一维黏性系数依赖于密度的非等熵 Navier-Stokes 方程的自由边值问题

郭真华¹, 王晓瑾¹, 王梅^{2*}

1. 西北大学数学学院, 西安 710127;

2. 西安理工大学理学院, 西安 710054

E-mail: zhguo@nwu.edu.cn, 1055400790@qq.com, wangmei0439@163.com

收稿日期: 2016-01-27; 接受日期: 2016-07-13; 网络出版日期: 2016-10-31; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11331005) 和教育部博士点基金 (批准号: 20136101110015) 资助项目

摘要 本文得到了一维黏性系数依赖于密度的非等熵 Navier-Stokes 方程自由边值问题的全局经典解的存在性, 其中黏性系数依赖于密度 $\mu(\rho) = \rho^\alpha + 1$, 这里 ρ 表示流体的密度, $\alpha \in (0, +\infty)$ 为常数. 与其他文献不同之处在于, 本文先通过选取适当的能量泛函获得密度函数的上下界估计, 从而大大降低了对常数 α 的限制, 随后通过一系列先验估计, 得到解的正则性, 并且获得经典解的存在性证明.

关键词 非等熵 Navier-Stokes 方程 黏性系数依赖于密度 自由边值问题

MSC (2010) 主题分类 35Q30, 35A09, 35A23, 35A01, 35B45

1 引言

考虑一维黏性系数依赖于密度的非等熵 Navier-Stokes 方程的自由边值问题:

$$\begin{cases} \rho_\tau + (\rho v)_\xi = 0, \\ (\rho v)_\tau + (\rho v^2 + P)_\xi = (\mu(\rho)v_\xi)_\xi, \\ (\rho E)_\tau + (\rho v E + v P)_\xi = (\mu(\rho)v v_\xi + \kappa \theta_\xi)_\xi, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 ρ 、 v 和 θ 分别表示流体的密度、速度和温度, $P = P(\rho, \theta)$ 为压强. 本文考虑理想流体情形, 即 $P = R\rho\theta$. 另外, $\kappa = \kappa(\rho, \theta)$ 为热传导系数, $\mu(\rho) = \rho^\alpha + 1$ ($\alpha > 0$) 为黏性系数, $E = e + \frac{v^2}{2}$ 为流体的总能量, 其中 $e = e(\rho, \theta) = C\theta$ 为流体的内能. 上述物理量满足热力学第二定律

$$P = \rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho} + \theta \frac{\partial P}{\partial \theta}.$$

定义区域

$$\Omega = \{(\xi, \tau) \mid a(\tau) \leq \xi \leq b(\tau), \tau > 0\}.$$

英文引用格式: Guo Z H, Wang X J, Wang M. The problem of free boundary for non-isentropic Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity in one-dimension (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 575–590, doi: 10.1360/N012016-00024

假设系统 (1.1) 满足如下初边值条件:

$$(\rho, v, \theta) |_{\tau=0} = (\rho_0, v_0, \theta_0)(\xi), \quad a \leq \xi \leq b \quad (1.2)$$

和

$$\begin{aligned} \theta_\xi(\xi, \tau) &= 0, \quad \xi = a(\tau), b(\tau), \\ (\mu(\rho)v_\xi - P)(\xi, \tau) &= 0, \quad \xi = a(\tau), b(\tau), \end{aligned} \quad (1.3)$$

其中 $a(\tau)$ 和 $b(\tau)$ 为自由边界, 定义如下:

$$\begin{aligned} a'(\tau) &= v(a(\tau), \tau), \quad a(0) = a, \\ b'(\tau) &= v(b(\tau), \tau), \quad b(0) = b, \end{aligned}$$

且 $a < b$.

对于黏性依赖于密度的一维等熵可压缩的 Navier-Stokes 方程, 目前已经获得一系列较完善的结果, 参见文献 [1-8] 以及相关文献. 对于一维非等熵情形, 当黏性系数仅仅是密度的函数时, 目前的相关研究较少. 针对理想气体, 早期的学者们专注于讨论黏性系数由一个正常数下界控制的情形, 即 $\mu(\rho) \geq \mu_0 > 0$, 参见文献 [9-11]. 对于更一般的气体且 $\mu(\rho) = \rho^\alpha$ ($\alpha > 0$) 的情形, 首先, Jiang^[12] 研究了 $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ 时光滑解的全局存在性. 随后, Qin 和 Yao^[13] 将 α 的范围扩大到 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. 文献 [14] 进一步完善了文献 [13] 中的遗留问题. 最近, Tan 等^[15] 研究了一维 Navier-Stokes-Poisson 方程的全局光滑解且要求 $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$. 值得一提的是, 对于高维情形, Bresch 和 Desjardins^[16] 研究了黏性系数依赖于密度的热传导模型的 Dirichlet 边界问题, 此时, 剪切黏性 $\mu(\rho)$ 和体积黏性 $\lambda(\rho)$ 满足条件

$$\lambda(\rho) = 2(\rho\mu'(\rho) - \mu(\rho)).$$

显然, 由于一维情形时两个黏性系数相等, 因此, 我们不需要考虑此种限制条件.

本文推广了文献 [17] 关于密度函数一致界估计的势函数法, 然而不同于该文献之处在于, 由于我们的黏性系数是依赖于密度函数 ρ 的, 因此, 我们引入的泛函 $F(\Phi, \rho)$ 和 $F_1(\Phi, \rho)$ 是关于 Φ 和 ρ 的函数, 而文献 [17] 中仅仅是关于 Φ 的函数. 此种方法优于文献 [13] 的地方在于降低了对黏性系数的指数 α 取值范围的限制. 接下来, 我们类似于文献 [18], 依次得到解的先验估计和高阶估计. 从而可以由标准的 Banach 定理和压缩映射原理得到解的局部存在性. 接着由先验估计可将局部解延拓到全局.

本文的结构如下: 第 2 节将阐述本文的主要结果; 第 3 节通过构造适当的能量泛函的方法, 证明密度函数的上、下界进而得到各阶导数的先验估计; 第 4 节给出解的存在性的简略证明.

注 1.1 文中定义的 c 和 C 均表示与 δ 和 t 无关的正常数, $C(\cdot)$ 代表仅与括号内变量相关的正常数.

