3/4+9k/8} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}^{k-1}} \sum_{\substack{n_j \leq y, 1 \leq j \leq k \\ \alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i}) \neq 0}} \frac{c_{n_1} \cdots c_{n_k}}{(n_1 \cdots n_k)^{7/8} |\alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i})|} \\ &\ll T^{3/4+9k/8} y^{4^{k-2}-1/4} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}^{k-1}} \sum_{\substack{n_j \leq y, 1 \leq j \leq k \\ \alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i}) \neq 0}} \frac{c_{n_1} \cdots c_{n_k}}{(n_1 \cdots n_k)^{7/8}} \\ &\ll T^{3/4+9k/8} y^{4^{k-2}-1/4+k/8} \ll T^{3/4+9k/8} y^{b(k)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

从 (4.1)–(4.5) 式得到

引理 4.1 对固定的整数 $k \geq 3$ 有

$$\int_T^{2T} \mathcal{R}_1^k dx = \frac{B_k(c)}{(2\pi)^{2k} 2^{k-1}} \int_T^{2T} x^{9k/8} dx + O(T^{1+9k/8+\varepsilon} y^{-3/4} + T^{3/4+9k/8+\varepsilon} y^{b(k)}). \quad (4.6)$$

4.2 $\mathcal{R}_2$ 的高次均值

在引理 2.1 的公式 (2.2) 中取 $N = T$ 有

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 &= (2\pi)^{-2} x^{9/8} \sum_{y < n \leq T} \frac{c_n}{n^{7/8}} \cos(8\pi \sqrt[4]{nx} - \pi/4) + O(T^{1+\varepsilon}) \\ &\ll \left| x^{9/8} \sum_{y < n \leq T} \frac{c_n}{n^{7/8}} e(4\sqrt[4]{nx}) \right| + T^{1+\varepsilon}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

由此有

$$\begin{aligned} \int_T^{2T} \mathcal{R}_2^2 dx &\ll T^{3+\varepsilon} + \int_T^{2T} \left| x^{\frac{9}{8}} \sum_{y < n \leq T} \frac{c_n}{n^{7/8}} e(4\sqrt[4]{nx}) \right|^2 dx \\ &\ll T^{3+\varepsilon} + T^{13/4} \sum_{y < n \leq T} \frac{c_n^2}{n^{7/4}} + T^3 \sum_{y < m < n \leq T} \frac{c_n c_m}{(mn)^{7/8} (\sqrt[4]{n} - \sqrt[4]{m})} \\ &\ll T^{3+\varepsilon} + \frac{T^{13/4+\varepsilon}}{y^{3/4}} \ll \frac{T^{13/4+\varepsilon}}{y^{3/4}}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

这里用到了估计式 (3.3) 以及可用常规方法易证的估计

$$\sum_{y < m < n \leq T} \frac{c_n c_m}{(mn)^{7/8} (\sqrt[4]{n} - \sqrt[4]{m})} \ll T^\varepsilon.$$

现设 y 满足 $y^{4b(K_0)} \leq T$. 由引理 4.1 得

$$\int_T^{2T} |\mathcal{R}_1|^{K_0} dx \ll T^{1+9K_0/8+\varepsilon},$$

从而 (因为 $A_0 \leq K_0$)

$$\int_T^{2T} |\mathcal{R}_1|^{A_0} dx \ll T^{1+9A_0/8+\varepsilon}. \quad (4.9)$$

由 (1.10) 和 (4.9) 式得到

$$\int_T^{2T} |\mathcal{R}_2|^{A_0} dx \ll \int_T^{2T} (|\Delta_1(x; \varphi)|^{A_0} + |\mathcal{R}_1|^{A_0}) dx \ll T^{1+9A_0/8+\varepsilon}. \quad (4.10)$$

对任意 $2 < A < A_0$, 由 (4.8) 和 (4.10) 式以及 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned} \int_T^{2T} |\mathcal{R}_2|^A dx &= \int_T^{2T} |\mathcal{R}_2|^{2(A_0-A)/(A_0-2)+A_0(A-2)/(A_0-2)} dx \\ &\ll \left(\int_T^{2T} \mathcal{R}_2^2 dx \right)^{(A_0-A)/(A_0-2)} \left(\int_T^{2T} |\mathcal{R}_2|^{A_0} dx \right)^{(A-2)/(A_0-2)} \\ &\ll T^{1+9A/8+\varepsilon} y^{-3(A_0-A)/4(A_0-2)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

所以有

引理 4.2 设 $T^\varepsilon \leq y \leq T^{1/4b(K_0)}$, $2 < A < A_0$, 则

$$\int_T^{2T} |\mathcal{R}_2|^A dx \ll T^{1+9A/8+\varepsilon} y^{-3(A_0-A)/4(A_0-2)}. \quad (4.12)$$

