关于微分算子的 (Musielak-)Orlicz-Hardy 空间的实变理论及其应用

杨四辈

兰州大学数学与统计学院, 兰州 730000

E-mail: yangsb@lzu.edu.cn

指导教师: 杨大春 北京师范大学数学科学学院

收稿日期: 2014-08-26; 接受日期: 2014-12-26

国家自然科学基金 (批准号: 11401276) 和兰州大学中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: lzujbky-2014-18) 资助项目

摘要 众所周知, Calderón-Zygmund 奇异积分算子理论及刻画这些算子有界性的各种函数空间的实变理论因其在调和分析和偏微分方程等数学分支中有重要的应用而成为现代调和分析的主要内容之一. 然而, 经典函数空间的实变理论已不再适用于刻画相关于某些比 Laplace 算子更一般的微分算子的奇异积分算子的有界性. 因此, 对不同的算子发展与其相适应的、能刻画其相关奇异积分算子有界性的函数空间的实变理论已成为调和分析中近年来十分活跃的研究方向之一. 本文主要研究 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的强 Lipschitz 区域或更一般的带双倍测度的度量空间上与包括二阶散度型椭圆算子和 Schrödinger 算子在内的微分算子相关的 (Musielak-)Orlicz-Hardy 空间的实变理论及其在算子有界性中的应用.

关键词 Hardy-型空间 椭圆算子 非负自伴算子 Schrödinger 算子 强 Lipschitz 区域 Musielak-Orlicz 函数
MSC (2010) 主题分类 42B35, 42B30, 42B20

1 引言

本文是作者博士学位毕业论文^[1]的一个简要介绍, 由于篇幅限制, 本文略去所有证明, 有兴趣的读者可参见原论文或文献 [2-8]. 该博士论文主要研究了 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的强 Lipschitz 区域或更一般的带双倍测度的度量空间上与包括二阶散度型椭圆算子和 Schrödinger 算子在内的微分算子相关的 (Musielak-)Orlicz-Hardy 空间的实变理论及其在算子有界性中的应用. 论文中关于强 Lipschitz 区域上相关于带边界条件的二阶散度型椭圆算子的 (加权局部) Orlicz-Hardy 空间的实变特征及其在边值问题中的主要结果可参见文献 [2,3,5], 而关于 $\mathbb{R}^n$ 上带局部权的加权局部 Orlicz-Hardy 空间的实变特征的详细内容可参见文献 [4]. 此外, 文中关于 $\mathbb{R}^n$ 上的 (局部) Musielak-Orlicz-Hardy 空间的实变特征的主要结果是在文献 [6,7] 中获得的, 而关于一般的度量测度空间上相关于非负自伴算子的 Musielak-Orlicz-Hardy 空间的实变特征及 $\mathbb{R}^n$ 上相关于带非负局部可积位势的 Schrödinger 算子的 Musielak-Orlicz-Hardy 空间的实变特征及其在算子有界性中的主要结果可参见文献 [8]. 博士论

文之后, 我们进一步研究了度量测度空间上相关于满足强对角估计的算子的 Musielak-Orlicz-Hardy 空间的实变特征 [9] 以及相关于 (带磁场的) Schrödinger 算子的二阶 Riesz 变换在相应 Musielak-Orlicz-Hardy 空间上的有界性 [10,11].

2 研究背景

最初由 Stein 和 Weiss [12] 所研究的、且后来由 Fefferman 和 Stein [13] 系统发展和完善的 n - 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上 Hardy 空间的实变理论在分析和偏微分方程的各个领域中起着重要的作用. 特别地, 当 $p \in (0, 1]$ 时, Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 是 Lebesgue 空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的一个合适替代; 例如, 当 $p \in (0, 1]$ 时, Riesz 变换在 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 但不在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界. 另外, 作为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($p \in (0, 1]$) 的合适替代, $H^p(\mathbb{R}^n)$ 的实用性来自于它的几个等价实变特征刻画. 在这些实变特征中, Hardy 空间的一个重要而有用的特征是其原子特征. 该特征最初由 Coifman [14] 和 Latter [15] 所获得. 然而, Hardy 空间也有两个缺点: 该空间既关于微分同胚运算不封闭, 也关于具有紧支集的光滑函数所定义的点态乘子运算不封闭. 为了克服这些问题, Goldberg [16] 发展了局部 Hardy 空间 $h^p(\mathbb{R}^n)$ ($p \in (0, 1]$) 的实变理论. 同时, 人们也引进和研究了加权 Hardy 空间 (例如, 参见文献 [17]). 此外, Hardy 空间理论发展的另一个重要方向是研究 $\mathbb{R}^n$ 中区域上的 (局部) Hardy 空间. 这类 Hardy 空间因其在椭圆边值问题中有重要的应用而受到众多学者的关注和研究 (例如, 参见文献 [18,19]).

另一方面, 作为 Lebesgue 空间的一个自然推广, Orlicz 空间最初由 Orlicz 等人引进和研究 (例如, 参见文献 [20]). 从此, Orlicz 空间的自身理论被很好地发展并且被广泛地应用到了概率、统计、位势理论、偏微分方程以及调和分析和分析学的其他领域. 此外, 在研究算子有界性时, Orlicz-Hardy 空间也是 Orlicz 空间的合适替代 (例如, 参见文献 [21]). 最近, Ky [22] 引进和研究了一个新的 Musielak-Orlicz-Hardy 空间, 该空间统一了已有的 (加权) Hardy 空间和 Orlicz-Hardy 空间, 具有一般性. 值得指出的是, Musielak-Orlicz 型函数空间是 Orlicz 型函数空间的自然推广, 且研究 Musielak-Orlicz 型函数空间的动机来自于该类函数空间在数学和物理的许多分支中广泛的应用 (例如, 参见文献 [22]).

此外, Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 本质上相关于 $\mathbb{R}^n$ 上的 Laplace 算子 $\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. 然而该空间在许多背景下是不适合的; 例如, 对于一般的带复有界可测系数的二阶散度型椭圆算子 L , 相关于 L 的 Riesz 变换 $\nabla L^{-\frac{1}{2}}$ 不是从 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 有界的 (例如, 参见文献 [23,24]). 为了研究这类不属于经典 Calderón-Zygmund 理论的奇异积分的有界性, 人们在近几年引进和研究了相关于微分算子的函数空间, 而且该课题已成为调和和分析中近些年来十分活跃的研究方向之一 (例如, 参见文献 [23–32]).

基于这些背景, 本文在已有研究成果的基础之上, 进一步研究了 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^n$ 中的强 Lipschitz 区域或更一般的带双倍测度的度量空间上与包括二阶散度型椭圆算子和 Schrödinger 算子在内的微分算子相关的 (Musiela-)Orlicz-Hardy 空间的实变理论及其在算子有界性中的应用. 所获结果进一步充实和发展了相关于微分算子的函数空间的实变理论.

3 相关于非负自伴算子的 Musielak-Orlicz-Hardy 空间

为了陈述本节的主要结果, 首先回顾一些必要的概念和记号. 设 $\mathcal{X}$ 为一个集合, d 为 $\mathcal{X}$ 上的一个距离, 且 μ 为 $\mathcal{X}$ 上的一个非负 Borel 正则测度. 对任意的 $x \in \mathcal{X}$ 及 $r \in (0, \infty)$, 令 $B(x, r) := \{y \in \mathcal{X} : d(x, y) < r\}$ 及 $V(x, r) := \mu(B(x, r))$. 同时, 假设存在一个常数 $C_1 \in [1, \infty)$ 使得, 对所有的 $x \in \mathcal{X}$ 及

$r \in (0, \infty)$,

$$V(x, 2r) \leq C_1 V(x, r) < \infty. \quad (3.1)$$

因此, $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是一个 Coifman 和 Weiss 意义下的齐型空间. 另外, 双倍性质 (3.1) 进一步暗示了下面的强齐型性质, 即存在正常数 C 和 n 使得, 对所有的 $\lambda \in [1, \infty)$, $x \in \mathcal{X}$ 及 $r \in (0, \infty)$,

$$V(x, \lambda r) \leq C \lambda^n V(x, r). \quad (3.2)$$

同时也可以看到, 存在正常数 $C \in (0, \infty)$ 及 $N \in [0, n]$ 使得, 对所有的 $x, y \in \mathcal{X}$ 及 $r \in (0, \infty)$,

$$V(x, r) \leq C \left[1 + \frac{d(x, y)}{r} \right]^N V(y, r). \quad (3.3)$$

在本节, 我们总假设所考虑的算子 L 满足下面的假设.