2 主要结论

引入 Lagrange 坐标变换

$$x = \int_{a(\tau)}^{\xi} \rho(y, \tau) dy, \quad t = \tau,$$

这时, 可将自由边界 $\xi = a(\tau)$ 和 $\xi = b(\tau)$ 转化为 $x = 0$ 和 $x = \int_{a(0)}^{b(\tau)} \rho(y, \tau) dy = \int_{a(0)}^{b(0)} \rho_0(y) dy$, 其中 $\int_0^{a(0)} \rho_0(y) dy$ 是气体总质量, 不妨假设 $\int_0^{a(0)} \rho_0(y) dy = 1$. 因此, 区域 Ω 变成 $[0, 1] \times [0, t]$, 方程组 (1.1)

经过 Lagrange 坐标变换变成

$$\begin{cases} u_t - v_x = 0, \\ v_t + P_x(u, \theta) = \left(\frac{\mu(u)v_x}{u} \right)_x, \\ \left(e + \frac{v^2}{2} \right)_t + (vP(u, \theta))_x = \left(\frac{\mu(u)vv_x}{u} + \frac{\kappa\theta_x}{u} \right)_x, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $u = \frac{1}{\rho}$; $\mu(u) = u^{-\alpha} + 1$ ($\alpha > 0$); $P = R\rho\theta$; $e = e(u, \theta) = \theta$; $\kappa = \kappa(u, \theta)$, 满足 $k_0 \leq \kappa \leq k_1$, 这里 k_0 和 k_1 是正常数. 从而, P 和 e 的关系化为

$$e_u(u, \theta) + P(u, \theta) = \theta P_\theta(u, \theta). \quad (2.2)$$

相应的初值条件为

$$(u, v, \theta)(x, 0) = (u_0(x), v_0(x), \theta_0(x)), \quad x \in [0, 1]. \quad (2.3)$$

边界条件为

$$\theta_x(d, t) = 0, \quad (2.4)$$

$$(\mu(u)u^{-1}v_x - P)(d, t) = 0, \quad d = 0, 1, \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

本文假定 $P \geq 0$, $e \geq 0$ 是连续可微的, $\kappa \geq 0$ 是二次可微的.

定理 2.1 令 $u_0(x), u_{0x}(x), v_0(x), v_{0x}(x), v_{0xx}(x), \theta_0(x), \theta_{0x}(x), \theta_{0xx}(x) \in C^k[0, 1]$, 其中 $k \in (0, 1)$; 初边值条件满足假设 (2.3)–(2.5), 并且存在正常数 c_0 和 c_1 使得

$$c_0 \leq u_0(x) \leq c_1, \quad c_0 \leq \theta_0(x) \leq c_1, \quad x \in [0, 1],$$

则系统 (2.1) 在初边值条件 (2.3)–(2.5) 下存在唯一解 (u, v, θ) , 使得

$$u(x, t) > 0, \quad \theta(x, t) > 0, \quad \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty),$$

且 $\forall T > 0$,

$$(u, u_x, u_t, u_{xt}, v, v_x, v_t, v_{xx}, \theta, \theta_x, \theta_t, \theta_{xx}) \in (C^{k, \frac{k}{2}}(Q_T))^{12}, \quad (u_{tt}, v_{xt}, \theta_{xt}) \in (L_2(Q_T))^3,$$

其中 $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$.

3 基本能量估计和密度估计

由能量方程 (2.1)₃ 可知,

$$e_\theta(u, \theta)\theta_t + \theta p_\theta(u, \theta)v_x - \frac{\mu(u)}{u}v_x^2 = \left(\frac{k(u, \theta)}{u}\theta_x \right)_x. \quad (3.1)$$

对方程 (3.1) 应用最大值定理, 类似于文献 [13] 可知, 在区域 Q_t 上, 温度 θ 满足

$$\theta(x, t) > 0.$$

引理 3.1 在定理 2.1 的假设下, 成立

$$\int_0^1 v(x, t) dx = \int_0^1 v(x, 0) dx = \int_0^1 v_0 dx = C. \quad (3.2)$$

证明 对方程 (2.1)₂ 关于 (x, t) 在 $[0, 1] \times [0, t]$ 上积分可得引理成立. $\square$

引理 3.2 在定理 2.1 的假设下, 存在两个正常数 C_1 和 C_2 依赖于 T , 使得方程 (2.1) 的解满足

$$0 < C_1 \leq \rho(x, t) \leq C_2, \quad \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, T]. \quad (3.3)$$

证明 给定

$$\Sigma(x, t) = P - \frac{\mu(u)v_x}{u},$$

则动量方程 (2.1)₂ 可以改写为

$$v_t + \Sigma_x = 0. \quad (3.4)$$

定义势函数

$$\Phi(x, t) = \int_0^x v_0(y) dy - \int_0^t \Sigma(x, \tau) d\tau,$$

则有 $\Phi_x = v(x, t)$, $\Phi_t = -\Sigma(x, t)$. 首先证明

$$\Phi \in L^\infty(\Omega).$$

将等式 (3.4) 关于 x 和 t 在 Q_T 上积分, 可得

$$\begin{aligned} \int_0^t \Sigma(x, s) ds &= \int_0^t \Sigma(0, s) ds + \int_0^x [v(y, 0) - v(y, t)] dy \\ &= \int_0^t \left(P - \frac{\mu(u)v_x}{u} \right) (0, s) ds + \int_0^x [v_0 - v(y, t)] dy \\ &= \int_0^x [v_0 - v(y, t)] dy \leq \int_0^x |v_0| + |v(y, t)| dy \\ &\leq C. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} |\Phi| &= \left| \int_0^x v_0(y) dy - \int_0^t \Sigma(x, \tau) d\tau \right| = \left| \int_0^x v_0(y) dy \right| + \left| \int_0^t \Sigma(x, \tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^1 |v_0(y)| dy + \left| \int_0^t \Sigma(x, \tau) d\tau \right| \\ &\leq C. \end{aligned}$$

接下来证明密度函数的上下界. 首先证明其上界. 令 $F(\Phi, \rho)$ 为关于 Φ 和 ρ 的待定函数, 则

$$\begin{aligned} (\rho F)_t &= \rho_t F + \rho F_\Phi \Phi_t + \rho F_\rho \rho_t \\ &= -\rho^2 v_x F + \rho F_\Phi (-\Sigma) + \rho F_\rho (-\rho^2 v_x) \\ &= -\rho^2 v_x F - \rho F_\Phi \Sigma - \rho^3 F_\rho v_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\rho^2 v_x F - \rho F_\Phi P + \rho F_\Phi \frac{\mu v_x}{u} - \rho^3 F_\rho v_x \\
&= \rho^2 v_x (-F + \mu F_\Phi - \rho F_\rho) - \rho P F_\Phi.
\end{aligned}$$

