随机采样下随机微分方程 Milstein 方法的渐近误差

陈颖瑜^{①*}, 张立新^{①②}

① 浙江大学数学系, 杭州 310027;

② 浙江大学城市学院, 杭州 310027

E-mail: chenyingyu@zju.edu.cn, stazlx@zju.edu.cn

收稿日期: 2014-04-28; 接受日期: 2014-06-23; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11225104) 和中央高校基本科研业务费资助项目

摘要 随机微分方程数值解的误差问题在度量离散化对冲的金融风险方面有着重要的应用. 众所周知, 等距采样下 Itô 型随机微分方程的 Euler 方法的收敛速度为 $\frac{1}{\sqrt{n}}$, 而 Milstein 方法是 Euler 方法的一种修正, 可以将收敛速度提高到 $\frac{1}{n}$, 非等距、随机采样在一定程度上也能提高收敛速度. 本文给出在非等距、随机采样下由一系列连续局部鞅驱动的随机微分方程的 Milstein 方法的误差过程的渐近 (弱收敛) 结果.

关键词 Milstein 方法 随机采样时间 平稳收敛 好性

MSC (2010) 主题分类 60F05, 60H05, 60J60

1 引言

我们考虑一般的 q 维随机微分方程 (SDE)

$$X_t = x_0 + \int_0^t f(X_s) dY_s, \quad (1.1)$$

其中 $Y \in \mathbb{R}^d$ 是时间区间 $[0, 1]$ 上的 d 维连续局部鞅, f 表示从 $\mathbb{R}^q$ 映射到 $\mathbb{R}^q \otimes \mathbb{R}^d$ 上的函数矩阵. 令 W 为多维 Brown 运动, 当函数矩阵 $f = (a, b)$, $dY_t = (dW_t, dt)^*$ 时, (1.1) 具有经典的 Itô 型随机微分方程形式

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(X_s) dW_s + \int_0^t b(X_s) ds. \quad (1.2)$$

在实际应用中, 由于模拟带来的困难, 常常结合数值解 X^n 和 Monte Carlo 方法去解多维 SDE (1.1). 此外, 数值解的误差问题在度量离散化对冲下的金融风险方面有着重要的应用.

连续型 Euler 方法是解 SDE (1.1) 比较常见的一种的数值方法, 其解 $\tilde{X}^n$ 可以表示成

$$\tilde{X}_t^n = \tilde{X}_{n(t)}^n + f(\tilde{X}_{n(t)}^n)(Y_t - Y_{n(t)}), \quad \tilde{X}_0^n = x_0,$$

其中 $n(t) = k/n$, 若 $k/n \leq t < (k+1)/n$. 已经有很多作者研究了在不同的函数矩阵和驱动过程下 Euler 方法的收敛判断标准和收敛速度. Kurtz 和 Protter^[1] 建立了 SDE (1.2) 的 Euler 方法的误差分

英文引用格式: Chen Y Y, Zhang L X. Asymptotic error for the Milstein scheme for SDEs with stochastic evaluation times (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 287–300, doi: 10.1360/012015-9

布. 对于 SDE (1.2), Kohatsu-Higa 和 Protter^[2], Protter 和 Talay^[3], Wang^[4] 分别研究了由半鞅、Lévy 过程和 Itô 半鞅驱动的随机微分方程的 Euler 方法. Jacod 和 Protter^[5] 系统全面地分析了普通半鞅驱动的随机微分方程的 Euler 方法. 本文给出驱动过程为连续鞅或满足一些比较弱的条件的连续半鞅时, 误差过程的渐近分布和收敛速度为 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的充分必要条件, 同时也考虑由特殊的非连续过程 (如不含有 Brown 运动的 Lévy 过程) 驱动的随机微分方程 Euler 方法逼近误差的极限分布. Yan^[6] 得到了当 f 不满足 Lipschitz 条件时的收敛速度.

为了提高逼近效果, 许多学者研究了非等距采样下的随机积分的渐近性. Geiss 与其合作者证明了在合适的非等距确定性采样下, 可以把 Euler 方法的 L_2 - 速度由 $n^{-\frac{1}{4}}$ 提高到 $n^{-\frac{1}{2}}$, 参见文献 [7, 8]. Geiss 和 Toivola^[9] 验证了非等距采样对于弱收敛结果的正面影响. Fukasawa^[10] 研究了随机采样下一维随机微分方程 Euler 方法逼近误差的极限分布. Hayashi 等人^[11] 分析了不规则采样对连续半鞅幂变差估计量的影响. Lindberg 和 Rootzén^[12] 证明了在一种特殊形式的随机采样下基于多维随机微分方程解的随机积分的误差分布的极限定理, 这种形式的采样时间通过递推关系 $\tau_0^n = 0$ 和

$$\tau_{k+1}^n = \tau_k^n + \frac{1}{n\theta(\tau_k^n)} \quad (1.3)$$

来定义, 其中 $\theta(t)$ 是一个正的适应过程. 对于 Black-Scholes 模型, 通过选取合适的 $\theta(t)$ 可以构造 “no bad days” 策略和最小标准差策略. 最近, Gobet^[13] 研究了当采样时间是一列停时时, 在几乎处处意义下, 对冲误差的正则化二次变差的收敛问题.

Milstein 方法的本质是通过增加二次项来提高收敛速度. 对于 SDE (1.2), 众所周知, 当 $a \equiv 0$ 时, Euler 方法的收敛速度是 $\frac{1}{n}$, 其他情况下, 收敛速度是 $\frac{1}{\sqrt{n}}$. 若 $f \in C^2$, 我们可以通过 Milstein 方法分别提高收敛速度到 $\frac{1}{n^2}$ 和 $\frac{1}{n}$, 参见文献 [14, 第 10 章]. 本文考虑一般 q 维 SDE (1.1) 的 Milstein 方法, $X^n = (X^{n1}, \dots, X^{nq})^*$ 具有如下形式:

$$X_t^{ni} = x_0^i + \int_0^t f^i(X_{\eta_n(s)}^n) dY_s + \int_0^t (Y_s - Y_{\eta_n(s)})^* [f(X_{\eta_n(s)}^n)]^* Df^i(X_{\eta_n(s)}^n) dY_s, \quad X_0^n = x_0,$$

其中, $\eta_n(t) = \tau_k^n$ ($\tau_k^n \leq t < \tau_{k+1}^n$), f^i 是函数矩阵 f 的第 i 行向量, $Df^i = (f_k^{ij} : \partial f^{ij} / \partial x_k)$, $i = 1, \dots, q$, 是一个 $q \times d$ 的矩阵. Yan^[15] 考虑了在等距采样 ($\tau_k^n = \frac{k}{n}$) 下误差过程 $U_t^n = X_t^n - X_t$ 的渐近性质, 并且给出了当驱动过程分别为连续局部鞅, 有限变差满足一定假设条件的连续半鞅情形下, 随机微分方程 Milstein 方法收敛速度为 $\frac{1}{n}$ 的充分必要条件.

本文的目的是将文献 [15] 中的部分结论推广到满足递推关系 (1.3) 的随机采样的情形. 为了叙述方便, 我们在本文的第 2 节介绍一些定义与记号, 并给出本文的主要定理. 在第 3 节, 我们给出主要定理的证明过程和在证明中要用到的技术性引理, 这些引理的证明参见附录.

2 记号与主要结果

本文考虑在时间区间 $[0, 1]$ 上、初值为 $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^q)^* \in \mathbb{R}^q$ 的 q 维 SDE (1.1), 其驱动过程 $Y = (Y^i)_{1 \leq i \leq d}$ 是随机基 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ 上初值为 0 的 d 维连续局部鞅, f 是一个 C^2 函数矩阵.

下面介绍文中用到的记号.