假设 (H₁) L 为 $L^2(\mathcal{X})$ 上的一个非负自伴算子.

假设 (H₂) 算子 L 生成的解析半群 $\{e^{-tL}\}_{t>0}$ 满足 Davies-Gaffney 估计, 即存在正常数 C_2 及 C_3 使得, 对所有 $\mathcal{X}$ 中的闭集 E 和 F , $t \in (0, \infty)$ 及 $f \in L^2(E)$,

$$\|e^{-tL}f\|_{L^2(F)} \leq C_2 \exp \left\{ - \frac{[\text{dist}(E, F)]^2}{C_3 t} \right\} \|f\|_{L^2(E)},$$

其中 $\text{dist}(E, F) := \inf_{x \in E, y \in F} d(x, y)$.

值得指出的是, $\mathbb{R}^n$ 上的 Laplace 算子和带非负局部可积位势的 (带磁场的) Schrödinger 算子, 以及完备 Riemann 流形上的 Laplace-Beltrami 算子等均满足假设 (H₁) 和 (H₂) (例如, 参见文献 [8, 9]).

设函数 $\varphi: \mathcal{X} \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 满足, 对所有的 $x \in \mathcal{X}$, $\varphi(x, \cdot)$ 是一个 Orlicz 函数; 即函数 $\varphi(x, \cdot)$ 在区间 $[0, \infty)$ 上非减, $\varphi(x, 0) = 0$, 对任意的 $t \in (0, \infty)$, $\varphi(x, t) > 0$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(x, t) = \infty$. 对某个 $p \in (0, \infty)$, 称 φ 是一致上型 (或下型) p , 若存在一个正常数 C 使得, 对所有的 $x \in \mathcal{X}$, $t \in [1, \infty)$ (或 $t \in [0, 1]$) 及 $s \in [0, \infty)$, $\varphi(x, st) \leq Ct^p \varphi(x, s)$. 令

$$I(\varphi) := \inf \{p \in (0, \infty) : \varphi \text{ 是一致上型 } p\} \quad (3.4)$$

及

$$i(\varphi) := \sup \{p \in (0, \infty) : \varphi \text{ 是一致下型 } p\}. \quad (3.5)$$

在这里, $I(\varphi)$ (或 $i(\varphi)$) 称为 φ 的一致临界上型 (或下型) 指标.

进一步假设 φ 满足, $\varphi(\cdot, t)$ 对所有的 $t \in [0, \infty)$ 是可测的. 则称函数 $\varphi(\cdot, t)$ 对某个 $q \in [1, \infty)$ 满足一致 Muckenhoupt 条件, 即 $\varphi \in \mathbb{A}_q(\mathcal{X})$, 若当 $q \in (1, \infty)$ 时,

$$\mathbb{A}_q(\varphi) := \sup_{t \in (0, \infty)} \sup_{B \subset \mathcal{X}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B \varphi(x, t) d\mu(x) \left\{ \frac{1}{\mu(B)} \int_B [\varphi(y, t)]^{-1/(q-1)} d\mu(y) \right\}^{q-1} < \infty \quad (3.6)$$

或

$$\mathbb{A}_1(\varphi) := \sup_{t \in (0, \infty)} \sup_{B \subset \mathcal{X}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B \varphi(x, t) d\mu(x) \left\{ \text{ess sup}_{y \in B} [\varphi(y, t)]^{-1} \right\} < \infty, \quad (3.7)$$

其中第一个上确界取遍所有的 $t \in (0, \infty)$ 且第二个取遍所有的球 $B \subset \mathcal{X}$.

此外, 称 $\varphi(\cdot, t)$ 对某个 $q \in (1, \infty]$ 满足一致逆 Hölder 条件, 即 $\varphi \in \mathbb{RH}_q(\mathcal{X})$, 若当 $q \in (1, \infty)$ 时,

$$\mathbb{RH}_q(\varphi) := \sup_{t \in (0, \infty)} \sup_{B \subset \mathcal{X}} \left\{ \frac{1}{\mu(B)} \int_B [\varphi(x, t)]^q d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \frac{1}{\mu(B)} \int_B \varphi(x, t) d\mu(x) \right\}^{-1} < \infty \quad (3.8)$$

或

$$\mathbb{RH}_\infty(\varphi) := \sup_{t \in (0, \infty)} \sup_{B \subset \mathcal{X}} \left\{ \operatorname{ess\,sup}_{y \in B} \varphi(y, t) \right\} \left\{ \frac{1}{\mu(B)} \int_B \varphi(x, t) d\mu(x) \right\}^{-1} < \infty. \quad (3.9)$$

令 $\mathbb{A}_\infty(\mathcal{X}) := \bigcup_{q \in [1, \infty)} \mathbb{A}_q(\mathcal{X})$ 且定义 φ 的临界指标如下:

$$q(\varphi) := \inf \{q \in [1, \infty) : \varphi \in \mathbb{A}_q(\mathcal{X})\} \quad (3.10)$$

及

$$r(\varphi) := \sup \{q \in (1, \infty] : \varphi \in \mathbb{RH}_q(\mathcal{X})\}. \quad (3.11)$$

下面给出本文所考虑的增长函数 φ 的定义.

定义 3.1 称函数 $\varphi : \mathcal{X} \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是一个增长函数, 若下面几条成立:

(i) φ 是 Musielak-Orlicz 函数, 即, (a) 对所有的 $x \in \mathcal{X}$, $\varphi(x, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是一个 Orlicz 函数; (b) 对所有的 $t \in [0, \infty)$, $\varphi(\cdot, t)$ 是可测的; (ii) $\varphi \in \mathbb{A}_\infty(\mathcal{X})$; (iii) φ 是一致上型 p_1 及一致下型 p_2 的, 其中 $p_1, p_2 \in (0, 1]$.

此外, 对 $f \in L^2(\mathcal{X})$ 及 $x \in \mathcal{X}$, 定义

$$S_L(f)(x) := \left\{ \int_{\Gamma(x)} |t^2 L e^{-t^2 L} f(y)|^2 \frac{d\mu(y) dt}{V(x, t)t} \right\}^{1/2}, \quad (3.12)$$

其中 $\Gamma(x) := \{(y, t) \in \mathcal{X} \times (0, \infty) : d(x, y) < t\}$.

现在我们引进相关于 L 的 Musielak-Orlicz-Hardy 空间 $H_{\varphi, L}(\mathcal{X})$ 如下.

定义 3.2 令 $H^2(\mathcal{X}) := \overline{R(L)}$, 其中 $\overline{R(L)}$ 表示 L 的值域在 $L^2(\mathcal{X})$ 中的闭包. 进一步设 L 满足假设 (H₁) 和 (H₂), 且 φ 同定义 3.1. 称函数 $f \in H^2(\mathcal{X})$ 属于 $\tilde{H}_{\varphi, L}(\mathcal{X})$, 若 $S_L(f) \in L^\varphi(\mathcal{X})$; 另外, 定义

$$\|f\|_{H_{\varphi, L}(\mathcal{X})} := \|S_L(f)\|_{L^\varphi(\mathcal{X})} := \inf \left\{ \lambda \in (0, \infty) : \int_{\mathcal{X}} \varphi\left(x, \frac{S_L(f)(x)}{\lambda}\right) d\mu(x) \leq 1 \right\}.$$

Musielak-Orlicz-Hardy 空间 $H_{\varphi, L}(\mathcal{X})$ 定义为 $\tilde{H}_{\varphi, L}(\mathcal{X})$ 关于拟范数 $\|\cdot\|_{H_{\varphi, L}(\mathcal{X})}$ 的完备化.

为了陈述本节主要结果, 下面引进与 L 相关的原子和分子的 Musielak-Orlicz-Hardy 空间.

定义 3.3 设 φ 同定义 3.1, 且 L 满足假设 (H₁) 和 (H₂).

(I) 设 $M \in \mathbb{N}$. 称函数 $\alpha \in L^2(\mathcal{X})$ 为相关于 L 的 (φ, M) -原子, 若存在函数 $b \in \mathcal{D}(L^M)$ 及球 $B \subset \mathcal{X}$ 使得

(i) $\alpha = L^M b$;

(ii) $\operatorname{supp} (L^k b) \subset B$, $k \in \{0, \dots, M\}$;

(iii) $\|(r_B^2 L)^k b\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq r_B^{2M} [\mu(B)]^{1/2} \|\chi_B\|_{L^\varphi(\mathcal{X})}^{-1}$, 这里 $k \in \{0, \dots, M\}$, 且 r_B 表示 B 的半径.