选取 F 满足下列方程:

$$-F + \mu F_\Phi - \rho F_\rho = 0.$$

令 $G(\rho, \Phi) = \rho F$, 则 $G_\Phi = \rho F_\Phi$, $G_\rho = \rho F_\rho + F$. 于是, $G_\Phi - \frac{\rho}{\mu} G_\rho = 0$. 由特征线法可得

$$G(\rho, \Phi) = f\left(\Phi + \frac{1}{\alpha} \rho^\alpha + \ln \rho\right),$$

此处 $f(x, t)$ 为光滑函数, 我们选取 $f(z) = e^z$, 因此,

$$G(\rho, \Phi) = e^{\Phi + \frac{1}{\alpha} \rho^\alpha + \ln \rho} = \rho e^{\Phi + \frac{1}{\alpha} \rho^\alpha},$$

满足

$$(G(\rho, \Phi))_t = (\rho F(\rho, \Phi))_t = -P(\rho, \theta) G_\Phi \leq 0.$$

对上式关于 τ 在 $[0, t]$ 积分, 得到

$$\rho(x, t) \leq \rho_0(x) e^{\Phi(x, 0) + \frac{\rho^\alpha(x, 0)}{\alpha}} e^{-(\Phi + \frac{\rho^\alpha}{\alpha})}.$$

根据初始密度有上界且 $\Phi \in L^\infty$, 可知存在一个正常数 $C(T)$, 使得

$$\rho(x, t) \leq C(T), \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall t \in [0, T].$$

同样可以类似地证明密度的下界, 对于 $\frac{1}{\rho} = u$, 令 $F_1(\Phi, \rho)$ 是关于 Φ 和 ρ 的待定函数, 则

$$\begin{aligned}
\left(\frac{F_1(\Phi, \rho)}{\rho}\right)_t &= \left(-\frac{1}{\rho^2}\right) \rho_t F_1 + \frac{1}{\rho} F_{1\Phi} \Phi_t + \frac{1}{\rho} F_{1\rho} \rho_t \\
&= \left(-\frac{1}{\rho^2}\right) \rho_t F_1 + \frac{1}{\rho} F_{1\Phi} (-\Sigma) + \frac{1}{\rho} F_{1\rho} \rho_t \\
&= \frac{1}{\rho^2} (\rho^2) v_x F_1 + \frac{1}{\rho} F_{1\Phi} (-\Sigma) + \frac{1}{\rho} F_{1\rho} (-\rho^2 v_x) \\
&= v_x F_1 - \frac{1}{\rho} F_{1\Phi} (\Sigma) - \rho v_x F_{1\rho} \\
&= v_x F_1 - \frac{P}{\rho} F_{1\Phi} + \mu v_x F_\Phi - \rho v_x F_{1\rho} \\
&= v_x (F_1 + \mu F_{1\Phi} - \rho F_{1\rho}) - \frac{P}{\rho} F_{1\Phi}.
\end{aligned}$$

令 $F_1(\Phi, \rho)$ 满足方程

$$F_1 + \mu F_{1\Phi} - \rho F_{1\rho} = 0.$$

由特征线法可得

$$\frac{F_1}{\rho} = g\left(\Phi + \frac{1}{\alpha} \rho^\alpha + \ln \rho\right),$$

其中 $g(t)$ 为任意的光滑函数, 选取 $g(z) = z$. 由

$$\left(\frac{F_1}{\rho}\right)_t = -\frac{P}{\rho} F_{1\Phi}$$

可知,

$$\left(\Phi + \frac{1}{\alpha}\rho^\alpha + \ln \rho\right)_t = -P(\rho, \theta).$$

对于上式两边关于 τ 在 $[0, t]$ 积分, 成立

$$\left(\Phi + \frac{1}{\alpha}\rho^\alpha + \ln \rho\right)(x, t) - \left(\Phi + \frac{1}{\alpha}\rho^\alpha + \ln \rho\right)(x, 0) = \int_0^t (-P)d\tau \leq 0.$$

因此,

$$|\ln \rho| \leq \left|\left(\Phi + \frac{1}{\alpha}\rho^\alpha + \ln \rho\right)(x, 0)\right| + |\Phi(x, t)| + \left|\frac{1}{\alpha}\rho^\alpha(x, t)\right|.$$

根据 ρ 有上界, 初始密度有上下界, 且 $\Phi \in L^\infty$, 可得

$$\rho(x, t) \geq C(T).$$

引理 3.2 证毕. □

引理 3.3 在定理 2.1 的假设条件下, 下列等式成立:

$$\int_0^1 \theta(x, t) + \frac{1}{2}v^2(x, t)dx = \int_0^1 \theta(x, 0) + \frac{1}{2}v_0^2(x)dx = E_0, \quad 0 \leq t \leq \infty. \quad (3.5)$$

引理 3.3 的证明略.

由于在引理 3.2 中已经得到了 μ 的上下界, 根据定理 2.1 的假设和初边值条件, 类似于文献 [13] 我们也可得到一系列先验估计, 即

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \frac{v_x^2}{\theta} dx ds + \int_0^T \int_0^1 \frac{k\theta_x^2}{\theta^2} dx ds \leq c, \\ & \int_0^T \max_{[0,1]} \theta dt \leq c + c \int_0^T \int_0^1 |\theta_x| dx dt \\ & \leq c + c \int_0^T \int_0^1 \frac{\theta_x^2}{\theta^2} dx dt + \delta \int_0^T \int_0^1 \theta^2 dx dt \\ & \leq c + \delta \int_0^T \int_0^1 \theta^2 dx dt \\ & \leq c + \delta \int_0^T \max_{[0,1]} \theta \int_0^1 \theta dx dt \\ & \leq c + \delta \int_0^T \max_{[0,1]} \theta dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

进而, 我们得到

$$\int_0^T \max_{[0,1]} \theta dt \leq c, \quad (3.7)$$

以及

$$\int_0^T \int_0^1 \theta^2 dx dt \leq c. \quad (3.8)$$

引理 3.4 在定理 2.1 的假设条件下, 存在正常数 c , 使得

$$\int_0^1 v^2(x, t) dx + \int_0^T \int_0^1 \frac{\mu(u)v_x^2}{u} dx dt \leq c. \quad (3.9)$$