(1) 对随机过程 H 和 X , 我们记 $H \cdot X$ 为 H 关于 X 的随机积分过程, 并且

$$\{H_{i,j}^n \cdot X_j\} = \{H_{i,j}^n \cdot X_j; 1 \leq i, j \leq d\} = \left\{ \int_0^t H_{i,j}^n(s) dX_j(s); 1 \leq i, j \leq d \right\}_{0 \leq t \leq 1}.$$

(2) 记 A^* 为矩阵 A 的转置. $\text{tr}(A)$ 为方阵 A 的迹, $\|A\| = (\sum_{i,j} (\sigma_s^{ij})^2)^{1/2}$ 为其 Euclid 范数.

(3) 对 $0 \leq t \leq 1$, 令 $\eta_n(t) = \tau_k^n$, $\tau_k^n \leq t < \tau_{k+1}^n$, 其中 $0 = \tau_0^n < \tau_1^n < \dots < \infty$ 是 (1.3) 给出的 $\{\mathcal{F}_t\}$ 可料停时. 为了方便记号, 在下文中我们有时会用 τ_k 代替 τ_k^n .

(4) 记 $C_t = (C_t^{ij})_{1 \leq i,j \leq d} = ([Y^i, Y^j]_t)_{1 \leq i,j \leq d}$ 为 Y 的二次变差过程.

(5) 对任意过程 V , 我们记 $V_t^{(n)} := V_t - V_{\eta_n(t)}$ 和 $d \times d$ 维矩阵

$$Z_t^n := \int_0^t Y_s^{(n)} (dY_s)^*, \quad M_t^{nj} := \int_0^t \int_{\eta_n(s)}^s Y_r^{(n)} (dY_r)^* dY_s^j, \quad N_t^{nj} := \int_0^t Y_s^{(n)} (Y_s^{(n)})^* dY_s^j. \quad (2.1)$$

(6) 令 $M^n = (M^{n1}, \dots, M^{nd})$, $N^n = (N^{n1}, \dots, N^{nd})$. M^{nijk} 和 N^{nijk} 分别表示矩阵 M^{ni} 和 N^{ni} 中的位置为 (j, k) 的元素.

(7) C 表示常数, 可以在不同的地方代表不同的数值.

定义 2.1 对一系列连续半鞅 $X_t^n = M_t^n + A_t^n$, 如果 $[M^n, M^n]_1 + |A^n|_1$ 是紧的, 则称这个半鞅满足 $(\star)$, 其中 M^n 是一个局部鞅, A^n 是一个有界变差过程, $[M^n, M^n]_1$ 是 M^n 在 $[0, 1]$ 上的二次变差, $|A^n|_1$ 是 A^n 在 $[0, 1]$ 上的全变差.

注 2.2 $(\star)$ 与文献 [16] 中的一致胎紧条件等价. 由于这里的时间区间是 $[0, 1]$, 也与文献 [17] 中的一致可控变差条件等价. $(\star)$ 的性质可参见文献 [5], 这里仅介绍本文中需要用到的性质. 若 X^n 是弱收敛的, 则 $(\star)$ 是如下定义的“好性 (goodness)”的充要条件.

定义 2.3 令 $(X_n)_{n \geq 1}$ 是一列定义在赋 σ -域流概率空间 $\Psi^n = (\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}_t^n)_{0 \leq t < \infty})$, $n \geq 1$ 上的 d 维连续半鞅, 并且 $X^n \Rightarrow X$. 如果对于任意一列 Ψ^n 上、取值在 $\mathbb{R}^{d \times d}$ 上、满足 $(H^n, X^n) \Rightarrow (H, X)$ 的右连左极随机过程 $(H^n)_{n \geq 1}$, 都存在一个 σ -域流 $(\mathcal{G}_t)$ 使得 X 关于这个流是一个半鞅, H 是一个右连左极过程, 并且 $\{H_{i,j}^n \cdot X_j^n\} \Rightarrow \{H_{i,j} \cdot X_j\}$, 则称 X^n 是好的.

定理 2.4 假设 Y 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上、初值为 0 的 d 维连续局部鞅, 采样时间满足递推关系 (1.3), 其中 θ 是一个严格正的适应过程, 在区间 $[0, 1]$ 上, $\frac{1}{\theta^2(s)}$ 几乎处处 Riemann 可积. 如果存在一个取值为 $d \times d$ 维矩阵的非负连续可料过程 c 使得

$$C_t = \int_0^t c_s ds, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.2)$$

σ_t 是一个使 $c_t = \sigma_t \sigma_t^*$ 取值为 $d \times m$ 维矩阵的连续过程. 则在原空间上的一个扩展空间 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{P})$ 上存在一个 Brown 运动 $B = (B^1, \dots, B^m)^*$ 使得 $Y_t = \int_0^t \sigma_s dB_s$, 并且 $(nM^{nj}, nN^{nj})_{1 \leq j \leq d}$ 依分布平稳收敛到 $(M^i, N^j)_{1 \leq j \leq d}$. 具体形式为

$$M_t^j = \frac{\sqrt{6}}{6} \sum_{p=1}^m \int_0^t \frac{\sigma_s \sigma_s^{jp}}{\theta(s)} dW_s^p \sigma_s^*, \quad (2.3)$$

$$M_t^j = \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{p=1}^m \int_0^t \frac{\sigma_s \sigma_s^{jp}}{\theta(s)} dV_s^p \sigma_s^*, \quad (2.4)$$

其中

$$V^{pij} = \frac{\sqrt{2}}{2} W^{pij} + \frac{\sqrt{2}}{2} W^{pji} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} B^p + \frac{1}{2} \bar{W}^p \right) \delta_{ij}.$$

$\{W^{pij}, \bar{W}^p; 1 \leq p, i, j \leq m\}$ 是 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{P})$ 上与 Y 和 B 独立的一列独立标准 Brown 运动, 此外, (nM^n, nN^n) 满足 $(\star)$, 且 $(Y, nM^n, nN^n) \Rightarrow (Y, M, N)$.

注 2.5 在等距采样 ($\theta(s) \equiv 1$) 的情形下, 定理给出的极限分布与 Yan [15] 给出的结论一致.

3 技术性引理

定理 3.1 (参见文献 [15]) 令 Hf^{ij} 是 f^{ij} 的 Hessian 矩阵, α_n 是一列正的确数, 以下结论等价:

(i) (2.1) 定义的序列 $(\alpha_n M^n, \alpha_n N^n)$ 满足 $(\star)$, 并且

$$(Y, \alpha_n M^n, \alpha_n N^n) \Rightarrow (Y, M, N).$$

(ii) 对任意初值 x_0 和最多线性增长的 C^2 函数 f , 序列 $\alpha_n U^n$ 满足 $(\star)$, 并且 $(Y, \alpha_n U^n) \Rightarrow (Y, U)$. 在这种情形下, 极限 $M = (M^1, \dots, M^d)$, $N = (N^1, \dots, N^d)$ 和 $U = (U^1, \dots, U^q)^*$ 可以在同一个扩展空间上实现. 对于所有的 $i = 1, \dots, q$, M , N 和 U 之间的关系为

$$\begin{aligned} U_t^i &= \int_0^t (U_s)^* Df^i(X_s) dY_s \\ &\quad - \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^q \text{tr} \left(\int_0^t f_k^{ij}(X_s) [Df^k(X_s)]^* f(X_s) dM_s^j \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \text{tr} \left(\int_0^t [f(X_s)]^* Hf^{ij}(X_s) f(X_s) dN^j \right), \end{aligned}$$

$$U_0^i = 0.$$

注 3.2 文献 [15] 中对定理 3.1 的证明不依赖于具体的采样方式, 所以在本文随机采样的情形下我们依然可以运用这个定理. 根据定理 3.1, 为了得到误差过程 U 的渐近分布, 我们只需要验证 (i) 是否成立.