称分布 $f \in [\operatorname{BMO}_{\varphi, L}(\mathcal{X})]^*$ (这里 $\operatorname{BMO}_{\varphi, L}(\mathcal{X})$ 表示 $H_{\varphi, L}(\mathcal{X})$ 的对偶空间, 具体定义见文献 [8]) 属于空间 $H_{\varphi, \operatorname{at}}^M(\mathcal{X})$, 若存在 $\{\lambda_j\}_j \subset \mathbb{C}$ 及一系列 (φ, M) -原子 $\{\alpha_j\}_j$ 使得 $f = \sum_j \lambda_j \alpha_j$ 在 $[\operatorname{BMO}_{\varphi, L}(\mathcal{X})]^*$ 中成立且 $\sum_j \varphi(B_j, |\lambda_j| \|\chi_{B_j}\|_{L^\varphi(\mathcal{X})}^{-1}) < \infty$, 其中, 对每个 j , $\operatorname{supp} \alpha_j \subset B_j$. 另外, 对任意的 $f \in H_{\varphi, \operatorname{at}}^M(\mathcal{X})$, 其拟范数定义为 $\|f\|_{H_{\varphi, \operatorname{at}}^M(\mathcal{X})} := \inf \{\Lambda(\{\lambda_j \alpha_j\}_j)\}$, 这里

$$\Lambda(\{\lambda_j \alpha_j\}_j) := \inf \left\{ \lambda \in (0, \infty) : \sum_j \varphi(B_j, |\lambda_j| \lambda^{-1} \|\chi_{B_j}\|_{L^\varphi(\mathcal{X})}^{-1}) \leq 1 \right\},$$

且下确界取遍 f 的如上所有分解.

(II) 设 $M \in \mathbb{N}$ 及 $\epsilon \in (0, \infty)$. 称 $\beta \in L^2(\mathcal{X})$ 是相关于 L 的 (φ, M, ϵ) - 分子, 若存在函数 $b \in \mathcal{D}(L^M)$ 及球 $B \subset \mathcal{X}$ 使得 (i) $\beta = L^M b$; (ii) 对每个 $k \in \{0, \dots, M\}$ 及 $j \in \mathbb{Z}_+$, $\|(r_B^2 L)^k b\|_{L^2(U_j(B))} \leq 2^{-j\epsilon} r_B^{2M} [\mu(B)]^{1/2} \|\chi_B\|_{L^\varphi(\mathcal{X})}^{-1}$, 这里 r_B 表示 B 的半径, $U_0(B) := B$ 及当 $j \in \mathbb{N}$ 时, $U_j(B) := (2^j B) \setminus (2^{j-1} B)$.

将空间 $H_{\varphi, \text{at}}^M(\mathcal{X})$ 定义中的 (φ, M) - 原子替换为 (φ, M, ϵ) - 分子, 可得到分子空间 $H_{\varphi, \text{mol}}^{M, \epsilon}(\mathcal{X})$ 的定义.

此外, 在 (3.12) 中用 $t\sqrt{L}$ 代替 $t^2 L$, 可以定义与 L 的 Poisson 半群 $\{e^{-t\sqrt{L}}\}_{t>0}$ 相关的 Lusin 面积函数 S_P . 并且通过在定义 3.2 中用 S_P 代替 S_L , 可以引进空间 $H_{\varphi, S_P}(\mathcal{X})$.

对于空间 $H_{\varphi, L}(\mathcal{X})$, 我们有以下的实变特征刻画.

定理 3.1 设算子 L 满足假设 (H₁) 和 (H₂), φ 同定义 3.1 且 $\varphi \in \mathbb{RH}_{2/[2-I(\varphi)]}(\mathcal{X})$, $M \in \mathbb{N}$ 满足 $M > \frac{n}{2}[\frac{q(\varphi)}{i(\varphi)} - \frac{1}{2}]$ 且 $\epsilon \in (n[\frac{q(\varphi)}{i(\varphi)} - \frac{1}{2}], \infty)$, 这里 $I(\varphi)$, n , $i(\varphi)$ 和 $q(\varphi)$ 分别同 (3.4), (3.2), (3.5) 和 (3.10). 则空间 $H_{\varphi, L}(\mathcal{X})$, $H_{\varphi, \text{at}}^M(\mathcal{X})$, $H_{\varphi, \text{mol}}^{M, \epsilon}(\mathcal{X})$ 及 $H_{\varphi, S_P}(\mathcal{X})$ 相等且有等价拟范数.

下面给出空间 $H_{\varphi, L}(\mathcal{X})$ 在算子有界性中的应用. 令 $\lambda \in (0, \infty)$ 且 L 同上. 对任意的 $f \in L^2(\mathcal{X})$, 与 L 相关的 Littlewood-Paley g - 函数 $g_L(f)$ 和 g_λ^* - 函数分别定义为, 对所有的 $x \in \mathcal{X}$,

$$g_L(f)(x) := \left\{ \int_0^\infty |t^2 L e^{-t^2 L} f(x)|^2 \frac{dt}{t} \right\}^{1/2}$$

和

$$g_{\lambda, L}^*(f)(x) := \left\{ \int_0^\infty \int_{\mathcal{X}} \left[\frac{t}{t + d(x, y)} \right]^\lambda |t^2 L e^{-t^2 L} f(y)|^2 \frac{d\mu(y) dt}{V(x, t)t} \right\}^{1/2}.$$

定理 3.2 设 L 和 φ 同定理 3.1.

(i) g_L 是从 $H_{\varphi, L}(\mathcal{X})$ 到 $L^\varphi(\mathcal{X})$ 有界的.

(ii) 设 $\lambda \in ([2nq(\varphi) + NI(\varphi)]/i(\varphi), \infty)$, 这里 n , $q(\varphi)$, N , $I(\varphi)$ 和 $i(\varphi)$ 分别同 (3.2), (3.10), (3.3), (3.4) 和 (3.5). 则 $g_{\lambda, L}^*$ 是从 $H_{\varphi, L}(\mathcal{X})$ 到 $L^\varphi(\mathcal{X})$ 有界的.

作为定理 3.2(ii) 及点态不等式 $S_L(f) \leq g_{\lambda, L}^*(f)$ 的推论, 进一步获得空间 $H_{\varphi, L}(\mathcal{X})$ 的 Littlewood-Paley g_λ^* - 函数特征.

推论 3.1 令 L, φ 和 λ 同定理 3.2. 则 $f \in H_{\varphi, L}(\mathcal{X})$ 当且仅当 $g_{\lambda, L}^*(f) \in L^\varphi(\mathcal{X})$; 另外, $\|f\|_{H_{\varphi, L}(\mathcal{X})} \sim \|g_{\lambda, L}^*(f)\|_{L^\varphi(\mathcal{X})}$ 且隐含常数不依赖于 f .

进一步假设 $\mathcal{X} := \mathbb{R}^n$ 且

$$L := -\Delta + V \quad (3.13)$$

为一个 Schrödinger 算子, 其中 $0 \leq V \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$. 对 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 及 $x \in \mathbb{R}^n$, 令

$$\mathcal{N}_h(f)(x) := \sup_{y \in B(x, t), t \in (0, \infty)} |e^{-t^2 L}(f)(y)|, \quad \mathcal{N}_P(f)(x) := \sup_{y \in B(x, t), t \in (0, \infty)} |e^{-t\sqrt{L}}(f)(y)|,$$

$$\mathcal{R}_h(f)(x) := \sup_{t \in (0, \infty)} |e^{-t^2 L}(f)(x)| \text{ 及 } \mathcal{R}_P(f)(x) := \sup_{t \in (0, \infty)} |e^{-t\sqrt{L}}(f)(x)|.$$

定义 3.4 设 L 和 φ 分别同 (3.13) 和定义 3.1. 称 $f \in H^2(\mathbb{R}^n)$ 属于 $\tilde{H}_{\varphi, \mathcal{N}_h}(\mathbb{R}^n)$, 若 $\mathcal{N}_h(f) \in L^\varphi(\mathbb{R}^n)$; 同时, 令 $\|f\|_{H_{\varphi, \mathcal{N}_h}(\mathbb{R}^n)} := \|\mathcal{N}_h(f)\|_{L^\varphi(\mathbb{R}^n)}$. 则空间 $H_{\varphi, \mathcal{N}_h}(\mathbb{R}^n)$ 定义为集合 $\tilde{H}_{\varphi, \mathcal{N}_h}(\mathbb{R}^n)$ 关于拟范数 $\|\cdot\|_{H_{\varphi, \mathcal{N}_h}(\mathbb{R}^n)}$ 的完备化.