证明 方程 (2.1)₂ 两边同乘以 v , 并在 Q_t 上积分, 由分部积分和边界条件 (2.4) 和 (2.5) 得到

$$\frac{1}{2} \int_0^1 v^2(x, t) dx + \int_0^T \int_0^1 \frac{\mu(u)v_x^2}{u} dx dt = \frac{1}{2} \int_0^1 v_0^2(x) dx + \int_0^T \int_0^1 p v_x dx dt.$$

因为

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 p v_x dx dt &= \int_0^T \int_0^1 \frac{\mu(u)^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}} v_x \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\mu(u)^{\frac{1}{2}}} p dx dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \frac{\mu(u)}{u} v_x^2 dx dt + c \int_0^T \int_0^1 \frac{u}{\mu(u)} p^2 dx dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \frac{\mu(u)}{u} v_x^2 dx dt + c \int_0^T \int_0^1 \theta^2 dx dt, \end{aligned}$$

故由定理 2.1 的假设和 (3.8) 可知,

$$\frac{1}{2} \int_0^1 v^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \frac{\mu(u)v_x^2}{u} dx dt \leq c.$$

从而证得该引理成立. $\square$

引理 3.5 在定理 2.1 的假设条件下, 对任意的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 存在正常数 c , 使得下述先验估计依次成立:

$$\int_0^T \int_0^1 v_x^2 dx dt \leq c, \quad (3.10)$$

$$\int_0^T \int_0^1 \theta^{-1-\varepsilon} \theta_x^2 dx dt \leq c, \quad (3.11)$$

$$\int_0^T \int_0^1 \theta^{3-\varepsilon} dx dt \leq c, \quad (3.12)$$

$$\int_0^T \max_{[0,1]} \theta^{2-\varepsilon} dt \leq c. \quad (3.13)$$

证明 令 $H(u, \theta) = \int_0^\theta \xi^{-\varepsilon} e_\theta(u, \xi) d\xi$. 由 (2.2) 可得

$$H_\theta(u, \theta) = \theta^{-\varepsilon}, \quad (3.14)$$

$$H_u(u, \theta) = \theta^{1-\varepsilon} p_\theta(u, \theta) - G(u, \theta), \quad (3.15)$$

此处 $G(u, \theta) = \int_0^\theta \xi^{-\varepsilon} p_\theta(u, \xi) d\xi$. 假设 H 为 x 与 t 的函数, 给方程 (3.1) 两边同乘以 $\theta^{-\varepsilon}$, 结合上述关系式 (3.14) 和 (3.15), 成立

$$e_\theta \theta_t \theta^{-\varepsilon} + \theta p_\theta \theta^{-\varepsilon} - \frac{\mu}{u} v_x^2 \theta^{-\varepsilon} = \left(\frac{k}{u} \theta_x \right)_x \theta^{-\varepsilon},$$

则 H 和 G 满足

$$H_t + G(u, \theta) v_x - \theta^{-\varepsilon} \frac{\mu}{u} v_x^2 - \theta^{-\varepsilon} \left(\frac{k}{u} \theta_x \right)_x = 0.$$

现对上式在 Q_T 上积分, 由边界条件可得

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \frac{\mu(u)}{u} \theta^{-\varepsilon} v_x^2 dx dt + \varepsilon \int_0^T \int_0^1 \frac{k}{u} \theta^{-1-\varepsilon} \theta_x^2 dx dt \\ &= \int_0^1 H(x, T) dx - \int_0^1 H(x, 0) dx + \int_0^T \int_0^1 G(u, \theta) v_x dx dt. \end{aligned}$$

由于 $G(u, \theta) \leq c\theta$, u 有上下界以及引理 3.4 可知,

$$\int_0^T \int_0^1 \theta^{-\varepsilon} v_x^2 dx dt + \varepsilon \int_0^T \int_0^1 \theta^{-1-\varepsilon} \theta_x^2 dx dt \leq c + \int_0^T \int_0^1 v_x^2 dx dt + c \int_0^T \int_0^1 \theta^2 dx ds \leq c,$$

故有

$$\int_0^T \int_0^1 v_x^2 dx dt \leq \int_0^T \int_0^1 \theta^{-\varepsilon} v_x^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 \theta^\varepsilon v_x^2 dx dt \leq c + \int_0^T \max_{[0,1]} \theta^\varepsilon \int_0^1 v_x^2 dx dt \leq c,$$

以及

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 \theta^{3-\varepsilon} dx dt &\leq c + c \int_0^T \max_{[0,1]} \theta^{2-\varepsilon} dt \leq c + c \int_0^T \int_0^1 \theta^{1-\varepsilon} |\theta_x| dx dt \\ &\leq c + c \int_0^T \int_0^1 \theta^{-1-\varepsilon} |\theta_x|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \theta^{3-\varepsilon} dx dt \\ &\leq c. \end{aligned}$$

从而上述引理成立. □

引理 3.6 在定理 2.1 的假设下, 存在正常数 c , 使得

$$\max_{[0,1]} \int_0^1 u_x^2 dx ds \leq c. \quad (3.16)$$

证明 令 $M(u) = \int_1^u \frac{u(\xi)}{\xi} d\xi$, 则

$$M(u)_t = \frac{\mu(u)}{u} v_x, \quad M(u)_x = \frac{\mu(u)}{u} u_x.$$

方程 (2.1)₂ 两边同乘以 $M(u)_x - v$, 并且在区间 Q_t 上积分, 可得

$$\int_0^t \int_0^1 (M(u)_x - v)(v_\xi + p_x) dx ds = \int_0^t \int_0^1 (M(u)_x - v)(M(u)_{sx}) dx ds.$$

整理可得

$$\int_0^1 (M(u)_x - v)^2(x, t) dx = \int_0^1 (M(u)_x - v)^2(x, 0) dx + 2 \int_0^t \int_0^1 (p_u u_x + p_\theta \theta_x)(M(u)_x - v) dx ds. \quad (3.17)$$