引理 3.3 (参见文献 [18]) 假设 $\{Z^n\}_{n \geq 1}$ 是一列正的、关于 σ -域流 $\{\mathcal{F}^n\}_{n \geq 1}$ 适应的离散时间随机过程, 对每一个 n , τ_n 是关于 $\mathcal{F}^n$ 的停时. 由

$$\sum_{j=1}^{\tau} E(Z_j^n | \mathcal{F}_{j-1}^n) \xrightarrow{P} 0$$

可推出

$$\sum_{j=1}^{\tau} Z_j^n \xrightarrow{P} 0.$$

为了证明定理 2.4, 我们定义另一个连续局部鞅 $\bar{Y}_t = Y_t(\bar{\sigma}) = \int_0^t \bar{\sigma}_s dB_s$, 其中 $\bar{\sigma}_s = \sigma_{\eta_n(s)}$. 类似地, 我们定义

$$M_t^{nj}(\bar{\sigma}) := \int_0^t \int_{\eta_n(s)}^s Y_r^{(n)}(\bar{\sigma}) (dY_r(\bar{\sigma}))^* dY_s^j(\bar{\sigma}), \quad N_t^{nj}(\bar{\sigma}) := \int_0^t Y_s^{(n)}(\bar{\sigma}) (Y_s^{(n)}(\bar{\sigma}))^* dY_s^j(\bar{\sigma}). \quad (3.1)$$

引理 3.4 令 B^a 为 d 维 Brown 运动 B 的第 a 个分量. 在定理 2.3 的假设条件下, 对所有的 $1 \leq i, j, k, l, p, q \leq d$, $1 \leq a \leq m$, $t \in [0, 1]$, 我们有

$$n^2 [N^{npj}(\bar{\sigma}), N^{nqkl}(\bar{\sigma})]_t \xrightarrow{P} \frac{1}{3} \int_0^t \frac{(c_s^{ij} c_s^{kl} + c_s^{ik} c_s^{jl} + c_s^{il} c_s^{jk}) c_s^{pq}}{\theta^2(s)} ds, \quad (3.2)$$

$$n^2 [N^{npj}(\bar{\sigma}), M^{nqkl}(\bar{\sigma})]_t \xrightarrow{P} \frac{1}{6} \int_0^t \frac{(c_s^{ik} c_s^{jl} + c_s^{il} c_s^{jk}) c_s^{pq}}{\theta^2(s)} ds, \quad (3.3)$$

$$n^2 [M^{npj}(\bar{\sigma}), M^{nqkl}(\bar{\sigma})]_t \xrightarrow{P} \frac{1}{6} \int_0^t \frac{c_s^{ik} c_s^{jl} c_s^{pq}}{\theta^2(s)} ds, \quad (3.4)$$

$$n[N^{npj}(\bar{\sigma}), B^a]_t \xrightarrow{p} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{c_s^{ij} \sigma_s^{pa}}{\theta(s)} ds, \quad (3.5)$$

$$n[M^{npj}(\bar{\sigma}), B^a]_t \xrightarrow{p} 0. \quad (3.6)$$

证明 根据附录 A 中的引理 A.1–A.3, 我们有

$$\begin{aligned} & n^2[N^{npj}(\bar{\sigma}), N^{nqkl}(\bar{\sigma})]_t \\ &= \sum_{i', j', k', l'} n^2 \int_0^t \sum_{\nu} \sigma^{ii'}(\tau_{\nu}) \sigma^{jj'}(\tau_{\nu}) \sigma^{kk'}(\tau_{\nu}) \sigma^{ll'}(\tau_{\nu}) c^{pq}(\tau_{\nu}) B^{(n)i'}(s) B^{(n)j'}(s) \\ & \quad \times B^{(n)k'}(s) B^{(n)l'}(s) \delta_{\nu}(s) ds \\ & \xrightarrow{p} \frac{1}{3} \int_0^t \frac{(c_s^{ij} c_s^{kl} + c_s^{ik} c_s^{jl} + c_s^{il} c_s^{jk}) c_s^{pq}}{\theta^2(s)} ds, \\ & n^2[N^{npj}(\bar{\sigma}), M^{nqkl}(\bar{\sigma})]_t \\ &= \sum_{i', j', k', l'} n^2 \int_0^t \sum_{\nu} \sigma^{ii'}(\tau_{\nu}) \sigma^{jj'}(\tau_{\nu}) \sigma^{kk'}(\tau_{\nu}) \sigma^{ll'}(\tau_{\nu}) c^{pq}(\tau_{\nu}) B^{(n)i'}(s) B^{(n)j'}(s) \\ & \quad \times \int_{\tau_{\nu}}^s B^{(n)k'}(r) dB^{l'}(r) \delta_{\nu}(s) ds \\ & \xrightarrow{p} \frac{1}{6} \int_0^t \frac{(c_s^{ik} c_s^{jl} + c_s^{il} c_s^{jk}) c_s^{pq}}{\theta^2(s)} ds \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} & n^2[M^{npj}(\bar{\sigma}), M^{nqkl}(\bar{\sigma})]_t \\ &= \sum_{i', j', k', l'} n^2 \int_0^t \sum_{\nu} \sigma^{ii'}(\tau_{\nu}) \sigma^{jj'}(\tau_{\nu}) \sigma^{kk'}(\tau_{\nu}) \sigma^{ll'}(\tau_{\nu}) c^{pq}(\tau_{\nu}) \\ & \quad \times \int_{\tau_{\nu}}^s B^{(n)i'}(r) dB^{j'}(r) \int_{\tau_{\nu}}^s B^{(n)k'}(r) dB^{l'}(r) \delta_{\nu}(s) ds \\ & \xrightarrow{p} \frac{1}{6} \int_0^t \frac{c_s^{ik} c_s^{jl} c_s^{pq}}{\theta^2(s)} ds. \end{aligned}$$

与证明引理 A.1 类似 (更简单), 我们有

$$n \int_0^t \sum_{\nu} \sigma^{ii'}(\tau_{\nu}) \sigma^{jj'}(\tau_{\nu}) \sigma^{pq}(\tau_{\nu}) B^{(n)i'}(s) B^{(n)j'}(s) \delta_{\nu}(s) ds \xrightarrow{p} \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\sigma^{ii'}(s) \sigma^{jj'}(s) \sigma^{pq}(s)}{\theta(s)} ds, & i' = j', \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

和

$$\int_0^t \sum_{\nu} \sigma^{ii'}(\tau_{\nu}) \sigma^{jj'}(\tau_{\nu}) \sigma^{pq}(\tau_{\nu}) \int_{\tau_{\nu}}^s B^{(n)i'}(r) dB^{j'}(r) \delta_{\nu}(s) ds \xrightarrow{p} 0.$$

所以

$$\begin{aligned} n[N^{npj}(\bar{\sigma}), B^a]_t &= \sum_{i', j'} n \int_0^t \sum_{\nu} \sigma^{ii'}(\tau_{\nu}) \sigma^{jj'}(\tau_{\nu}) \sigma^{pq}(\tau_{\nu}) B^{(n)i'}(s) B^{(n)j'}(s) \delta_{\nu}(s) ds \\ & \xrightarrow{p} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{c_s^{ij} \sigma_s^{pa}}{\theta(s)} ds, \end{aligned}$$

$$n[M^{npj}(\bar{\sigma}), B^a]_t = \sum_{i', j'} n \int_0^t \sum_{\nu} \sigma^{ii'}(\tau_{\nu}) \sigma^{jj'}(\tau_{\nu}) \sigma^{pq}(\tau_{\nu}) \int_{\tau_{\nu}}^s B^{(n)i'}(r) dB^{j'}(r) \delta_{\nu}(s) ds \xrightarrow{P} 0.$$