在空间 $H_{\varphi, \mathcal{N}_h}(\mathbb{R}^n)$ 的定义中分别用 $\mathcal{N}_P$, $\mathcal{R}_h$, $\mathcal{R}_P$ 代替 $\mathcal{N}_h$ 便可得到空间 $H_{\varphi, \mathcal{N}_P}(\mathbb{R}^n)$, $H_{\varphi, \mathcal{R}_h}(\mathbb{R}^n)$ 以及 $H_{\varphi, \mathcal{R}_P}(\mathbb{R}^n)$ 的定义.

下面的定理给出了空间 $H_{\varphi,L}(\mathbb{R}^n)$ 的极大函数特征刻画.

定理 3.3 设算子 L 和 φ 分别同 (3.13) 和定义 3.1, 且 $\varphi \in \mathbb{RH}_{2/[2-I(\varphi)]}(\mathbb{R}^n)$, 其中 $I(\varphi)$ 同 (3.4). 则空间 $H_{\varphi,L}(\mathbb{R}^n)$, $H_{\varphi,\mathcal{N}_h}(\mathbb{R}^n)$, $H_{\varphi,\mathcal{N}_P}(\mathbb{R}^n)$, $H_{\varphi,\mathcal{R}_h}(\mathbb{R}^n)$, $H_{\varphi,\mathcal{R}_P}(\mathbb{R}^n)$ 和 $H_{\varphi,S_P}(\mathbb{R}^n)$ 相等且有等价拟范数.

对于相关于 Schrödinger 算子 L 的 Riesz 变换 $\nabla L^{-\frac{1}{2}}$, 我们有如下的有界性结果.

定理 3.4 令 φ 及 L 同定理 3.3. (i) $\nabla L^{-\frac{1}{2}}$ 是从 $H_{\varphi,L}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ 有界的. (ii) 进一步假设 $i(\varphi) \in (\frac{n}{n+1}, 1]$, $q(\varphi) < \frac{(n+1)i(\varphi)}{n}$ 且 $r(\varphi) > \frac{2}{[2-q(\varphi)]}$. 这里 $i(\varphi)$, $q(\varphi)$ 及 $r(\varphi)$ 分别同 (3.5), (3.10) 和 (3.11). 则 $\nabla L^{-\frac{1}{2}}$ 是从 $H_{\varphi,L}(\mathbb{R}^n)$ 到 $H_{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ 有界的, 其中 $H_{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ 表示由 Ky^[22] 引进的 Musielak-Orlicz-Hardy 空间.

注记 3.1 (i) 令 $\varphi(x, t) := \Phi(t)$, $(x, t) \in \mathcal{X} \times [0, \infty)$, 其中 Orlicz 函数 Φ 的上型为 1 且下型为 $p \in (0, 1]$. 若 $\Phi(t) := t$, $t \in [0, \infty)$, 定理 3.1、3.3 及 3.4 在文献 [29] 中获得. 若 Φ 为凹的, 定理 3.1 和 3.4 在文献 [30] 中获得; 若进一步假设存在 $q_1, q_2 \in (0, \infty)$ 使得 $q_1 < 1 < q_2$ 且 $[\Phi(t^{q_2})]^{q_1}$ 为凸, 则定理 3.3 在文献 [30] 中获得. 即使对于如此的函数 φ , 定理 3.2 也是新的.

(ii) 定理 3.1–3.4 的结果是在文献 [8] 中获得的. 此外, 空间 $H_{\varphi,L}(\mathcal{X})$ 与 $\text{BMO}_{\varphi,L}(\mathcal{X})$ 对偶关系, 空间 $\text{BMO}_{\varphi,L}(\mathcal{X})$ 的几个等价特征以及相关于 L 的谱乘子在 $H_{\varphi,L}(\mathcal{X})$ 上的有界性中也在文献 [8] 中获得, 由于篇幅有限, 细节在此略去. 同时, 在博士论文之后, 我们在文献 [9] 中系统地研究了相关于满足强对角估计的算子的 Musielak-Orlicz-Hardy 空间的实变特征. 作为应用, 我们在更弱的条件下获得了定理 3.3 和 3.4 的结论.

(iii) 若 $\mathcal{X} := \mathbb{R}^n$ 且 L 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Laplace 算子, 则空间 $H_{\varphi,L}(\mathbb{R}^n)$ 恰好就是由 Ky^[22] 引进和研究的空间 $H_{\varphi}(\mathbb{R}^n)$. 对于空间 $H_{\varphi}(\mathbb{R}^n)$, 我们在文献 [6] 中获得了其更一般的面积函数特征和分子特征; 作为应用, 进一步获得了 $H_{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间 $\text{BMO}_{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ 的 Carleson 测度特征刻画. 此外, 我们在文献 [7] 中引进了局部 Musielak-Orlicz-Hardy 空间 $h_{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ 且建立了其各种极大函数特征, 原子特征和对偶理论, 以及该空间在局部 Riesz 变换, 局部分数次积分和某些拟微分算子的有界性中的应用. 由于篇幅有限, 在此省略这些内容, 细节参见文献 [6, 7].

在博士论文之后, 我们研究了空间 $H_{\varphi,L}(\mathbb{R}^n)$ 在相关于 L 的二阶 Riesz 变换 VL^{-1} 和 $\nabla^2 L^{-1}$ 的有界性中的应用. 若在 (3.8) 和 (3.9) 中用 $\mathbb{R}^n$ 上非负函数 U 和 $\mathbb{R}^n$ 分别替换 $\varphi(\cdot, t)$ 和 $\mathcal{X}$, 我们便得到通常的逆 Hölder 类 $RH_q(\mathbb{R}^n)$ ($q \in (1, \infty]$) 的定义.

定理 3.5 设 L 和 φ 分别同 (3.13) 和定义 3.1. 进一步假设 $V \in RH_{q_0}(\mathbb{R}^n)$, $q_0 \in [n, \infty)$, $i(\varphi) \in (\frac{n}{n+1}, 1]$ 及 $q(\varphi)[r(\varphi)]' < \frac{n}{nq(\varphi)/i(\varphi)-1}$, 其中 $i(\varphi)$, $q(\varphi)$ 及 $r(\varphi)$ 分别同 (3.5), (3.10) 和 (3.11), 且 $[r(\varphi)]' := r(\varphi)/[r(\varphi)-1]$. 则 VL^{-1} 和 $\nabla^2 L^{-1}$ 在空间 $H_{\varphi,L}(\mathbb{R}^n)$ 上有界. 此外, $\nabla^2 L^{-1}$ 从 $H_{\varphi,L}(\mathbb{R}^n)$ 到 $H_{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ 有界.

注记 3.2 定理 3.5 的结果是在文献 [10] 中获得的. 此外, 关于相关于带磁场的 Schrödinger 算子的二阶 Riesz 变换, 我们也获得了类似的结果; 由于篇幅有限, 在此不详细陈述, 细节参见文献 [11].

4 强 Lipschitz 区域上的 (加权局部) Orlicz-Hardy 空间

4.1 区域上的 Orlicz-Hardy 空间

为了陈述本节的主要结果, 我们首先回顾 $\mathbb{R}^n$ 中强 Lipschitz 区域的定义.

定义 4.1 称 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个强 Lipschitz 区域, 若 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个真的连通开子集, 其边界是由有限段旋转后的 Lipschitz 映射的图像组成, 且这些图像中至多有一段是无界的.

设 φ 同定义 3.1 且对任意的 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$, $\varphi(x, t) = \Phi(t)$. 则 Φ 为 $[0, \infty)$ 上的 Orlicz 函数. 此时, 将 (3.4) 和 (3.5) 中的临界指标 $I(\varphi)$ 和 $i(\varphi)$ 分别记为 p_{Φ}^{+} 和 p_{Φ}^{-} . 此外, 称函数 Φ 是严格下型 p , 如果对所有的 $t \in (0, 1]$ 及 $s \in (0, \infty)$, $\Phi(st) \leq t^p \Phi(s)$, 且定义

$$p_{\Phi} := \sup\{p \in (0, \infty) : \Phi(st) \leq t^p \Phi(s) \text{ 对所有的 } t \in (0, 1] \text{ 及 } s \in (0, \infty) \text{ 成立}\}. \quad (4.1)$$

在本小节中, 我们总假设 Φ 满足下面的假设.