接下来对上述等式的右边项依次进行估计,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^1 p_u u_x (M(u)_x - v) dx ds \\ &= - \int_0^t \int_0^1 \frac{R\theta}{u^2} u_x (M(u)_x - v) dx ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -c \int_0^t \int_0^1 \frac{R\theta}{u^2} u_x (M(u)_x - v) dx ds \\
&= \int_0^t \int_0^1 \frac{R\theta}{u^2} \left(\frac{uM(u)_x}{\mu} - \frac{uv}{\mu} + \frac{uv}{\mu} \right) (M(u)_x - v) dx ds \\
&= - \int_0^t \int_0^1 \frac{R\theta}{u^2} (M(u)_x - v)^2 + \frac{R\theta uv}{u^2 \mu} (M(u)_x - v) dx ds \\
&\leq \int_0^t \int_0^1 \theta (M(u)_x - v)^2 dx ds + c \int_0^t \int_0^1 \theta v (M(u)_x - v) dx ds \\
&\leq \int_0^t \int_0^1 \theta (M(u)_x - v)^2 dx ds + c \int_0^t \max_{[0,1]} \theta \left(\int_0^1 v^2 + \int_0^1 (M(u)_x - v)^2 dx \right) ds \\
&\leq \int_0^t \int_0^1 \theta (M(u)_x - v)^2 dx ds + c \int_0^t \max_{[0,1]} \theta ds + \int_0^t \max_{[0,1]} \theta \int_0^1 (M(u)_x - v)^2 dx ds \\
&\leq \int_0^t \max_{[0,1]} \theta \int_0^1 (M(u)_x - v)^2 dx ds.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

同样地,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^1 p_\theta \theta_x (M(u)_x - v) dx ds &= \int_0^t \int_0^1 \frac{R}{u} \theta_x (M(u)_x - v) dx ds \\
&\leq c \int_0^t \int_0^1 \theta_x^2 dx ds + c \int_0^t \int_0^1 (M(u)_x - v)^2 dx ds \\
&\leq c + c \int_0^t \int_0^1 (M(u)_x - v)^2 dx ds.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

在上述不等式中我们用到

$$\int_0^t \int_0^1 \theta_x^2 dx ds \leq c \int_0^t \int_0^1 (M(u)_x - v)^2 dx ds,$$

这里将给出详细的证明. 令 $H(u, \theta) = \theta$, $H_\theta = 1$, $H_u = \theta P_\theta - G = 0$, 其中 $G = \rho\theta$, 对 (3.1) 作变换得

$$H_t + Gv_x - \frac{\mu(u)v_x^2}{u} = -\frac{u_x \theta_x}{u^2} + \frac{\theta_{xx}}{u}.$$

对上述等式两边在 Q_T 上积分, 可得

$$\int_0^T \int_0^1 H_t + Gv_x - \frac{\mu(u)v_x^2}{u} dx ds = \int_0^T \int_0^1 \left(-\frac{u_x \theta_x}{u^2} + \frac{\theta_{xx}}{u} \right) dx ds.$$

因为

$$\int_0^1 H dx + \int_0^T \int_0^1 Gv_x dx ds \leq c,$$

从而由上述方程可得

$$\|\theta_{xx}\|_2^2 + \|v_x^2\|_2^2 \leq \epsilon \|\theta_x\|_2^2 + \|u_x\|_2^2.$$

又由 Poincaré 不等式

$$\int_0^t \int_0^1 \theta_x^2 dx ds \leq c \int_0^t \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx ds,$$

故有

$$\|\theta_{xx}\|_2^2 + \|v_x^2\|_2^2 \leq \|u_x\|_2^2.$$

因此成立

$$\|\theta_x\|_2^2 \leq \|u_x\|_2^2 \leq \|(M(u)_x - v)^2\|_2^2.$$

将 (3.18) 和 (3.19) 代入等式 (3.17) 结合定理 2.1 的假设可得到下面的结论:

$$\int_0^1 (M(u)_x - v)^2(x, t) dx \leq c + c \int_0^t \max_{[0,1]}(1 + \theta) \int_0^1 (M(u)_x - v)^2 dx ds.$$

由 Gronwall 不等式可得 (3.16) 成立, 引理证毕. $\square$

引理 3.7 在定理 2.1 的假设下, 存在正常数 c , 使得

$$\int_0^T \int_0^1 \theta_x^2 dx ds \leq c, \quad (3.20)$$

$$\int_0^T \int_0^1 v_x^4 dx ds \leq c. \quad (3.21)$$

证明 由引理 3.6 可知,

$$\int_0^T \int_0^1 \theta_x^2 dx ds + \int_0^t \int_0^1 v_x^4 dx ds \leq c \int_0^T \int_0^1 (M(u)_x - v)^2 dx ds \leq c.$$

引理证毕. $\square$

在下述引理中引入 Y 和 Z 两个变量, 且对其进行如下定义:

$$Y = \max_{[0,T]} \int_0^1 \theta_x^2 dx, \quad Z = \max_{[0,T]} \int_0^1 v_{xx}^2 dx.$$

显然,

$$\begin{aligned} \theta^2(x, t) &\leq c + 2 \int_0^1 |\theta| |\theta_x| dx \leq c + c \left(\int_0^1 |\theta|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |\theta_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= c \left(\int_0^1 |\theta|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} Y^{\frac{1}{2}} \leq c + c Y^{\frac{1}{2}} \max_{[0,1]} \theta^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \theta dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c + c Y^{\frac{1}{2}} \max_{Q_T} \theta^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

从而,

$$\max_{Q_T} \theta^3 \leq c + c Y.$$

故

$$\max_{Q_T} \theta \leq c + c Y^{\frac{1}{3}}. \quad (3.22)$$

同样地, 对于

$$v_x^2(y, t) \leq \int_0^1 v_x^2 dx + 2 \int_0^1 |v_x(x, t)| |v_{xx}| dx,$$

由内插不等式得

$$\int_0^1 v_x^2 dx \leq c \int_0^1 v^2 dx + c \left(\int_0^1 v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 v_{xx}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此, 成立

$$\max_{[0,T]} \int_0^1 v_x^2 dx \leq c + cZ^{\frac{1}{2}}, \quad (3.23)$$

以及

$$\max_{Q_T} |v_x| \leq c + cZ^{\frac{3}{8}}. \quad (3.24)$$

引理 3.8 下面针对上述引入变量 Y 和 Z 以及新引入变量 X 给出相应的估计式如下:

$$Y \leq c + cZ^{\frac{7}{8}}, \quad (3.25)$$

$$X = \int_0^t \int_0^1 \theta_t^2 dx ds \leq c + cZ^{\frac{7}{8}}. \quad (3.26)$$

证明 令

$$K(u, \theta) = \int_0^\theta \frac{1}{u} d\zeta = \frac{\theta}{u},$$

方程 (3.1) 两边乘以 K_t 在 $Q_t \subset Q_T$ 上积分可得

$$\int_0^t \int_0^1 \left(e_\theta(u, \theta) \theta_t + \theta p_\theta(u, \theta) v_x - \frac{\mu(u)}{u} v_x^2 \right) K_t dx ds + \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{u} \theta_{xx} K_{tx} dx ds = 0. \quad (3.27)$$