证毕. $\square$

引理 3.5 如果 c 是一个取值为非负 $d \times d$ 维矩阵的连续可料过程, 并且满足 (2.2), $1/\theta^2$ 几乎处处 Riemann 可积, 则

$$n^2[N^{npj}(\sigma), N^{nqkl}(\sigma)]_t - n^2[N^{npj}(\bar{\sigma}), N^{nqkl}(\bar{\sigma})]_t \xrightarrow{P} 0, \quad (3.7)$$

$$n^2[N^{npj}(\sigma), M^{nqkl}(\sigma)]_t - n^2[N^{npj}(\bar{\sigma}), M^{nqkl}(\bar{\sigma})]_t \xrightarrow{P} 0, \quad (3.8)$$

$$n^2[M^{npj}(\sigma), M^{nqkl}(\sigma)]_t - n^2[M^{npj}(\bar{\sigma}), M^{nqkl}(\bar{\sigma})]_t \xrightarrow{P} 0, \quad (3.9)$$

$$n[N^{npj}(\sigma), B^a]_t - n^2[N^{npj}(\bar{\sigma}), B^a]_t \xrightarrow{P} 0, \quad (3.10)$$

$$n[M^{npj}(\sigma), B^a]_t - n^2[M^{npj}(\bar{\sigma}), B^a]_t \xrightarrow{P} 0. \quad (3.11)$$

证明 首先, 我们证明

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| n^2 \int_0^t \sum_{\nu} \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{ii'} dB^{i'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{jj'} dB^{j'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{kk'} dB^{k'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{ll'} dB^{l'}(u) (c_s^{pq} - c_{\tau_{\nu}}^{pq}) \delta_{\nu}(s) ds \right| \xrightarrow{P} 0. \quad (3.12)$$

记

$$\Delta_{\nu}^{(1)}(t) := n^2 \int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{\nu+1} \wedge t} \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{ii'} dB^{i'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{jj'} dB^{j'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{kk'} dB^{k'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{ll'} dB^{l'}(u) (c_s^{pq} - c_{\tau_{\nu}}^{pq}) ds,$$

则 (3.12) 的左边部分可以写成 $\sup_{0 \leq t \leq 1} |\sum_{\nu} \Delta_{\nu}^{(1)}(t)|$.

接下来, 我们证明 $\sum_{\nu} E[\sup_{\tau_{\nu} \leq t < \tau_{\nu+1}} |\Delta_{\nu}^{(1)}(t)| | \mathcal{F}_{\tau_{\nu}}] \xrightarrow{P} 0$. 根据引理 3.3, 我们可以推出

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \sum_{\nu} \Delta_{\nu}^{(1)}(t) \right| \leq \sum_{\nu} \sup_{\tau_{\nu} \leq t < \tau_{\nu+1}} |\Delta_{\nu}^{(1)}(t)| \xrightarrow{P} 0,$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 利用 Hölder 不等式和 Doob's 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} & E \left[\sup_{\tau_{\nu} \leq t < \tau_{\nu+1}} |\Delta_{\nu}^{(1)}(t)| \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right] \\ & \leq n^2 (\tau_{\nu+1} - \tau_{\nu}) E \left[\sup_{\tau_{\nu} \leq s < \tau_{\nu+1}} \left| \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{ii'} dB^{i'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{jj'} dB^{j'}(u) \right. \right. \\ & \quad \times \left. \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{kk'} dB^{k'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{ll'} dB^{l'}(u) (c_s^{pq} - c_{\tau_{\nu}}^{pq}) \right| \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right] \\ & \leq n^2 (\tau_{\nu+1} - \tau_{\nu}) \left(E \left[\left| \int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{\nu+1}} \sigma_u^{ii'} dB^{i'}(u) \right|^8 \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right] \right)^{1/8} \\ & \quad \times \left(E \left[\left| \int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{\nu+1}} \sigma_u^{jj'} dB^{j'}(u) \right|^8 \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right] \right)^{1/8} \left(E \left[\left| \int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{\nu+1}} \sigma_u^{kk'} dB^{k'}(u) \right|^8 \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right] \right)^{1/8} \\ & \quad \times \left(E \left[\left| \int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{\nu+1}} \sigma_u^{ll'} dB^{l'}(u) \right|^8 \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right] \right)^{1/8} \left(E \left[\sup_{\tau_{\nu} \leq s < \tau_{\nu+1}} \left| \int_{\tau_{\nu}}^s c_u^{pq} du \right|^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right] \right)^{1/2} \\ & \leq C n^2 (\tau_{\nu+1} - \tau_{\nu})^4, \end{aligned}$$

其中, 最后一行可由 Bukholder-Davis-Gundy 不等式和 c 的有界性得到. 因此,

$$\sum_{\nu} E \left[\sup_{\tau_{\nu} \leq t < \tau_{\nu+1}} |\Delta_{\nu}^{(1)}(t)| \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right] \leq C \sum_{\nu} \frac{1}{n^2 \theta^4(\tau_{\nu})} \leq C \max_{\nu} \frac{1}{n \theta(\tau_{\nu})} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{1}{\theta^2(t)} \xrightarrow{p} 0,$$

(3.12) 成立.

现在, 我们考虑

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \Delta_{\nu}^{(2)}(t) &= n^2 \int_0^t \sum_{\nu} \int_{\tau_{\nu}}^s (\sigma_u^{ii'} - \sigma_{\tau_{\nu}}^{ii'}) dB^{i'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{jj'} dB^{j'}(u) \\ &\quad \times \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{kk'} dB^{k'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{ll'} dB^{l'}(u) c_{\tau_{\nu}}^{pq} \delta_{\nu}(s) ds, \end{aligned}$$

其中

$$\Delta_{\nu}^{(2)}(t) := n^2 \int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{\nu+1} \wedge t} \int_{\tau_{\nu}}^s (\sigma_u^{ii'} - \sigma_{\tau_{\nu}}^{ii'}) dB^{i'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{jj'} dB^{j'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{kk'} dB^{k'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{ll'} dB^{l'}(u) c_{\tau_{\nu}}^{pq} ds.$$

同理, 我们有

$$\begin{aligned} &E \left[\sup_{\tau_{\nu} \leq t < \tau_{\nu+1}} |\Delta_{\nu}^{(2)}(t)| \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right] \\ &\leq n^2 (\tau_{\nu+1} - \tau_{\nu}) E \left[\sup_{\tau_{\nu} \leq s < \tau_{\nu+1}} \left| \int_{\tau_{\nu}}^s (\sigma_u^{ii'} - \sigma_{\tau_{\nu}}^{ii'}) dB^{i'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{jj'} dB^{j'}(u) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{kk'} dB^{k'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{ll'} dB^{l'}(u) c_{\tau_{\nu}}^{pq} \right| \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right] \\ &\leq C n^2 (\tau_{\nu+1} - \tau_{\nu}) \left(E \left[\left| \int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{\nu+1}} (\sigma_u^{ii'} - \sigma_{\tau_{\nu}}^{ii'}) dB^{i'}(u) \right|^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right] \right)^{1/2} \left(E \left[\left| \int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{\nu+1}} \sigma_u^{jj'} dB^{j'}(u) \right|^6 \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right] \right)^{1/6} \\ &\quad \times \left(E \left[\left| \int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{\nu+1}} \sigma_u^{kk'} dB^{k'}(u) \right|^6 \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right] \right)^{1/6} \left(E \left[\left| \int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{\nu+1}} \sigma_u^{ll'} dB^{l'}(u) \right|^6 \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right] \right)^{1/6} \\ &\leq C n^2 (\tau_{\nu+1} - \tau_{\nu})^{5/2} E \left[\left| \int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{\nu+1}} (\sigma_u^{ii'} - \sigma_{\tau_{\nu}}^{ii'}) dB^{i'}(u) \right|^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right]^{1/2} \\ &\leq C n^2 (\tau_{\nu+1} - \tau_{\nu})^{5/2} E \left[\int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{\nu+1}} (\sigma_u^{ii'} - \sigma_{\tau_{\nu}}^{ii'})^2 du \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right]^{1/2} \\ &\leq C n^2 (\tau_{\nu+1} - \tau_{\nu})^3 E \left[\max_{\tau_{\nu} \leq u < \tau_{\nu+1}} (\sigma_u^{ii'} - \sigma_{\tau_{\nu}}^{ii'})^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