假设 (A) 假设 Φ 是 $[0, \infty)$ 上的 Orlicz 函数, 并且是上型 1 的及其严格临界下型指标 $p_{\Phi} \in (0, 1]$. 同时也假设 Φ 是连续, 严格递增和次可加的.

下面引进强 Lipschitz 区域 Ω 上的“几何化” Orlicz-Hardy 空间 $H_{\Phi, z}(\Omega)$ 和 $H_{\Phi, r}(\Omega)$. 为此, 首先回顾 $\mathbb{R}^n$ 上经典的 Orlicz-Hardy 空间 $H_{\Phi}(\mathbb{R}^n)$. 用 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 分别表示 $\mathbb{R}^n$ 上所有 Schwartz 函数的全体及其对偶空间. 对任意的 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 用 $\mathcal{G}(f)$ 表示其主极大函数.

定义 4.2 令 Φ 是一个 Orlicz 函数且 $p_{\Phi}^{+}, p_{\Phi}^{-} \in (0, 1]$. 则 Orlicz-Hardy 空间 $H_{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$H_{\Phi}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathcal{G}(f)(x)) dx < \infty \right\}$$

且

$$\|f\|_{H_{\Phi}(\mathbb{R}^n)} := \inf \left\{ \lambda \in (0, \infty) : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{\mathcal{G}(f)(x)}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}.$$

受文献 [18] 的启发, 我们通过以下方式引进强 Lipschitz 区域上的 Orlicz-Hardy 空间. 用 $\mathcal{D}(\Omega)$ 表示所有无穷次可微且紧支在 Ω 上的函数组成的空间, 及用 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 表示其对偶空间.

定义 4.3 令 Φ 同定义 4.2, 且 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个真开集.

(i) Orlicz-Hardy 空间 $H_{\Phi, z}(\Omega)$ 定义为 $H_{\Phi, z}(\Omega) := \{f \in H_{\Phi}(\mathbb{R}^n) : f = 0 \text{ 在 } (\overline{\Omega})^c\} / \{f \in H_{\Phi}(\mathbb{R}^n) : f = 0 \text{ 在 } \Omega\}$, 其中 $(\overline{\Omega})^c := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. 另外, $H_{\Phi, z}(\Omega)$ 中元素的拟范数定义为商范数, 即对任意的 $f \in H_{\Phi, z}(\Omega)$, $\|f\|_{H_{\Phi, z}(\Omega)} := \inf\{\|F\|_{H_{\Phi}(\mathbb{R}^n)} : F \in H_{\Phi}(\mathbb{R}^n), F = 0 \text{ 在 } (\overline{\Omega})^c \text{ 上, 且 } F|_{\Omega} = f\}$, 其中下确界取遍所有满足 $F = f$ 在 Ω 上且 $F = 0$ 在 $(\overline{\Omega})^c$ 上的 $F \in H_{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ 的全体.

(ii) 称分布 $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 属于 Orlicz-Hardy 空间 $H_{\Phi, r}(\Omega)$, 若 f 是某个 $F \in H_{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ 在 Ω 上的限制; 即 $H_{\Phi, r}(\Omega) := \{f \in \mathcal{D}'(\Omega) : \text{存在 } F \in H_{\Phi}(\mathbb{R}^n) \text{ 使得 } F|_{\Omega} = f\}$. 另外, 对所有的 $f \in H_{\Phi, r}(\Omega)$, 其拟范数定义为 $\|f\|_{H_{\Phi, r}(\Omega)} := \inf\{\|F\|_{H_{\Phi}(\mathbb{R}^n)} : F \in H_{\Phi}(\mathbb{R}^n) \text{ 且 } F|_{\Omega} = f\}$, 其中下确界取遍所有满足 $F = f$ 在 Ω 上的 $F \in H_{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ 的全体.

下面我们描述本节所考虑的散度型椭圆算子. 为此, 回顾一些概念和记号. 用 $W^{1,2}(\Omega)$ 来表示 Ω 上的 Sobolev 空间, $W_0^{1,2}(\Omega)$ 表示 $C_c^{\infty}(\Omega)$ 在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中的闭包. 另外, 假设复值矩阵 A 满足椭圆条件: 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 及 $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\|A\|_{\infty} \leq \delta^{-1}$ 且 $\Re(A(x)\xi \cdot \xi) \geq \delta|\xi|^2$. 这里 $\delta \in (0, 1]$, $\Re(A(x)\xi \cdot \xi)$ 表示 $A(x)\xi \cdot \xi$ 的实部.

设 V 是 $W^{1,2}(\Omega)$ 的一个包含 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 的闭子空间, 用 L 表示 $L^2(\Omega)$ 上具有定义域 $D(L) \subset V$ 的极大增殖算子, 即对任意的 $f \in D(L)$ 及 $g \in V$,

$$\langle Lf, g \rangle := \int_{\Omega} A(x) \nabla f(x) \cdot \overline{\nabla g(x)} dx, \quad (4.2)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $L^2(\Omega)$ 中的内积. 在该意义下, 对所有的 $f \in D(L)$, 形式地有

$$Lf := -\operatorname{div}(A \nabla f). \quad (4.3)$$

现在我们回顾 L 的 Dirichlet 和 Neumann 边界条件.

定义 4.4 假设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^n$ 中的一个强 Lipschitz 区域, 且算子 L 同 (4.3). 称 L 满足 Dirichlet 边界条件 (简记为 DBC), 若在 (4.2) 中 $V := W_0^{1,2}(\Omega)$; 称算子 L 满足 Neumann 边界条件 (简记为 NBC), 若在 (4.2) 中 $V := W^{1,2}(\Omega)$.

容易看到, 若 $\Omega := \mathbb{R}^n$, 则 $W_0^{1,2}(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. 因此, 此时 DBC 和 NBC 是等同的.

此外, 我们总假设 L 满足如下的 Gaussian 性质.

定义 4.5 令 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^n$ 中的一个强 Lipschitz 区域且 L 同 (4.3). 分别用 $\{e^{-tL}\}_{t>0}$ 和 $\{K_t\}_{t>0}$ 表示 L 的热半群及其热核. 令 $\beta \in (0, \infty]$. 称 $\{e^{-tL}\}_{t>0}$ 具有 Gaussian 性质 (G_β) , 若下面的 (i) 和 (ii) 成立:

- (i) 存在正常数 C 和 α 使得, 对任意的 $t \in (0, \beta)$ 及 $x, y \in \Omega$, $|K_t(x, y)| \leq \frac{C}{t^{n/2}} e^{-\alpha \frac{|x-y|^2}{t}}$.
- (ii) 存在正常数 C 及 $\mu \in (0, 1]$ 使得, 对任意的 $t \in (0, \beta)$ 及 $x, y_1, y_2 \in \Omega$,

$$|K_t(x, y_1) - K_t(x, y_2)| + |K_t(y_1, x) - K_t(y_2, x)| \leq \frac{C}{t^{n/2}} \frac{|y_1 - y_2|^\mu}{t^{\mu/2}}.$$

值得指出的是, 若 L 有实系数且 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Lipschitz 区域, 除了 Ω 有界且 L 带 Neumann 边界条件的情形, 其他情形下 (G_∞) 总是成立 (例如, 参见文献 [2,3,19]).

定义 4.6 令 Φ 满足假设 (A), Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^n$ 中的一个强 Lipschitz 区域, 且算子 L 如同 (4.3). 对函数 $f \in L^2(\Omega)$ 及 $x \in \Omega$, 令

$$\mathcal{N}_P(f)(x) := \sup_{y \in \Omega, t \in (0, 2\text{diam}(\Omega)), |y-x| < t} |e^{-t\sqrt{L}}(f)(y)|,$$

其中 $\text{diam}(\Omega) := \sup\{|x-y| : x, y \in \Omega\}$. 称函数 $f \in L^2(\Omega)$ 属于 $\tilde{H}_{\Phi, \mathcal{N}_P}(\Omega)$, 若 $\mathcal{N}_P(f) \in L^\Phi(\Omega)$; 定义 $\|f\|_{H_{\Phi, \mathcal{N}_P}(\Omega)} := \|\mathcal{N}_P(f)\|_{L^\Phi(\Omega)}$. 则 Orlicz-Hardy 空间 $H_{\Phi, \mathcal{N}_P}(\Omega)$ 定义为集合 $\tilde{H}_{\Phi, \mathcal{N}_P}(\Omega)$ 关于拟范数 $\|\cdot\|_{H_{\Phi, \mathcal{N}_P}(\Omega)}$ 的完备化.