4.3 积分 $\int_T^{2T} \mathcal{R}_1^{k-1} \mathcal{R}_2 dx$ 的上界估计

在这一小节中估计积分 $\int_T^{2T} \mathcal{R}_1^{k-1} \mathcal{R}_2 dx$. 设 $T^\varepsilon \leq y \leq T^{1/4b(K_0)}$. 由引理 4.1 得

$$\int_T^{2T} |\mathcal{R}_1|^{k-1} dx \ll T^{1+9(k-1)/8}.$$

所以由 (4.7) 式得到

$$\int_T^{2T} \mathcal{R}_1^{k-1} \mathcal{R}_2 dx = \int_T^{2T} \mathcal{R}_1^{k-1} \mathcal{R}_2^* dx + O(T^{1+9k/8-1/8+\varepsilon}), \quad (4.13)$$

其中

$$\mathcal{R}_2^* = (2\pi)^{-2} x^{\frac{9}{8}} \sum_{y < n \leq T} \frac{c_n}{n^{7/8}} \cos \left(8\pi \sqrt[4]{nx} - \frac{\pi}{4} \right).$$

类似于 (4.1) 式可以写

$$\mathcal{R}_1^{k-1} \mathcal{R}_2^* = \frac{1}{(2\pi)^{2k} 2^{k-1}} (S_3(x) + S_4(x)),$$

这里

$$\begin{aligned} S_3(x) &= x^{9k/8} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}^{k-1}} \sum_{y < n_1 \leq T} \sum_{\substack{n_j \leq y, 2 \leq j \leq k \\ \alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i})=0}} \frac{c_{n_1} c_{n_2} \cdots c_{n_k}}{(n_1 \cdots n_k)^{7/8}} \cos \left(-\frac{\pi}{4} \beta(\mathbf{i}) \right), \\ S_4(x) &= x^{9k/8} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}^{k-1}} \sum_{y < n_1 \leq T} \sum_{\substack{n_j \leq y, 2 \leq j \leq k \\ \alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i}) \neq 0}} \frac{c_{n_1} c_{n_2} \cdots c_{n_k}}{(n_1 \cdots n_k)^{7/8}} \cos \left(8\pi \sqrt[4]{x} \alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i}) - \frac{\pi}{4} \beta(\mathbf{i}) \right). \end{aligned}$$

由引理 2.4 知 $S_3(x)$ 的贡献是

$$\begin{aligned} \int_T^{2T} S_3(x) dx &\ll \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}^{k-1}} \sum_{y < n_1 \leq T} \sum_{\substack{n_j \leq y, 2 \leq j \leq k \\ \alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i})=0}} \frac{c_{n_1} c_{n_2} \cdots c_{n_k}}{(n_1 \cdots n_k)^{7/8}} \int_T^{2T} x^{9k/8} dx \\ &\ll \sum_{l=1}^{k-1} |s_{k;l}(c; y) - s_{k;l}(c)| \int_T^{2T} x^{9k/8} dx \\ &\ll T^{1+9k/8+\varepsilon} y^{-3/4}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

由一阶导数判定法及引理 2.3 得到

$$\begin{aligned}
 \int_T^{2T} S_4(x) dx &\ll T^{3/4+9k/8} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}^{k-1}} \sum_{y < n_1 \leq T} \sum_{\substack{n_j \leq y, 2 \leq j \leq k \\ \alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i}) \neq 0}} \frac{c_{n_1} c_{n_2} \cdots c_{n_k}}{(n_1 \cdots n_k)^{7/8} |\alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i})|} \\
 &\ll T^{3/4+9k/8} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}^{k-1}} \sum_{y < n_1 \leq k^4 y} \sum_{\substack{n_j \leq y, 2 \leq j \leq k \\ \alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i}) \neq 0}} \frac{c_{n_1} c_{n_2} \cdots c_{n_k}}{(n_1 \cdots n_k)^{7/8} |\alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i})|} \\
 &\quad + T^{3/4+9k/8} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}^{k-1}} \sum_{n_1 > k^4 y} \sum_{\substack{n_j \leq y, 2 \leq j \leq k \\ \alpha(\mathbf{n}; \mathbf{i}) \neq 0}} \frac{c_{n_1} c_{n_2} \cdots c_{n_k}}{(n_1 \cdots n_k)^{7/8} n_1^{1/4}} \\
 &\ll T^{3/4+9k/8} y^{b(k)}. \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

由 (4.13)–(4.15) 式有

$$\int_T^{2T} \mathcal{R}_1^{k-1} \mathcal{R}_2 dx \ll T^{1+9k/8+\varepsilon} y^{-3/4} + T^{3/4+9k/8} y^{b(k)} + T^{1+9k/8-1/8+\varepsilon}. \tag{4.16}$$

4.4 定理 2 的证明

设 $3 \leq k < A_0$, $T^\varepsilon \leq y \leq T^{1/4b(K_0)}$. 由初等公式 $(a+b)^k = a^k + ka^{k-1}b + O(|a^{k-2}b^2| + |b|^k)$, 得到

$$\begin{aligned}
 \int_T^{2T} \Delta_1^k(x; \varphi) dx &= \int_T^{2T} \mathcal{R}_1^k dx + k \int_T^{2T} \mathcal{R}_1^{k-1} \mathcal{R}_2 dx \\
 &\quad + O\left(\int_T^{2T} |\mathcal{R}_1^{k-2} \mathcal{R}_2^2| dx\right) + O\left(\int_T^{2T} |\mathcal{R}_2|^k dx\right). \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