由 σ 的连续性有

$$\sum_{\nu} E \left[\sup_{\tau_{\nu} \leq t < \tau_{\nu+1}} |\Delta_{\nu}^{(2)}(t)| \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right] \leq C \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{1}{\theta^2(t)} \max_{\nu} E \left[\max_{\tau_{\nu} \leq u < \tau_{\nu+1}} (\sigma_u^{ii'} - \sigma_{\tau_{\nu}}^{ii'})^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_{\nu}} \right]^{1/2} \xrightarrow{p} 0.$$

所以

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \sum_{\nu} \Delta_{\nu}^{(2)}(t) \right| \leq \sum_{\nu} \sup_{\tau_{\nu} \leq t < \tau_{\nu+1}} |\Delta_{\nu}^{(2)}(t)| \xrightarrow{p} 0,$$

即

$$n^2 \int_0^t \sum_{\nu} \int_{\tau_{\nu}}^s (\sigma_u^{ii'} - \sigma_{\tau_{\nu}}^{ii'}) dB^{i'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{jj'} dB^{j'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{kk'} dB^{k'}(u) \int_{\tau_{\nu}}^s \sigma_u^{ll'} dB^{l'}(u) c_{\tau_{\nu}}^{pq} \delta_{\nu}(s) ds \xrightarrow{p} 0. \quad (3.13)$$

结合 (3.12) 和 (3.13), 利用三角不等式即可证明 (3.7). (3.8)–(3.11) 同理可证. $\square$

定理 2.4 的证明 根据引理 3.4、3.5 和文献 [19, 定理 4.1], 序列 $(nM^{np}, nN^{np})_{1 \leq p \leq d}$ 依分布平稳收敛到过程 $(M^p, N^p)_{1 \leq p \leq d}$, 其中 M^p 和 N^p 由 (2.3) 和 (2.4) 给出. 所以, 在 $\mathbb{D}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^{2d^3})$ 的乘积拓扑下, $(Y, nM^{np}, nN^{np})_{1 \leq p \leq d}$ 依分布收敛到 $(Y, M^p, N^p)_{1 \leq p \leq d}$, 又因为所有的过程都是连续的, 所以在 $\mathbb{D}(\mathbb{R}^{d+2d^3})$ 的 Skorohod 拓扑下也收敛. 最后, 由引理 3.5 可知序列 (nM^n, nN^n) 满足 $(\star)$. $\square$

致谢 衷心感谢编辑和审稿人对本文提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Kurtz T G, Protter P. Wong-Zakai corrections, random evolutions and simulation schemes for SDEs. *Stoch Anal*, 1991, 331–346
- 2 Kohatsu-Higa A, Protter P. The Euler scheme for SDEs driven by semimartingales. *Stoch Anal Infinite Dimen Spaces*, 1994, 310: 141–151
- 3 Protter P, Talay D. The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations. *Ann Probab*, 1997, 25: 393–423
- 4 Wang H. Euler scheme for stochastic differential equation driven by pure jump semimartingales. *J Appl Probab*, in press, 2014
- 5 Jacod J, Protter P. Asymptotic error distributions for the Euler method for stochastic differential equations. *Ann Probab*, 1998, 26: 267–307
- 6 Yan L. The Euler scheme with irregular coefficients. *Ann Probab*, 2002, 30: 1172–1194
- 7 Geiss C, Geiss S. On an approximation of a class of stochastic integrals and interpolation. *Stochastics and Stochastic Reports*, 2004, 76: 339–362
- 8 Geiss S, Hujo M. Interpolation and approximation in $L_2(\gamma)$. *J Approx Theory*, 2007, 144: 213–232
- 9 Geiss S, Toivola A. Weak convergence of error processes in discretizations of stochastic integrals and Besov spaces. *Bernoulli*, 2009, 15: 925–954
- 10 Fukasawa M. Discretization error of stochastic integrals. *Ann Appl Probab*, 2011, 21: 1436–1465
- 11 Hayashi T, Jacod J, Yoshida N. Irregular sampling and central limit theorems for power variations: The continuous case. *Ann Inst Henri Poincaré Probab Stat*, 2011, 47: 1197–1218
- 12 Lindberg C, Rootzén H. Error distributions for random grid approximations of multidimensional stochastic integrals. *Ann Appl Probab*, 2013, 23: 834–857
- 13 Gobet E, Landon N. Almost sure optimal hedging strategy. *Ann Appl Probab*, 2014, 24: 1652–1690
- 14 Kloeden P E, Platen E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Berlin: Springer, 1992
- 15 Yan L. Asymptotic error for the milstein scheme for SDEs driven by continuous semimartingales. *Ann Appl Probab*, 2005, 15: 2706–2738
- 16 Yakubowski A, Mémin J, Pagés G. Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace D^1 de Skorohod. *Probab Theorey Related Fields*, 1989, 81: 111–137
- 17 Kurtz T G, Protter P. Weak convergence of stochastic integrals and differential equations. In: *Probabilistic Models for Nonlinear Partial Differential Equations (Montecatini Terme, 1995)*. Lecture Notes in Math, vol. 1627. Berlin: Springer, 1996, 1–41
- 18 Rootzén H. Central limit theorems for martingales via random change of time. In: Gut A, Holst L, eds. *Essays in Honour of Carl Gustav Essén*. Uppsala: Uppsala University, 1983, 154–190
- 19 Jacod J, Protter P. On continuous conditional Gaussian martingales and stable convergence in law. In: *Séminaire de Probabilités XXXI*. Lecture Notes in Math, vol. 1665. Berlin: Springer, 1997, 232–246

附录 A

引理 A.1 令 B_1 、 B_2 、 B_3 和 B_4 是 4 个独立的标准 Brown 运动. 假设 α 和 θ 是 2 个适应过程, 使得 α 局部有界, θ 严格正, 并且 $\frac{\alpha(s)}{\theta^2(s)}$ 在区间 $[0,1]$ 上几乎处处 Riemann 可积. 若 η_n 依概率收敛到

恒等映射, 则我们有

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t n^2 \sum_{\nu} \alpha(\tau_{\nu})(B_1^{(n)}(s))^4 \delta_{\nu}(s) ds - \int_0^t \frac{\alpha(s)}{\theta^2(s)} ds \right| \xrightarrow{p} 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t n^2 \sum_{\nu} \alpha(\tau_{\nu})(B_1^{(n)}(s))^2 (B_2^{(n)}(s))^2 \delta_{\nu}(s) ds - \int_0^t \frac{\alpha(s)}{3\theta^2(s)} ds \right| \xrightarrow{p} 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t n^2 \sum_{\nu} \alpha(\tau_{\nu})(B_1^{(n)}(s))^3 (B_2^{(n)}(s)) \delta_{\nu}(s) ds \right| \xrightarrow{p} 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t n^2 \sum_{\nu} \alpha(\tau_{\nu})(B_1^{(n)}(s))(B_2^{(n)}(s))(B_3^{(n)}(s))(B_4^{(n)}(s)) \delta_{\nu}(s) ds \right| \xrightarrow{p} 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t n^2 \sum_{\nu} \alpha(\tau_{\nu})(B_1^{(n)}(s))^2 (B_2^{(n)}(s))(B_3^{(n)}(s)) \delta_{\nu}(s) ds \right| \xrightarrow{p} 0, \quad (\text{A.5})$$

其中, 当 $\tau_{\nu} \leq s < \tau_{\nu+1}$ 时, $\delta_{\nu}(s) = 1$, 其他情况时, $\delta_{\nu}(s) = 0$.