此外, 对 $f \in L^2(\Omega)$ 及 $x \in \Omega$, 相关于 $\{e^{-tL}\}_{t>0}$ 的非切极大函数 $\mathcal{N}_h(f)$ 和径向极大函数 $\mathcal{R}_h(f)$ 分别定义为

$$\mathcal{N}_h(f)(x) := \sup_{y \in \Omega, t \in (0, 2\text{diam}(\Omega)), |y-x| < t} |e^{-t^2 L}(f)(y)| \quad (4.4)$$

和 $\mathcal{R}_h(f)(x) := \sup_{t \in (0, 2\text{diam}(\Omega))} |e^{-t^2 L}(f)(x)|$.

用 $Q(x, t)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以 x 为中心以 t 为边长的闭方体. 对 $f \in L^2(\Omega)$ 及 $x \in \Omega$, L 的相关于 Poisson 半群 $\{e^{-t\sqrt{L}}\}_{t>0}$ 的 Lusin 面积函数 S_P 定义为

$$S_P(f)(x) := \left\{ \int_{\Gamma(x)} |t\sqrt{L}e^{-t\sqrt{L}}(f)(y)|^2 \frac{dy dt}{t|Q(x, t) \cap \Omega|} \right\}^{1/2},$$

其中 $\Gamma(x) := \{(y, t) \in \Omega \times (0, 2\text{diam}(\Omega)) : |y-x| < t\}$. 类似地, 用 $t^2 L e^{-t^2 L}$ 代替 $t\sqrt{L}e^{-t\sqrt{L}}$ 便得到相关于 $\{e^{-tL}\}_{t>0}$ 的 Lusin 面积函数 S_h 的定义.

定义 4.7 令 Φ 满足假设 (A), Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^n$ 中的一个强 Lipschitz 区域, 且 L 同 (4.3). 假设 L 生成的半群满足 Gaussian 性质 $(G_{\text{diam}(\Omega)})$.

(i) 称函数 $f \in L^2(\Omega)$ 属于 $\tilde{H}_{\Phi, S_P}(\Omega)$, 若 $S_P(f) \in L^\Phi(\Omega)$; 定义 $\|f\|_{H_{\Phi, S_P}(\Omega)} := \|S_P(f)\|_{L^\Phi(\Omega)}$. Orlicz-Hardy 空间 $H_{\Phi, S_P}(\Omega)$ 定义为 $\tilde{H}_{\Phi, S_P}(\Omega)$ 关于拟范数 $\|\cdot\|_{H_{\Phi, S_P}(\Omega)}$ 的完备化.

类似地, 通过在空间 $H_{\Phi, S_P}(\Omega)$ 的定义中用 $\mathcal{N}_h$, $\mathcal{R}_h$ 和 S_h 分别代替 S_P , 可以定义 Orlicz-Hardy 空间 $H_{\Phi, \mathcal{N}_h}(\Omega)$, $H_{\Phi, \mathcal{R}_h}(\Omega)$ 和 $H_{\Phi, S_h}(\Omega)$.

(ii) 若 Ω 是有界的, 称函数 $f \in L^2(\Omega)$ 属于 $\tilde{H}_{\Phi, S_P, d_\Omega}(\Omega)$, 若 $S_P(f) \in L^\Phi(\Omega)$; 另外, 定义

$$\|f\|_{H_{\Phi, S_P, d_\Omega}(\Omega)} := \|S_P(f)\|_{L^\Phi(\Omega)} + \inf \left\{ \lambda \in (0, \infty) : \Phi \left(\frac{\|e^{-d_\Omega \sqrt{L}}(f)\|_{L^1(\Omega)}}{\lambda} \right) \leq 1 \right\},$$

其中 $d_\Omega := 2\text{diam}(\Omega)$. 空间 $H_{\Phi, S_P, d_\Omega}(\Omega)$ 定义为 $\tilde{H}_{\Phi, S_P, d_\Omega}(\Omega)$ 关于拟范数 $\|\cdot\|_{H_{\Phi, S_P, d_\Omega}(\Omega)}$ 的完备化.

另外, 通过在 $H_{\Phi, S_P, d_\Omega}(\Omega)$ 的定义中用 S_h 和 $e^{-d_\Omega^2 L}(f)$ 分别代替 S_P 和 $e^{-d_\Omega \sqrt{L}}(f)$ 可以定义 Orlicz-Hardy 空间 $H_{\Phi, S_h, d_\Omega}(\Omega)$.

用 Ω^c 表示 Ω 在 $\mathbb{R}^n$ 中的余集. 本小节的主要结果如下.

定理 4.1 令 Φ 满足假设 (A) 且 $p_\Phi \in (\frac{n}{n+\mu}, 1]$, 其中 μ 同定义 4.5, 及 L 同 (4.3). 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^n$ 中的一个强 Lipschitz 区域, 且 L 的热半群满足 Gaussian 性质 ($G_{\text{diam}(\Omega)}$).

(i) 若 $\Omega := \mathbb{R}^n$, 则空间 $H_\Phi(\mathbb{R}^n)$, $H_{\Phi, \mathcal{N}_P}(\mathbb{R}^n)$, $H_{\Phi, S_P}(\mathbb{R}^n)$, $H_{\Phi, \mathcal{N}_h}(\mathbb{R}^n)$, $H_{\Phi, \mathcal{R}_h}(\mathbb{R}^n)$ 及 $H_{\Phi, S_h}(\mathbb{R}^n)$ 相等且有等价拟范数.

(ii) 若 L 满足 NBC 且 Ω 是无界的, 则空间 $H_{\Phi, z}(\Omega)$, $H_{\Phi, \mathcal{N}_P}(\Omega)$, $H_{\Phi, S_P}(\Omega)$, $H_{\Phi, \mathcal{N}_h}(\Omega)$, $H_{\Phi, \mathcal{R}_h}(\Omega)$ 以及 $H_{\Phi, S_h}(\Omega)$ 相等且有等价拟范数.

(iii) 假设 L 满足 DBC 且 Ω^c 无界. 若 Ω 无界, 则空间 $H_{\Phi, r}(\Omega)$, $H_{\Phi, \mathcal{N}_h}(\Omega)$, $H_{\Phi, \mathcal{R}_h}(\Omega)$ 及 $H_{\Phi, S_h}(\Omega)$ 相等且有等价拟范数. 若 Ω 有界, 则空间 $H_{\Phi, r}(\Omega)$, $H_{\Phi, \mathcal{N}_h}(\Omega)$, $H_{\Phi, \mathcal{R}_h}(\Omega)$ 及 $H_{\Phi, S_h, d_\Omega}(\Omega)$ 相等且有等价拟范数. 另外, 若进一步, $n \geq 3$ 且 (G_∞) 成立, 则空间 $H_{\Phi, S_h, d_\Omega}(\Omega)$ 及 $H_{\Phi, S_h}(\Omega)$ 相等且有等价拟范数.

注记 4.1 (i) 定理 4.1 的 (i) 和 (ii) 是在文献 [2] 中获得的, 而 (iii) 是在 [3] 中得到的.

(ii) 令 $\Phi(t) := t$, $t \in [0, \infty)$. 此时定理 4.1(i) 中 $H_\Phi(\mathbb{R}^n)$, $H_{\Phi, \mathcal{N}_P}(\mathbb{R}^n)$, $H_{\Phi, S_P}(\mathbb{R}^n)$, $H_{\Phi, \mathcal{N}_h}(\mathbb{R}^n)$ 以及 $H_{\Phi, \mathcal{R}_h}(\mathbb{R}^n)$ 的等价性, (ii) 中 $H_{\Phi, z}(\Omega)$, $H_{\Phi, \mathcal{N}_P}(\Omega)$, $H_{\Phi, S_P}(\Omega)$, $H_{\Phi, \mathcal{N}_h}(\Omega)$ 以及 $H_{\Phi, \mathcal{R}_h}(\Omega)$ 的等价性, 和 (iii) 中 $H_{\Phi, r}(\Omega)$, $H_{\Phi, \mathcal{N}_h}(\Omega)$ 以及 $H_{\Phi, \mathcal{R}_h}(\Omega)$ 的等价性是在文献 [19] 中获得的; 而定理 4.1 中其他空间的等价性即使在该情形下也是新的.

(iii) 值得指出的是, 本文中证明定理 4.1 的方法不同于文献 [19] 中的方法. 具体地, 文献 [19] 中的方法仅仅对空间 H^1 有效, 然而对于 H_Φ 当 $p_\Phi < 1$ 时其不再可行 (细节参见文献 [2,3]).