通过计算可得

$$\begin{aligned} K_t &= K_u v_x + K_\theta \theta_t = K_u v_x + \frac{1}{u} \theta_t, \\ K_{tx} &= \left(\frac{\theta_x}{u} \right)_t + K_u v_{xx} + K_{uu} v_x u_x + \left(\frac{1}{u} \right)_u u_x \theta_t, \end{aligned}$$

此时

$$|K_u| + |K_{uu}| \leq c\theta.$$

将 (3.27) 进行展开化简, 得

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^1 \left(e_\theta(u, \theta) \theta_t^2 \frac{1}{u} + \frac{1}{u} \theta_x \left(\frac{\theta_x}{u} \right)_t \right) dx ds \\ &= - \int_0^t \int_0^1 \left[e_\theta \theta_t K_u v_x + \left(\theta p_\theta v_x - \frac{\mu(u)}{u} v_x^2 \right) K_u v_x + \left(\theta p_\theta v_x - \frac{\mu(u)}{u} v_x^2 \right) \frac{1}{u} \theta_t \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{u} \theta_x K_u v_{xx} + \frac{1}{u} \theta_x K_{uu} v_x u_x + \frac{1}{u} \theta_x \left(\frac{1}{u} \right)_u u_x \theta_t \right] dx ds \\ &\leq \left| \int_0^t \int_0^1 e_\theta \theta_t K_u v_x dx ds \right| + \left| \int_0^t \int_0^1 \left(\theta p_\theta v_x - \frac{\mu(u)}{u} v_x^2 \right) K_u v_x dx ds \right| \\ & \quad + \left| \int_0^t \int_0^1 \left(\theta p_\theta v_x - \frac{\mu(u)}{u} v_x^2 \right) \frac{1}{u} \theta_t dx ds \right| + \left| \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{u} \theta_x K_u v_{xx} dx ds \right| \\ & \quad + \left| \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{u} \theta_x K_{uu} v_x u_x dx ds \right| + \left| \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{u} \theta_x \left(\frac{1}{u} \right)_u u_x \theta_t dx ds \right| \\ &=: \sum_{i=1}^6 I_i. \end{aligned} \quad (3.28)$$

首先不等式的左边

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_0^1 e_\theta(u, \theta) \theta_t^2 \frac{1}{u} dx ds &= \int_0^t \int_0^1 \theta_t^2 \frac{1}{u} dx ds \geq \frac{1}{u} \int_0^t \int_0^1 \theta_t^2 dx ds = X, \\ \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{u} \theta_x \left(\frac{\theta_x}{u} \right) dx ds &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\theta_x^2}{u^2} \Big|_0^t dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\theta_x^2}{u^2}(x, t) dx - c \geq \frac{Y}{2} - c.\end{aligned}$$

我们依次估计上述不等式的右边项, 由 (3.12) 和 (3.13) 知,

$$\begin{aligned}|I_1| &= \left| \int_0^t \int_0^1 e_\theta \theta_t K_u v_x dx ds \right| \leq c \int_0^t \int_0^1 |\theta| |\theta_t| |v_x| dx ds \\ &\leq \frac{X}{2} + c \int_0^t \int_0^1 \theta^2 v_x^2 dx ds \leq \frac{X}{2} + c \max_{Q_T} v_x^2 \int_0^t \int_0^1 \theta^2 dx ds \\ &\leq \frac{X}{2} + c + cZ^{\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

由 (3.12)、(3.21) 和 (3.24) 可得

$$\begin{aligned}|I_2| &= \left| \int_0^t \int_0^1 \left(\theta p_\theta v_x - \frac{\mu(u)}{u} v_x^2 \right) K_u v_x dx ds \right| \\ &\leq c \int_0^t \int_0^1 (\theta v_x + v_x^2) \theta |v_x| dx ds \\ &\leq c \int_0^t \int_0^1 \theta^2 |v_x|^2 dx ds + c \int_0^t \int_0^1 \theta |v_x|^3 dx ds \\ &\leq c \max_{Q_T} v_x^2 \int_0^t \int_0^1 \theta^2 dx ds + \max_{Q_T} |v_x| \int_0^t \int_0^1 \theta v_x^2 dx ds \\ &\leq c + cZ^{\frac{7}{8}},\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}|I_3| &= \left| \int_0^t \int_0^1 \left(\theta p_\theta v_x - \frac{\mu(u)}{u} v_x^2 \right) \frac{1}{u} \theta_t dx ds \right| \\ &\leq c \int_0^t \int_0^1 |\theta v_x \theta_t| dx ds + c \int_0^t \int_0^1 |v_x^2 \theta_t| dx ds \\ &\leq c \int_0^t \int_0^1 \theta^2 v_x^2 dx ds + \frac{X}{4} + c \int_0^t \int_0^1 v_x^4 dx ds \\ &\leq \frac{X}{4} + c \max_{Q_T} v_x^2 \int_0^t \int_0^1 \theta^2 dx ds + c \int_0^t \int_0^1 v_x^4 dx ds \\ &\leq \frac{X}{4} + c + cZ^{\frac{3}{4}}, \\ |I_4| &= \left| \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{u} \theta_x K_u v_{xx} dx ds \right| \leq \int_0^t \int_0^1 |\theta_x \theta v_{xx}| dx ds \\ &\leq \frac{1}{8} \int_0^t \int_0^1 \theta_x^2 dx ds + \int_0^t \int_0^1 \theta^2 v_{xx}^2 dx ds \\ &\leq \frac{1}{8} Y + \max_{Q_T} \theta^2 \int_0^t \int_0^1 v_{xx}^2 dx ds \\ &\leq \frac{1}{8} Y + c + cY^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{4}Y + c.$$

由 (3.11)、(3.16) 和 (3.22) 得

$$\begin{aligned} |I_5| &= \left| \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{u} \theta_x K_{uu} v_x u_x dx ds \right| \leq c \left| \int_0^t \int_0^1 \theta \theta_x v_x u_x \right| \leq c \max_{Q_T} |v_x| \int_0^t \int_0^1 |\theta| |\theta_x| |u_x| \\ &\leq c + cZ^{\frac{3}{8}} \left(\int_0^t \max_{[0,1]} \theta^{2-\epsilon} \int_0^1 u_x^2 dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\max_{Q_T} \theta^{1+2\epsilon} \int_0^t \int_0^1 \theta^{-1-\epsilon} \theta_x^2 dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c + cZ^{\frac{3}{8}} Y^{\frac{1+2\epsilon}{6}} \leq c + cZ^{\frac{3}{4}} + c \frac{Y}{8}, \end{aligned}$$