引理 A.1 的证明 根据文献 [12, 引理 2.8] (取 $p = 4$), 我们可以直接得到 (A.1). 为了证明 (A.2), 令

$$\varphi_n^{(2)}(s) = n^2 \sum_{\nu} \alpha(\tau_{\nu})(B_1^{(n)}(s))^2 (B_2^{(n)}(s))^2 \delta_{\nu}(s).$$

记 $X_k^{(2)} = \int_0^{\tau_k} \varphi_n^{(2)}(s) ds$, 则

$$\begin{aligned} E[X_{k+1}^{(2)} - X_k^{(2)} | \mathcal{F}_{\tau_k}] &= E \left[\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} n^2 \alpha(\tau_k) (B_1^{(n)}(s))^2 (B_2^{(n)}(s))^2 ds \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &= n^2 \alpha(\tau_k) \int_0^{\frac{1}{n\theta(\tau_k)}} E[B_1(s)]^2 E[B_2(s)]^2 ds \\ &= \frac{\alpha(\tau_k)}{3n\theta^3(\tau_k)} = \frac{1}{3} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\alpha \circ \eta_n(s)}{\theta^2 \circ \eta_n(s)} ds. \end{aligned}$$

因此

$$M_k := \int_0^{\tau_k} \varphi_n^{(2)}(s) ds - \frac{1}{3} \int_0^{\tau_k} \frac{\alpha \circ \eta_n(s)}{\theta^2 \circ \eta_n(s)} ds$$

是鞅.

进一步, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式、关系式 $(\tau_{k+1} - \tau_k) = 1/(n\theta(\tau_k))$ 和 Brown 运动的基本性质, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_k E[(M_{k+1} - M_k)^2 | \mathcal{F}_{\tau_k}] &\leq \sum_k E \left[\left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \varphi_n^{(2)}(s) ds \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &= n^4 \sum_k \nu \alpha^2(\tau_k) E \left[\left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (B_1^{(n)}(s))^2 (B_2^{(n)}(s))^2 ds \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &\leq n^4 \sum_k \nu \alpha^2(\tau_k) (\tau_{k+1} - \tau_k) \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} E[(B_1^{(n)}(s) B_2^{(n)}(s))^4 | \mathcal{F}_{\tau_k}] ds \\ &= \frac{9}{5} n^4 \sum_k \nu \alpha^2(\tau_k) (\tau_{k+1} - \tau_k)^6 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{9}{5} \max_k \left(\frac{\alpha(\tau_k)}{n\theta^3(\tau_k)} \right) \sum_k \frac{\alpha(\tau_k)}{n\theta^3(\tau_k)}.$$

由于 α/θ^2 几乎处处 Riemann 可积, 最后一个等式的第 1 部分收敛到 0, 第 2 部分收敛到 $\int_0^1 \frac{\alpha(s)}{\theta^2(s)} ds$. 所以 $\sum_k E[(M_{k+1} - M_k)^2 | \mathcal{F}_{\tau_k}] \xrightarrow{P} 0$. 由鞅的泛函中心极限定理 (参见文献 [18, 定理 3.5]), 可知

$$\max_k |M_k| = \max_k \left| \int_0^{\tau_k} \varphi_n^{(2)}(s) ds - \frac{1}{3} \int_0^{\tau_k} \frac{\alpha \circ \eta_n(s)}{\theta^2 \circ \eta_n(s)} ds \right| \xrightarrow{P} 0. \quad (\text{A.6})$$

由 α 的有界性易得 $E[\int_0^1 (\varphi_n^{(2)})^2 ds]$ 有界. 又由于 $\max_k \{\tau_{k+1} - \tau_k\} \xrightarrow{P} 0$, 我们有

$$\begin{aligned} & \max_k \sup_{\tau_k \leq t < \tau_{k+1}} \left| \int_{\tau_k}^t \varphi_n^{(2)}(s) ds - \int_{\tau_k}^t \frac{\alpha(s) \circ \eta_n(s)}{3\theta^2 \circ \eta_n(s)} ds \right| \\ & \leq \max_k \sup_{\tau_k \leq t < \tau_{k+1}} \left| \int_{\tau_k}^t \varphi_n^{(2)}(s) ds \right| + \max_k \sup_{\tau_k \leq t < \tau_{k+1}} \left| \int_{\tau_k}^t \frac{\alpha(s) \circ \eta_n(s)}{3\theta^2 \circ \eta_n(s)} ds \right| \\ & \leq \left(\max_k \{\tau_{k+1} - \tau_k\} \int_0^1 (\varphi_n^{(2)}(s))^2 ds \right)^{1/2} + \max_k \left| \frac{\alpha(\tau_k)}{3n\theta^3(\tau_k)} \right| \xrightarrow{P} 0. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

根据 (A.6) 和 (A.7), 利用三角不等式与 α/θ^2 的可积性, 可以证明

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t \varphi_n^{(2)}(s) ds - \frac{1}{3} \int_0^t \frac{\alpha(s)}{\theta^2(s)} ds \right| \\ & \leq \max_k |M_k| + \max_k \sup_{\tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}} \left| \int_{\tau_k}^t \varphi_n^{(2)}(s) ds - \int_{\tau_k}^t \frac{\alpha(s) \circ \eta_n(s)}{3\theta^2 \circ \eta_n(s)} ds \right| \\ & \quad + \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t \frac{\alpha(s)}{3\theta^2(s)} ds - \int_0^t \frac{\alpha(s) \circ \eta_n(s)}{3\theta^2 \circ \eta_n(s)} ds \right| \\ & \xrightarrow{P} 0. \end{aligned}$$

(A.2) 得证. □

类似地, 在证明 (A.3)–(A.5) 时, 我们令

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(3)}(s) &= n^2 \sum_{\nu} \alpha(\tau_{\nu}) (B_1^{(n)}(s))^3 B_2^{(n)}(s) \delta_{\nu}(s), \\ \varphi_n^{(4)}(s) &= n^2 \sum_{\nu} \alpha(\tau_{\nu}) B_1^{(n)}(s) B_2^{(n)}(s) B_3^{(n)}(s) B_4^{(n)}(s) \delta_{\nu}(s), \\ \varphi_n^{(5)}(s) &= n^2 \sum_{\nu} \alpha(\tau_{\nu}) (B_1^{(n)}(s))^2 B_2^{(n)}(s) B_3^{(n)}(s) \delta_{\nu}(s), \end{aligned}$$

并记 $X_k^{(i)} = \int_0^{\tau_k} \varphi_n^{(i)}(s) ds$, $i=3, 4, 5$. 利用 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 间的独立性和 Brown 运动的基本性质, 我们有

$$\begin{aligned} E[X_{k+1}^{(3)} - X_k^{(3)} | \mathcal{F}_{\tau_k}] &= n^2 \alpha(\tau_k) \int_0^{\frac{1}{n\theta(\tau_k)}} E[(B_1(s))^3] E(B_2(s)) ds = 0, \\ E[X_{k+1}^{(4)} - X_k^{(4)} | \mathcal{F}_{\tau_k}] &= n^2 \alpha(\tau_k) \int_0^{\frac{1}{n\theta(\tau_k)}} E(B_1(s)) E(B_2(s)) E(B_3(s)) E(B_4(s)) ds = 0, \\ E[X_{k+1}^{(5)} - X_k^{(5)} | \mathcal{F}_{\tau_k}] &= n^2 \alpha(\tau_k) \int_0^{\frac{1}{n\theta(\tau_k)}} E[B_1(s)]^2 E(B_2(s)) E(B_3(s)) ds = 0. \end{aligned}$$