4.2 区域上的加权局部 Orlicz-Hardy 空间及其应用

下面我们陈述本文关于强 Lipschitz 区域上加权局部 Orlicz-Hardy 空间的结果.

首先回顾到, 若定义 3.1 中的 $\mathcal{X} := \mathbb{R}^n$ 及 $\varphi := \omega$, 其中 ω 为 $\mathbb{R}^n$ 上的非负局部可积函数, 则一致权类 $A_\infty(\mathbb{R}^n)$ 和逆 Hölder 类 $\mathbb{RH}_q(\mathbb{R}^n)$ 分别为经典的 Muckenhoupt 权类 $A_\infty(\mathbb{R}^n)$ 和逆 Hölder 类 $\mathbb{RH}_q(\mathbb{R}^n)$. 此时, 对于 $\omega \in A_\infty(\mathbb{R}^n)$, 用 q_ω 和 r_ω 分别表示临界指标 $q(\varphi)$ 和 $r(\varphi)$.

在本小节, 我们假设 Orlicz 函数 Φ 满足假设 (A) 且为凹的, $\omega \in A_\infty(\mathbb{R}^n)$. 设 $h_\omega^\Phi(\mathbb{R}^n)$ 为文献 [4] 中引进的加权局部 Orlicz-Hardy 空间.

注记 4.2 对于 $\mathbb{R}^n$ 上的非负局部可积函数 ω , 若在 (3.6) 和 (3.7) 中分别用 ω 和 $\sup_{B \subset \mathbb{R}^n, r_B \in (0, 1]} \varphi(\cdot, t)$ 和 $\sup_{B \subset \mathcal{X}}$, 便得到局部权类 $A_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 的定义. 令 Φ 满足假设 (A) 且为凹的, 及 $w \in A_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. 在文献 [4] 中, 我们获得了加权局部 Orlicz-Hardy 空间 $h_\omega^\Phi(\mathbb{R}^n)$ 的各种极大函数特征, 原子特征及对偶理论. 同时, 也得到了局部 Riesz 变换, 局部分数次积分及某些拟微分算子在空间 $h_\omega^\Phi(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性. 由于篇幅有限, 这些内容在此省略, 细节参见文献 [4].

定义 4.8 设 $\omega \in A_\infty(\mathbb{R}^n)$, $h_\omega^\Phi(\mathbb{R}^n)$ 为加权局部 Orlicz-Hardy 空间, Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的强 Lipschitz 区域.

(i) 在定义 4.3 中, 用 $h_\omega^\Phi(\mathbb{R}^n)$ 代替 $H_\Phi(\mathbb{R}^n)$ 可得到加权局部空间 $h_{\omega, z}^\Phi(\Omega)$ 和 $h_{\omega, r}^\Phi(\Omega)$ 的定义.

(ii) 用 $t \in (0, 1]$ 和 $\Gamma^{\text{loc}}(x) := \{(y, t) \in \Omega \times (0, 1] : |y - x| < t\}$ 分别代替 (4.4) 和面积函数 S_h 的定义中的 $t \in (0, 2\text{diam}(\Omega))$ 和 $\Gamma(x)$, 便得到局部的非切极大函数 $\mathcal{N}_h^{\text{loc}}(f)$ 和面积函数 $S_h^{\text{loc}}(f)$ 的定义. 进一步, 类似于空间 $H_{\Phi, \mathcal{N}_h}(\Omega)$ 和 $H_{\Phi, S_h}(\Omega)$ 的定义, 可以定义加权局部 Orlicz-Hardy 空间 $h_{\mathcal{N}_h, \omega}^{\Phi}(\Omega)$ 和 $h_{S_h, \omega}^{\Phi}(\Omega)$ (详细定义可参见文献 [5]).

对于空间 $h_{\omega}^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, $h_{\omega, r}^{\Phi}(\Omega)$ 和 $h_{\omega, z}^{\Phi}(\Omega)$, 我们获得了其非切极大函数特征和 Lusin 面积函数特征.

定理 4.2 令 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^n$ 中的强 Lipschitz 区域, L 同 (4.3), $\omega \in A_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 及 Φ 满足假设 (A) 且为凹的. 假设 q_{ω} , r_{ω} , μ , p_{Φ}^{+} 及 p_{Φ}^{-} 满足 $q_{\omega}/p_{\Phi}^{-} < (n + \mu)/n$, $2q_{\omega}/p_{\Phi}^{-} < (n + 1)/n + (r_{\omega} - 1)/p_{\Phi}^{+}r_{\omega}$ 以及 $r_{\omega} > 2/(2 - q_{\omega})$, 且 L 生成的半群满足 Gaussian 性质 (G_1).

(i) 若 $\Omega := \mathbb{R}^n$, 则空间 $h_{\omega}^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, $h_{\mathcal{N}_h, \omega}^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ 及 $h_{S_h, \omega}^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ 相等且有等价拟范数.

(ii) 若 L 满足 DBC 且 Ω^{c} 无界, 则空间 $h_{\omega, r}^{\Phi}(\Omega)$, $h_{\mathcal{N}_h, \omega}^{\Phi}(\Omega)$ 及 $h_{S_h, \omega}^{\Phi}(\Omega)$ 相等且有等价拟范数.

(iii) 若 L 满足 NBC, 则空间 $h_{\omega, z}^{\Phi}(\Omega)$, $h_{\mathcal{N}_h, \omega}^{\Phi}(\Omega)$ 及 $h_{S_h, \omega}^{\Phi}(\Omega)$ 相等且有等价拟范数.

下面我们给出空间 $h_{\omega, r}^{\Phi}(\Omega)$ 和 $h_{\omega, z}^{\Phi}(\Omega)$ 在有界区域上边值问题的正则性中的应用. 首先回顾非齐次 Dirichlet 和 Neumann 边值问题. 对于给定的 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开子集 Ω 及 $f \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, 用 $\mathbb{G}_D(f)$ 表示非齐次 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.5)$$

在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的唯一解, 且将 $\mathbb{G}_D$ 称为 Dirichlet-Green 算子. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开子集 Ω 及 $f \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, 用 $\mathbb{G}_N(f)$ 表示非齐次 Neumann 问题

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \partial_{\nu} u = 0, & \text{在 } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.6)$$

在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中的解, 这里假设 $\int_{\Omega} f(x) dx = 0$, 并且解函数满足 $\int_{\Omega} u(x) dx = 0$, $\nu(x)$ 表示在 $x \in \partial\Omega$ 点关于边界 $\partial\Omega$ 的规范单位外法向, 且 $\partial_{\nu} := \nabla \cdot \nu$ 表示方向导数.

定理 4.3 令 Φ 和 ω 同定理 4.2. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界的单连通半凸区域 (具体定义参见文献 [5, 28]), 且 $\mathbb{G}_D$ 为相应于 (4.5) 的 Dirichlet-Green 算子. 则最初定义在 $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ 上的算子 $\nabla^2 \mathbb{G}_D$, 可延拓为从空间 $h_{\omega, r}^{\Phi}(\Omega)$ 到 $L_{\omega}^{\Phi}(\Omega)$ 或 $h_{\omega, r}^{\Phi}(\Omega)$ 的有界线性算子.

定理 4.4 令 Φ 和 ω 同定理 4.2. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界的单连通凸区域 (具体定义参见文献 [5, 28]), 且 $\mathbb{G}_N$ 为相应于 (4.6) 的 Neumann-Green 算子. 则最初定义在 $\{f \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) : \int_{\Omega} f(x) dx = 0\}$ 上的算子 $\nabla^2 \mathbb{G}_N$, 可延拓为从空间 $h_{\omega, z}^{\Phi}(\Omega)$ 到 $L_{\omega}^{\Phi}(\Omega)$ 或 $h_{\omega, r}^{\Phi}(\Omega)$ 的有界线性算子.

注记 4.3 (i) 定理 4.2-4.4 是在文献 [5] 中获得的.

(ii) 令 $\Phi(t) := t$, $t \in [0, \infty)$, 及 $\omega \equiv 1$. 此时定理 4.2 中空间 $h_{\omega}^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ 和 $h_{\mathcal{N}_h, \omega}^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ 的等价性, 空间 $h_{\omega, r}^{\Phi}(\Omega)$ 和 $h_{\mathcal{N}_h, \omega}^{\Phi}(\Omega)$ 的等价性, 及空间 $h_{\omega, z}^{\Phi}(\Omega)$ 和 $h_{\mathcal{N}_h, \omega}^{\Phi}(\Omega)$ 的等价性是在文献 [19] 中获得的; 而定理 4.2 中其他空间的等价性即使在该情形下也是新的.