同时,

$$\begin{aligned} |I_6| &= \left| \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{u} \theta_x \left(\frac{k}{u} \right)_u u_x \theta_t dx ds \right| \leq \frac{X}{8} + c \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{1}{u} \theta_x \right)^2 u_x^2 dx ds \\ &\leq \frac{X}{8} + c \int_0^t \max_{[0,1]} \left(\frac{1}{u} \theta_x \right)^2 \int_0^1 u_x^2 dx ds \\ &\leq \frac{X}{8} + c \int_0^t \int_0^1 \left| \frac{1}{u} \theta_x \right| \left| \left(\frac{1}{u} \theta_x \right)_x \right| dx ds. \end{aligned}$$

我们对该不等式右边第二项进行如下估计:

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_0^1 \left| \frac{1}{u} \theta_x \right| \left| \left(\frac{1}{u} \theta_x \right)_x \right| dx ds \\ &\leq c \left(\int_0^t \int_0^1 (1 + \theta^{-1-\epsilon} \theta_x^2) dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_0^t \int_0^1 \left(1 + \theta^{1+\epsilon} \left(\frac{1}{u} \theta_x \right)_x^2 \right) dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \left\{ \int_0^t \int_0^1 (1 + \theta^{1+\epsilon}) \theta_t^2 dx ds + \int_0^t \int_0^1 (1 + \theta^{1+\epsilon}) \theta^2 v_x^2 dx ds + \int_0^t \int_0^1 (1 + \theta^{1+\epsilon}) v_x^4 dx ds \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c + c \max_{Q_T} \theta^{\frac{1+\epsilon}{2}} X^{\frac{1}{2}} + \max_{Q_T} \theta^\epsilon Z^{\frac{3}{8}} + c \max_{Q_T} \theta^{\frac{1+\epsilon}{2}} + cZ^{\frac{3}{8}}, \end{aligned}$$

从而可得

$$|I_6| = \left| \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{u} \theta_x \left(\frac{k}{u} \right)_u u_x \theta_t dx ds \right| \leq \frac{3X}{16} + \frac{Y}{16} + c + cZ^{\frac{3}{8}}.$$

将上述 $I_1 - I_6$ 的估计代入等式 (3.28), 我们可以得到最终结果如下:

$$\frac{X+Y}{16} \leq c + cZ^{\frac{7}{8}}.$$

引理 3.8 证毕. □

引理 3.9 我们可以得到如下估计:

$$\max_{[0,T]} \int_0^1 v_t^2(x,t) dx \leq c + cZ^{\frac{7}{8}}, \quad (3.29)$$

$$\int_0^t \int_0^1 v_{xt}(x,s)^2(x,t) dx ds \leq c + cZ^{\frac{7}{8}}. \quad (3.30)$$

证明 对 (2.1)₂ 关于 t 求导, 等式两边同时乘以 v_t , 然后两边同时积分, 得到

$$\frac{1}{2} \int_0^1 v_t^2(x,t) dx + \int_0^t \int_0^1 \frac{\mu}{u} v_{xt}^2 dx ds$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 v_t^2(x, 0) dx + \int_0^t \int_0^1 \left[P_t v_{xt} - \left(\frac{\mu}{u} \right)_t v_x v_{xt} \right] dx ds.$$

我们依次估计等式右边项

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\mu}{u} \right)_t v_x v_{xt} dx ds \right| &= \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\mu}{u} \right)_u v_x v_x^2 v_{xt} dx ds \leq \frac{\mu_0}{2} \int_0^t \int_0^1 v_{xt}^2 dx ds + c + cZ^{\frac{3}{4}}, \\ \left| \int_0^t \int_0^1 P_u v_x v_{xt} dx ds \right| &\leq \frac{\mu_0}{4} \int_0^t \int_0^1 v_{xt}^2 dx ds + c \int_0^t \int_0^1 \theta^2 v_x^2 dx ds \leq \frac{\mu_0}{4} \int_0^t \int_0^1 v_{xt}^2 dx ds + c + cZ^{\frac{3}{4}}, \\ \left| \int_0^t \int_0^1 P_\theta \theta_t v_{xt} dx ds \right| &\leq \frac{\mu_0}{8} \int_0^t \int_0^1 v_{xt}^2 dx ds + c \int_0^t \int_0^1 \theta_t^2 dx ds \leq \frac{\mu_0}{8} \int_0^t \int_0^1 v_{xt}^2 dx ds + c + cZ^{\frac{7}{8}}. \end{aligned}$$

从而得到上述证明.

如上述所述, 我们可以推断 Z 是有界的. 由方程 (2.1)₂ 化简可得到 v_{xx} 的具体表示形式如下:

$$v_{xx} = \frac{u}{\mu(u)} \left(v_t + P(u, \theta)_x - \left(\frac{\mu}{u} \right)_u u_x v_x \right).$$

对于该等式的两边同时在 $L^2(0, 1)$ 积分, 依次估计右边各项及应用上述引理可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_u^2 u_x^2 dx &\leq c \left(1 + \max_{[0, T]} \theta^2 \int_0^1 u_x^2 dx \right) \leq c(1 + Y^{\frac{2}{3}}) \leq c(1 + Z^{\frac{7}{12}}), \\ \int_0^1 P_\theta^2 \theta_x^2 dx &\leq c \int_0^1 \theta_x^2 dx \leq cY \leq c(1 + Z^{\frac{7}{8}}), \\ \int_0^1 \left(\frac{\mu}{u} \right)_u^2 v_x v_x^2 u_x^2 dx &\leq c \max_{[0, T]} v_x^2 \int_0^1 u_x^2 dx \leq cZ^{\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