所以, $X_k^{(i)}, i=3, 4, 5$ 是鞅. 与 (A.2) 的证明类似, 为了证明 $\max_k |X_k^{(i)}| = \max_k \left| \int_0^{\tau_k} \varphi_n^{(i)}(s) ds \right| \xrightarrow{p} 0$, $i=3, 4, 5$, 我们只需证 $\sum_k E[(X_{k+1}^{(i)} - X_k^{(i)})^2 | \mathcal{F}_{\tau_k}] \xrightarrow{p} 0, i=3, 4, 5$. 注意到

$$\begin{aligned} & \sum_k E[(X_{k+1}^{(3)} - X_k^{(3)})^2 | \mathcal{F}_{\tau_k}] \\ &= \sum_k E \left[\left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \varphi_n^{(3)}(s) ds \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &= n^4 \sum_k \alpha^2(\tau_k) E \left[\left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (B_1^{(n)}(s))^3 B_2^{(n)}(s) ds \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &\leq n^4 \sum_k \alpha^2(\tau_k) (\tau_{k+1} - \tau_k) \int_0^{\frac{1}{n\theta(\tau_k)}} E[B_1(s)]^6 E[B_2(s)]^2 ds \\ &\leq C \max_k \left(\frac{\alpha(\tau_k)}{n\theta^3(\tau_k)} \right) \sum_k \frac{\alpha(\tau_k)}{n\theta^3(\tau_k)} \xrightarrow{p} 0, \\ & \sum_k E[(X_{k+1}^{(4)} - X_k^{(4)})^2 | \mathcal{F}_{\tau_k}] \\ &= \sum_k E \left[\left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \varphi_n^{(4)}(s) ds \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &= n^4 \sum_k \alpha^2(\tau_k) E \left[\left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} B_1^{(n)}(s) B_2^{(n)}(s) B_3^{(n)}(s) B_4^{(n)}(s) ds \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &\leq n^4 \sum_k \alpha^2(\tau_k) (\tau_{k+1} - \tau_k) \int_0^{\frac{1}{n\theta(\tau_k)}} E[B_1(s)]^2 E[B_2(s)]^2 E[B_3(s)]^2 E[B_4(s)]^2 ds \\ &\leq \frac{1}{5} \max_k \left(\frac{\alpha(\tau_k)}{n\theta^3(\tau_k)} \right) \sum_k \frac{\alpha(\tau_k)}{n\theta^3(\tau_k)} \xrightarrow{p} 0 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} & \sum_k E[(X_{k+1}^{(5)} - X_k^{(5)})^2 | \mathcal{F}_{\tau_k}] \\ &= \sum_k E \left[\left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \varphi_n^{(5)}(s) ds \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &= n^4 \sum_k \alpha^2(\tau_k) E \left[\left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (B_1^{(n)}(s))^2 B_2^{(n)}(s) B_3^{(n)}(s) ds \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &\leq n^4 \sum_k \alpha^2(\tau_k) (\tau_{k+1} - \tau_k) \int_0^{\frac{1}{n\theta(\tau_k)}} E[B_1(s)]^4 E[B_2(s)]^2 E[B_3(s)]^2 ds \\ &\leq \frac{3}{5} \max_k \left(\frac{\alpha(\tau_k)}{n\theta^3(\tau_k)} \right) \sum_k \frac{\alpha(\tau_k)}{n\theta^3(\tau_k)} \xrightarrow{p} 0. \end{aligned}$$

可证 (A.7) 对 $i=3, 4, 5$ 也成立, 同理利用三角不等式和可积性 (A.3)–(A.5) 成立. $\square$

引理 A.2 令 B_1, B_2, B_3 和 B_4 为 4 个同分布或独立的标准 Brown 运动, 假设 α 是一个局部有界的适应过程, θ 是一个严格正的适应过程, 并且 $\frac{\alpha(s)}{\theta^2(s)}$ 在区间 $[0, 1]$ 上几乎处处 Riemann 可积. 若

η_n 依概率收敛到恒等映射, 则

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t n^2 \sum_{\nu} \alpha(\tau_{\nu}) B_1^{(n)}(s) B_2^{(n)}(s) \int_{\tau_{\nu}}^s B_3^{(n)}(r) dB_4(r) \delta_{\nu}(s) ds - \Theta(t) \right| \xrightarrow{p} 0,$$

其中

$$\Theta(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} \int_0^t \frac{\alpha(s)}{\theta^2(s)} ds, & B_1 = B_2 = B_3 = B_4, \\ \frac{1}{6} \int_0^t \frac{\alpha(s)}{\theta^2(s)} ds, & B_1 = B_3 \neq B_2 = B_4, \\ \frac{1}{6} \int_0^t \frac{\alpha(s)}{\theta^2(s)} ds, & B_1 = B_4 \neq B_2 = B_3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

引理 A.2 的证明 令

$$\psi_n(s) = n^2 \sum_{\nu} \alpha(\tau_{\nu}) B_1^{(n)}(s) B_2^{(n)}(s) \int_{\tau_{\nu}}^s B_3^{(n)}(r) dB_4(r) \delta_{\nu}(s), \quad X_k = \int_0^{\tau_k} \psi_n(s) ds.$$

当 $B_1 = B_2 = B_3 = B_4$ 时, 利用 Itô 公式, 我们有

$$\begin{aligned} E[X_{k+1} - X_k \mid \mathcal{F}_{\tau_k}] &= E \left[\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} n^2 \alpha(\tau_k) (B_1^{(n)}(s))^2 \int_{\tau_k}^s B_1^{(n)}(r) dB_1(r) ds \mid \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &= n^2 \alpha(\tau_k) \left\{ 2E \left[\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \left(\int_{\tau_k}^s B_1^{(n)}(r) dB_1(r) \right)^2 ds \mid \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \right. \\ &\quad \left. + E \left[\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (s - \tau_k) \int_{\tau_k}^s B_1^{(n)}(r) dB_1(r) ds \mid \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \right\} \\ &= 2n^2 \alpha(\tau_k) \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \int_{\tau_k}^s (r - \tau_k) dr ds = \frac{\alpha(\tau_k)}{3n\theta^3(\tau_k)}. \end{aligned}$$

所以 $M_k^{(1)} := \int_0^{\tau_k} \psi_n(s) ds - \frac{1}{3} \int_0^{\tau_k} \frac{\alpha \circ \eta_n(s)}{\theta^2 \circ \eta_n(s)} ds$ 是鞅.

当 $B_1 = B_3 \neq B_2 = B_4$ (等价于 $B_1 = B_4 \neq B_2 = B_3$) 时, 利用分部积分公式和 B_1 、 B_2 的独立性, 我们有 $B_1^{(n)}(s) B_2^{(n)}(s) = \int_{\eta_n(s)}^s B_1^{(n)}(s) dB_2(s) + \int_{\eta_n(s)}^s B_2^{(n)}(s) dB_1(s)$. 公式两边平方取期望, 可以得到

$$E \left[\int_{\eta_n(s)}^s B_1^{(n)}(s) dB_2(s) \int_{\eta_n(s)}^s B_2^{(n)}(s) dB_1(s) \right] = 0.$$

因此,

$$\begin{aligned} E[X_{k+1} - X_k \mid \mathcal{F}_{\tau_k}] &= E \left[\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} n^2 \alpha(\tau_k) B_1^{(n)}(s) B_2^{(n)}(s) \int_{\tau_{\nu}}^s B_1^{(n)}(r) dB_2(r) ds \mid \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &= n^2 \alpha(\tau_k) E \left[\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \left(\int_{\tau_k}^s B_1^{(n)}(r) dB_2(r) \right)^2 ds \mid \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &\quad + n^2 \alpha(\tau_k) E \left[\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \int_{\tau_k}^s B_2^{(n)}(r) dB_1(r) \int_{\tau_k}^s B_1^{(n)}(r) dB_2(r) ds \mid \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &= n^2 \alpha(\tau_k) \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} E \left[\left(\int_{\tau_k}^s B_1^{(n)}(r) dB_2(r) \right)^2 \mid \mathcal{F}_{\tau_k} \right] ds = \frac{\alpha(\tau_k)}{6n\theta^3(\tau_k)}. \end{aligned}$$

所以 $M_k^{(2)} := \int_0^{\tau_k} \psi_n(s) ds - \frac{1}{6} \int_0^{\tau_k} \frac{\alpha \circ \eta_n(s)}{\theta^2 \circ \eta_n(s)} ds$ 是鞅.