(iii) 令 $p \in (n/(n + 1), 1]$. 若 $\Phi(t) := t^p$, $t \in [0, \infty)$ 且 $\omega \equiv 1$, 则定理 4.3 和 4.4 在文献 [31] 中得到.

致谢 作者借此机会衷心感谢导师杨大春教授多年来的悉心指导和帮助. 同时也感谢美国 Georgetown 大学 Der-Chen Chang 教授的帮助. 本文的主要结果是和他们合作完成的.

参考文献

- 1 杨四辈. 关于几类微分算子的 (Musielak-)Orlicz 型 Hardy 空间及其应用. 博士学位论文. 北京: 北京师范大学, 2013
- 2 Yang D C, Yang S B. Orlicz-Hardy spaces associated with divergence operators on unbounded strongly Lipschitz domains of $\mathbb{R}^n$. *Indiana Univ Math J*, 2012, 61: 81–129
- 3 Yang D C, Yang S B. Real-variable characterizations of Orlicz-Hardy spaces on strongly Lipschitz domains of $\mathbb{R}^n$. *Rev Mat Iberoamericana*, 2013, 29: 237–292
- 4 Yang D C, Yang S B. Weighted local Orlicz-Hardy spaces with applications to pseudo-differential operators. *Dissertationes Math (Rozprawy Mat)*, 2011, 478: 1–78
- 5 Cao J, Chang D-C, Yang D C, et al. Weighted local Orlicz-Hardy spaces on domains and their applications in inhomogeneous Dirichlet and Neumann problems. *Trans Amer Math Soc*, 2013, 365: 4729–4809
- 6 Hou S X, Yang D C, Yang S B. Lusin area function and molecular characterizations of Musielak-Orlicz Hardy spaces and their applications. *Commun Contemp Math*, 2013, 15: 1350029
- 7 Yang D C, Yang S B. Local Hardy spaces of Musielak-Orlicz type and their applications. *Sci China Math*, 2012, 55: 1677–1720
- 8 Yang D C, Yang S B. Musielak-Orlicz-Hardy spaces associated with operators and their applications. *J Geom Anal*, 2014, 24: 495–570
- 9 Bui T A, Cao J, Ky L D, et al. Musielak-Orlicz-Hardy spaces associated with operators satisfying reinforced off-diagonal estimates. *Anal Geom Metr Spaces*, 2013, 1: 69–129
- 10 Cao J, Chang D-C, Yang D C, et al. Boundedness of second order Riesz transforms associated to Schrödinger operators on Musielak-Orlicz-Hardy spaces. *Commun Pure Appl Anal*, 2014, 13: 1435–1463
- 11 Cao J, Chang D-C, Yang D C, et al. Estimates for second order Riesz transforms associated with magnetic Schrödinger operators on Musielak-Orlicz-Hardy spaces. *Appl Anal*, 2014, 93: 2519–2545
- 12 Stein E M, Weiss G. On the theory of harmonic functions of several variables, I: The theory of H^p -spaces. *Acta Math*, 1960, 103: 25–62
- 13 Fefferman C, Stein E M. H^p spaces of several variables. *Acta Math*, 1972, 129: 137–193
- 14 Coifman R R. A real variable characterization of H^p . *Studia Math*, 1974, 51: 269–274
- 15 Latter R H. A characterization of $H^p(\mathbb{R}^n)$ in terms of atoms. *Studia Math*, 1978, 62: 93–101
- 16 Goldberg D. A local version of real Hardy spaces. *Duke Math J*, 1979, 46: 27–42
- 17 Strömberg J-O, Torchinsky A. Weighted Hardy Spaces. *Lecture Notes in Math* 1381. Berlin: Springer-Verlag, 1989
- 18 Chang D-C, Krantz S G, Stein E M. H^p theory on a smooth domain in R^N and elliptic boundary value problems. *J Funct Anal*, 1993, 114: 286–347
- 19 Auscher P, Russ E. Hardy spaces and divergence operators on strongly Lipschitz domains of $\mathbb{R}^n$. *J Funct Anal*, 2003, 201: 148–184
- 20 Orlicz W. Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B. *Bull Inst Acad Pol Ser A*, 1932, 8: 207–220
- 21 Strömberg J-O. Bounded mean oscillation with Orlicz norms and duality of Hardy spaces. *Indiana Univ Math J*, 1979, 28: 511–544
- 22 Ky L D. New Hardy spaces of Musielak-Orlicz type and boundedness of sublinear operators. *Integral Equations Operator Theory*, 2014, 78: 115–150
- 23 Hofmann S, Mayboroda S. Hardy and BMO spaces associated to divergence form elliptic operators. *Math Ann*, 2009, 344: 37–116
- 24 Jiang R J, Yang D C. New Orlicz-Hardy spaces associated with divergence form elliptic operators. *J Funct Anal*, 2010, 258: 1167–1224
- 25 Duong X T, Yan L. Duality of Hardy and BMO spaces associated with operators with heat kernel bounds. *J Amer Math Soc*, 2005, 18: 943–973
- 26 Gong R M, Li J, Yan L X. A local version of Hardy spaces associated with operators on metric spaces. *Sci China Math*, 2013, 56: 315–330
- 27 Cao J, Yang D C. Hardy spaces $H_L^p(\mathbb{R}^n)$ associated with operators satisfying k -Davies-Gaffney estimates. *Sci China Math*, 2012, 55: 1403–1440
- 28 Liang Y Y, Yang D C, Yang S B. Applications of Orlicz-Hardy spaces associated with operators satisfying Poisson estimates. *Sci China Math*, 2011, 54: 2395–2426
- 29 Hofmann S, Lu G Z, Mitrea D, et al. Hardy spaces associated to non-negative self-adjoint operators satisfying Davies-Gaffney estimates. *Mem Amer Math Soc*, 2011, 1007: 1–84

- 30 Jiang R J, Yang D C. Orlicz-Hardy spaces associated with operators satisfying Davies-Gaffney estimates. *Commun Contemp Math*, 2011, 13: 331–373
- 31 Duong X T, Hofmann S, Mitrea D, et al. Hardy spaces and regularity for the inhomogeneous Dirichlet and Neumann problems. *Rev Mat Iberoamericana*, 2013, 29: 183–236
- 32 Jiang R J, Yang D C, Zhou Y. Orlicz-Hardy spaces associated with operators. *Sci China Ser A*, 2009, 52: 1042–1080

Real-variable theory of (Musielak-)Orlicz-Hardy spaces associated with differential operators and its applications

YANG SiBei

Abstract As is well-known, because of their important applications in several branches of mathematics, such as harmonic analysis and partial differential equations, the theory of Calderón-Zygmund singular integral operators and the real-variable theory of various function spaces, which could characterize the boundedness of those operators, turn into one of the main contents of modern harmonic analysis. However, the real-variable theory of classical function spaces has been no longer suitable for characterizing the boundedness of singular integral operators associated with some more general differential operators than Laplace operators. Thus, for different operators, it has become one of the very active research fields of harmonic analysis in recent years to develop the real-variable theory of function spaces, which are suitable to those operators and could characterize the boundedness of singular integral operators associated with those operators. In this article, we study the real-variable theory of (Musielak-)Orlicz-Hardy spaces associated with some differential operators, including second-order divergence form elliptic operators and Schrödinger operators as special cases, on n -dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^n$, strongly domains of $\mathbb{R}^n$ or metric spaces with doubling measure, and its applications to the boundedness of operators.

Keywords Hardy-type space, elliptic operator, nonnegative self-adjoint operator, Schrödinger operator, strongly Lipschitz domain, Musielak-Orlicz function

MSC(2010) 42B35, 42B30, 42B20

doi: 10.1360/N012014-00164

杨四辈, 2008 年获北京师范大学理学学士学位, 2013 年获北京师范大学理学博士学位. 2013 年 7 月起在兰州大学数学与统计学院工作. 曾获 2012 年度教育部“博士研究生学术新人奖”. 研究方向包括函数空间及其应用, 调和分析.

杨大春教授, 1992 年获北京师范大学理学博士学位. 现为北京师范大学博士生导师, 二级教授. 2004 年获国家杰出青年科学基金, 2007 年被北京师范大学聘为教育部“长江学者”. 1999 年获在日本举办的“国际分析、计算及其应用协会”第二届大会“数学杰出研究成就奖”, 2000 年及 2005 年获德国洪堡基金, 2003 年获教育部提名国家科学技术奖自然科学奖二等奖. 研究方向包括函数空间及其应用, 调和分析.