由 (4.9) 式和引理 4.2 及 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}
 \int_T^{2T} |\mathcal{R}_1^{k-2} \mathcal{R}_2^2| dx &\ll \left(\int_T^{2T} |\mathcal{R}_1|^{A_0} dx\right)^{(k-2)/A_0} \left(\int_T^{2T} |\mathcal{R}_2|^{2A_0/(A_0-k+2)} dx\right)^{(A_0-k+2)/A_0} \\
 &\ll T^{1+9k/8+\varepsilon} y^{-3(A_0-k)/4(A_0-2)}. \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

现取 $y = T^{1/4b(K_0)}$. 由 (4.16)–(4.18) 式, 引理 4.1 和 4.2 (取 $A = k$) 得到

$$\begin{aligned}
 \int_T^{2T} \Delta_1^k(x; \varphi) dx &= \frac{B_k(c)}{(\sqrt{2}\pi)^k 2^{k-1}} \int_T^{2T} x^{9k/8} dx + O(T^{1+9k/8-\sigma(k, A_0)/4b(K_0)+\varepsilon}) \\
 &= \frac{B_k(c)}{(\sqrt{2}\pi)^k 2^{k-1}} \int_T^{2T} x^{9k/8} dx + O(T^{1+9k/8-\delta_1(k, A_0)+\varepsilon}). \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

从 (4.19) 式知定理 2 成立.

4.5 定理 3 的证明

设 $T^\varepsilon \leq y \leq T^{1/3}$, 把定理 1 与 4 的证明直接用于 $\mathcal{R}_1$, 得到估计式

$$\int_T^{2T} |\mathcal{R}_1|^{A_0} dx \ll T^{1+9A_0/8+\varepsilon} \tag{4.20}$$

对 $A_0 = 16/3$ 成立. 所以有

$$\int_T^{2T} |\mathcal{R}_2|^{A_0} dx \ll T^{1+9A_0/8+\varepsilon}, \quad A_0 = 16/3. \tag{4.21}$$

和上一节的证明相同, 对 $T^\varepsilon \leq y \leq T^{1/3}$ 得到

$$\int_T^{2T} \Delta_1^k(x; \varphi) dx = \int_T^{2T} \mathcal{R}_1^k dx + O(T^{1+9k/8+\varepsilon} y^{-\sigma(k, 16/3)} + T^{3/4+9k/8} y^{b(k)}). \tag{4.22}$$

取 $y = T^{1/(4b(k)+4\sigma(k,16/3))}$, 由上式及引理 4.1 得

$$\begin{aligned} \int_T^{2T} \Delta_1^k(x; \varphi) dx &= \frac{B_k(c)}{(2\pi)^k 2^{k-1}} \int_T^{2T} x^{9k/8} dx + O(T^{1+9k/8-\sigma(k,16/3)/(4b(k)+4\sigma(k,16/3))+\varepsilon}) \\ &= \frac{B_k(c)}{(2\pi)^k 2^{k-1}} \int_T^{2T} x^{9k/8} dx + O(T^{1+9k/8-\delta_2(k,16/3)+\varepsilon}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

从 (4.23) 式知定理 3 成立.

致谢 感谢审稿人对本文的宝贵评论.

参 考 文 献

- 1 Deligne P. La conjecture de Weil I. *Inst Hautes Etudes Sci Publ Math*, **43**: 273–307 (1974)
- 2 Rankin R A. Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms. *Proc Cambridge Phil Soc*, **35**: 357–372 (1939)
- 3 Selberg A. Bemerkungen über eine Dirichletsche Reihe, die mit der Theorie der Modulformen nahe verbunden ist. *Arch Math Naturvid*, **43**: 47–50 (1940)
- 4 Ivić A. Large values of certain number-theoretic error terms. *Acta Arith*, **56**: 135–159 (1990)
- 5 Ivić A. Matsumoto K, Tanigawa Y. On Riesz means of the coefficients of the Rankin-Selberg series. *Math Proc Camb Phil Soc*, **127**: 117–131 (1999)
- 6 Ivić A. On the fourth moment in the Rankin-Selberg problem. arXiv:math/0701912
- 7 Ivić A. The Riemann zeta-function. 2nd ed. New York: Dover, 2003
- 8 Tsang K M. Higher-power moments of $\Delta(x)$, $E(t)$ and $P(x)$. *Proc London Math Soc*, **65**(3): 65–84 (1992)
- 9 Zhai W G. On higher-power moments of $\Delta(x)$ (II). *Acta Arith*, **114**: 35–54 (2004)
- 10 Matsumoto K. The mean values and the universality of Rankin-Selberg L-functions. In: Jutila M, et al, eds. Number theory, Proceeding of Turku Symposium on Number Theory in Memory of K Inkeri. Berlin: de Gruyter, 2001, 201–221