在其他情形下, $M_k^{(3)} := \int_0^{\tau_k} \psi_n(s)ds$ 也是鞅, 因为很容易可以证明 $E[X_{k+1} - X_k | \mathcal{F}_{\tau_k}] = 0$.

接下来, 我们验证对于所有的 $i = 1, 2, 3$, 有 $\sum_k E[(M_{k+1}^{(i)} - M_k^{(i)})^2 | \mathcal{F}_{\tau_k}] \xrightarrow{P} 0$. 利用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式和 Hölder 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} & \sum_k E[(M_{k+1}^{(i)} - M_k^{(i)})^2 | \mathcal{F}_{\tau_k}] \\ & \leq \sum_k E \left[\left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \psi_n(s)ds \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ & = n^4 \sum_k \alpha^2(\tau_k) E \left[\left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} B_1^{(n)}(s) B_2^{(n)}(s) \int_{\tau_k}^s B_3^{(n)}(r) dB_4(r) ds \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ & \leq n^4 \sum_k \alpha^2(\tau_k) (\tau_{k+1} - \tau_k) \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} E \left[\left(B_1^{(n)}(s) B_2^{(n)}(s) \int_{\tau_k}^s B_3^{(n)}(r) dB_4(r) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] ds \\ & \leq n^4 \sum_k \alpha^2(\tau_k) (\tau_{k+1} - \tau_k) \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (E[(B_1^{(n)}(s))^8 | \mathcal{F}_{\tau_k}])^{1/4} (E[(B_2^{(n)}(s))^8 | \mathcal{F}_{\tau_k}])^{1/4} \\ & \quad \times \left(E \left[\left(\int_{\tau_k}^s B_3^{(n)}(r) dB_4(r) \right)^4 \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \right)^{1/2} ds \\ & \leq C n^4 \sum_k \alpha^2(\tau_k) (\tau_{k+1} - \tau_k)^6 \\ & \leq C \max_k \left(\frac{\alpha(\tau_k)}{n\theta^3(\tau_k)} \right) \sum_k \frac{\alpha(\tau_k)}{n\theta^3(\tau_k)} \xrightarrow{P} 0. \end{aligned}$$

所以 $\max_k |M_k^{(i)}| \xrightarrow{P} 0$, $i = 1, 2, 3$. 类似引理 3.4 证明, 引理 A.2 得证. $\square$

引理 A.3 在引理 A.2 的条件下, 我们有

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t n^2 \sum_{\nu} \alpha(\tau_{\nu}) \int_{\tau_{\nu}}^s B_1^{(n)}(r) dB_2(r) \int_{\tau_{\nu}}^s B_3^{(n)}(r) dB_4(r) \delta_{\nu}(s) ds - \Lambda(t) \right| \xrightarrow{P} 0,$$

其中

$$\Lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{6} \int_0^t \frac{\alpha(s)}{\theta^2(s)} ds, & B_1 = B_3, \quad B_2 = B_4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

引理 A.3 的证明 令

$$\phi_n(s) = n^2 \sum_{\nu} \alpha(\tau_{\nu}) \int_{\tau_{\nu}}^s B_1^{(n)}(r) dB_2(r) \int_{\tau_{\nu}}^s B_3^{(n)}(r) dB_4(r) \delta_{\nu}(s), \quad X_k = \int_0^{\tau_k} \phi_n(s) ds.$$

当 $B_1 = B_3$ 或 $B_2 = B_4$ 时, 可以获得

$$\begin{aligned} E[X_{k+1} - X_k | \mathcal{F}_{\tau_k}] &= E \left[\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} n^2 \alpha(\tau_k) \left(\int_{\tau_k}^s B_1^{(n)}(r) dB_2(r) \right)^2 ds \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &= n^2 \alpha(\tau_k) \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} E \left[\left(\int_{\tau_k}^s B_1^{(n)}(r) dB_2(r) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] ds = \frac{\alpha(\tau_k)}{6n\theta^3(\tau_k)}. \end{aligned}$$

所以 $M_k^{(1)} := \int_0^{\tau_k} \phi_n(s) ds - \frac{1}{6} \int_0^{\tau_k} \frac{\alpha \circ \eta_n(s)}{\theta^2 \circ \eta_n(s)} ds$ 是鞅.

如果 B_2 和 B_4 独立, 则 $E[X_{k+1}-X_k|\mathcal{F}_{\tau_k}] = 0$, 如果 $B_2 = B_4$, 并且 $B_1 \neq B_3$, 则 $E[X_{k+1}-X_k|\mathcal{F}_{\tau_k}] = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \int_{\tau_k}^s E[B_1^{(n)}(r)B_3^{(n)}(r)|\mathcal{F}_{\tau_k}]dr = 0$. 所以 $M_k^{(2)} := \int_0^{\tau_k} \phi_n(s)ds$ 是鞅.

我们可以证明 $\max_k |M_k^{(i)}| \xrightarrow{p} 0$. 因为

$$\begin{aligned}
& \sum_k E[(M_{k+1}^{(i)} - M_k^{(i)})^2 | \mathcal{F}_{\tau_k}] \\
& \leq \sum_k E \left[\left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \phi_n(s)ds \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\
& \leq n^4 \sum_k \alpha^2(\tau_k)(\tau_{k+1} - \tau_k) \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} E \left[\left(\int_{\tau_k}^s B_1^{(n)}(r)dB_2(r) \int_{\tau_k}^s B_3^{(n)}(r)dB_4(r) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] ds \\
& \leq n^4 \sum_k \alpha^2(\tau_k)(\tau_{k+1} - \tau_k) \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \left(E \left[\left(\int_{\tau_k}^s (B_1^{(n)}(r)dB_2(r)) \right)^4 \middle| \mathcal{F}_{k+1} \right] \right)^{1/2} \\
& \quad \times \left(E \left[\left(\int_{\tau_k}^s (B_3^{(n)}(r)dB_4(r)) \right)^4 \middle| \mathcal{F}_{k+1} \right] \right)^{1/2} ds \\
& \leq Cn^4 \sum_k \alpha^2(\tau_k)(\tau_{k+1} - \tau_k)^6 \\
& = C \sum_k \frac{\alpha^2(\tau_k)}{n^2\theta^6(\tau_k)} \\
& \leq C \max_k \left(\frac{\alpha(\tau_k)}{n\theta^3(\tau_k)} \right) \sum_k \frac{\alpha(\tau_k)}{n\theta^3(\tau_k)} \xrightarrow{p} 0.
\end{aligned}$$

在上述计算中, 在第 3 和 4 步时分别利用了 Hölder 不等式和 Burkholder-Davis-Gundy 不等式. 与引理 A.2 同理, 我们可以证明引理 A.3. $\square$

Asymptotic error for the Milstein scheme for SDEs with stochastic evaluation times

CHEN YingYu & ZHANG LiXin

Abstract The error of the numerical solution has significant applications in measuring the risks associated with discrete hedging. It is well known that the rate of convergence of the Euler scheme approximation of the solution to Itô equations is $\frac{1}{\sqrt{n}}$ with equidistant evaluation times. Milstein scheme is a modification of Euler scheme to improve the rate of convergence to $\frac{1}{n}$. In addition, using appropriate non-equidistant and stochastic evaluation times can also improve the rate. In this paper, we present the asymptotic behavior (weak convergence) of the error processes of the Milstein scheme for SDEs driven by a vector of continuous local martingales, for non-equidistant and stochastic evaluation times.

Keywords Milstein scheme, stochastic evaluation times, stably convergence, goodness

MSC(2010) 60H05, 60H35, 60J60

doi: 10.1360/012015-9