因此可以得到 $Z \leq c + cZ^{\frac{7}{8}}$, 从而 Z 是一致有界的得到证明. $\square$

引理 3.10 由上述引理知, Z 、 Y 和 θ 是有上界的, 且 (3.22)–(3.26)、(3.29) 和 (3.30) 中对应的物理量也是有界的. 根据文献 [19] 很容易得到

$$0 < \underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}.$$

引理 3.11 类似地, 我们可以得到关于 θ 的估计式如下:

$$\max_{[0, T]} \int_0^1 \theta_t^2(x, t) dx \leq c, \quad (3.31)$$

$$\int_0^T \int_0^1 \theta_{xt}^2(x, t) dx dt \leq c, \quad (3.32)$$

$$\max_{[0, T]} \int_0^1 \theta_{xx}^2(x, t) dx \leq c. \quad (3.33)$$

证明 对方程 (3.1) 关于 t 求导, 等式两边同时乘以 θ_t , 且在 Q_T 上进行积分, 可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^1 (\theta_t)^2(x, t) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (\theta_t)^2(x, 0) dx + \int_0^t \int_0^1 P_\theta v_x \theta_t^2 dx ds + \int_0^t \int_0^1 \theta P_{\theta\theta} v_x \theta_t^2 dx ds \\ &+ \int_0^t \int_0^1 \theta P_{\theta u} v_x^2 \theta_t dx ds + \int_0^t \int_0^1 \theta P_\theta \theta v_{xt} \theta_t dx ds - \int_0^t \int_0^1 \left(\left(\frac{\mu}{u} \right)_u v_x^3 + 2 \frac{\mu}{u} v_x v_{xt} \right) \theta_t dx ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\theta_x}{u} \right)_{xt} \theta_t dx ds = - \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\theta_x}{u} \right)_t (\theta_t)_x dx ds \\
&= - \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{u} \theta_{xt}^2 dx ds - \int_0^t \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{u} \right)_u v_x \theta_x \right) \times (\theta_t)_x dx ds.
\end{aligned}$$

通过上述引理以及 P 、 e 、 μ 和 u 的有界性可以估计 (3.31) 和 (3.32). 一旦 (3.31) 和 (3.32) 成立, 则 (3.33) 成立, 这是因为此时对于任意的 $t \in [0, T]$, 方程中所有的项都是属于 $L^2[0, 1]$ 的, 具体的证明过程参见文献 [20, 引理 3.6]. $\square$

4 解的存在性

由上述引理中关于解的一致界及各阶导数估计 (参见文献 [21]), 我们可以由 Banach 定理及短时间区域上线性化问题定义的算子的压缩映射原理建立解的局部存在性, 进而将其延拓成全局解. 详细过程参见文献 [18]. 至此, 定理 2.1 证毕.

致谢 衷心感谢各位评审专家给予宝贵的意见.

参考文献

- Liu T P, Xin Z P, Yang T. Vacuum states of compressible flow. *Discrete Contin Dyn Syst*, 1998, 4: 1–32
- Okada M, Matušů-Nečasová Š, Makino T. Free boundary problem for the equation of one-dimensional motion of compressible gas with density-dependent viscosity. *Ann Univ Ferrara Sez VII Sci Mat*, 2002, 48: 1–20
- Yang T, Yao Z A, Zhu C J. Compressible Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity and vacuum. *Comm Partial Differential Equations*, 2001, 26: 965–981
- Jiang S, Xin Z P, Zhang P. Global weak solutions to 1D compressible isentropic Navier-Stokes with density-dependent viscosity. *Methods Appl Anal*, 2005, 12: 239–252
- Guo Z H, Jiang S, Xie F. Global existence and asymptotic behavior of weak solutions to the 1D compressible Navier-Stokes equations with degenerate viscosity coefficient. *Asymptot Anal*, 2008, 60: 101–123
- Zhu C J. Asymptotic behavior of compressible Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity and vacuum. *Comm Math Phys*, 2010, 293: 279–299
- Yang T, Zhao H J. A vacuum problem for the one-dimensional compressible Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity. *J Differential Equations*, 2002, 184: 163–184
- Guo Z H, Zhu C J. Global weak solutions and asymptotic behavior to 1D compressible Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity and vacuum. *J Differential Equations*, 2010, 248: 2768–2799
- Jiang S. On initial boundary value problems for a viscous, heat-conducting, one-dimensional real gas. *J Differential Equations*, 1994, 110: 157–181
- Jiang S. On the asymptotic behaviour of the motion of a viscous, heat-conducting, one-dimensional real gas. *Math Z*, 1994, 216: 317–336
- Wang D. Global solutions of the Navier-Stokes equations for viscous compressible flows. *Nonlinear Anal*, 2003, 52: 1867–1890
- Jiang S. Global smooth solutions of the equations of a viscous, heating-conducting one-dimensional gas with density-dependent viscosity. *Math Nachr*, 1998, 190: 169–183
- Qin X L, Yao Z A. Global smooth solutions of the compressible Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity. *J Differential Equations*, 2008, 244: 2041–2061
- Qin X L, Yao Z A. Global solutions of the free boundary problem for the compressible Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity. *Comm Pure Appl Math*, 2010, 9: 1041–1052
- Tan Z, Yang T, Zhao H J, et al. Global solutions to the one-dimensional compressible Navier-Stokes-Poisson equations with large data. *SIAM J Math Anal*, 2013, 45: 547–571
- Bresch D, Desjardins B. on the existence of global weak solution to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids. *J Math Pures Appl (9)*, 2007, 87: 57–90

- 17 Hoff D, Jenssen H K. Symmetric nonbarotropic flows with large data and forces. Arch Ration Mech Anal, 2004, 173: 297–343
- 18 Kawohl B. Global existence of large solutions to initial boundary value problems for a viscous, heat-conducting, one-dimensional real gas. J Differential Equations, 1985, 58: 76–103
- 19 Protter M H, Weinberger H F. Maximum Principles in Differential Equations. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1967
- 20 Dafermos C M, Hsiao L. Global smooth thermomechanical processes in one-dimensional nonlinear thermoviscoelasticity. Nonlinear Anal, 1982, 6: 435–454
- 21 Tani A. On the first initial-boundary value problem of compressible viscous fluid motion. Publ Res Inst Math Sci, 1977, 13: 193–253

The problem of free boundary for non-isentropic Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity in one-dimension

GUO ZhenHua, WANG XiaoJin & WANG Mei

Abstract In this article, we obtain the existence of global classical solutions for non-isentropic compressible Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity in one-dimension. Here, let the viscosity coefficient be $\mu(\rho) = \rho^\alpha + 1$, where ρ denotes the density of fluids and $\alpha \in (0, +\infty)$ is a constant. The key point is that the positive upper and lower bounds of the density ρ are obtained by using some appropriate energy functionals, so it reduces the restriction to α enough. Moreover, we get the regularity of solutions by using a series of priori estimates and obtain the existence of classical solutions.

Keywords non-isentropic Navier-Stokes equations, density-dependent viscosity, free boundary

MSC(2010) 35Q30, 35A09, 35A23, 35A01, 35B45

doi: 10.1360/N012016-00024