基于变换方法的索网结构波传播控制研究

周姣¹, 张凯^{1*}, 彭福军², 胡更开^{1*}

1. 北京理工大学宇航学院, 北京 100081;

2. 上海宇航系统工程研究所, 上海 201108

*联系人, 张凯, E-mail: zhangkai@bit.edu.cn; 胡更开, E-mail: hugeng@bit.edu.cn

收稿日期: 2017-04-06; 接受日期: 2017-05-09; 网络出版日期: 2017-08-30

国家自然科学基金(编号: 11290153, 11672037, 11632003, 11221202)资助项目

摘要 索网结构具有尺寸大、质量轻、可展开等特点, 已应用于大型空间展开天线等结构中. 本文开展了基于变换方法的索网结构波传播控制研究. 首先将索网均匀化为等效薄膜, 建立了可描述索网结构波传播规律的均匀化等效波动方程. 等效波动方程的形式与薄膜波动方程的形式相同, 等效质量和刚度由网格构型、几何参数和材料参数决定. 对于张紧力均匀分布的正三角形、正方形和正六边形网格, 等效质量和刚度均为各向同性. 根据该波动方程, 利用坐标变换方法给出预定波传播方式下所需的材料参数空间分布. 将所得连续材料参数分布离散化, 设计相应的索网微结构, 从而实现索网中可控的波传播形式. 基于压缩变换、白洞变换和鱼眼透镜等结构化设计, 数值验证了方法的有效性. 本文所提出的索网结构的变换方法, 为大型空间索网结构的振动控制提供了一定的理论指导.

关键词 索网结构, 均匀化, 坐标变换, 波动控制

PACS: 46.70.Hg, 46.40.Cd, 46.40.-f, 62.30.+d

大型空间展开天线的索网结构, 在卫星调姿变轨时易产生振动且难消除, 这将影响天线精度甚至使用寿命. 传统的模态法很难对这种大型空间索网结构的动力学特征进行准确描述, 基于模态法的主动控制策略也容易产生模态溢出等问题^[1-6]. 通过设计微结构实现控制结构动态响应的波动方法, 为上述空间索网结构的振动控制提供了新的思路.

在波动控制方法中, 坐标变换方法(Coordinate Transformation Method, CTM)利用波动方程坐标变换不变性(Form Invariance of Coordinate Transformation,

FICT), 通过坐标变换将空间的变换转换为波传播媒介材料参数的变换, 从而通过材料设计实现波传播的控制. 2006年, 英国物理学家Pendry等人^[7]和Leonhardt等人^[8]分别针对电磁波和光波提出基于变换方法的波场控制理论, 并基于该理论提出了“隐身斗篷(Invisibility Cloak)”的设计方法, 使得电磁波完美地绕过目标物而不产生任何散射. 2006年, Schurig等人^[9]利用超材料首次制备了微波段的电磁波隐身斗篷, 通过实验对其隐身效果进行了验证, 证实了变换方法的有效性. 随后, 人们根据不同形式的空间变换, 设计出了

引用格式: 周姣, 张凯, 彭福军, 等. 基于变换方法的索网结构波传播控制研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, 47: 104610
Zhou J, Zhang K, Peng F J, et al. Wave control in net structure based on transformation method (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2017, 47: 104610, doi: [10.1360/SSPMA2017-00098](https://doi.org/10.1360/SSPMA2017-00098)

如旋转器^[10,11]、放大器^[12]、超散射体^[13,14]等电磁功能器件.

通过比拟,人们发现声波的控制方程也同样具有坐标变换不变性. Chen等人^[15]以标量波动方程为基础,给出了一种声波变换的形式,并指出坐标变换方法同样适用于对声波传播的控制. 随后,胡进^[16]和Norris^[17]指出声波的材料参数变换关系不唯一,为声波变换选取提供了更广阔的空间.

对于弹性波, Milton等人^[18]指出传统弹性动力学方程—Navier方程经过坐标变换将变为Willis方程,因此不具有坐标变换不变性,无法与电磁波和声波一样,建立相应的坐标变换方法. 由于薄板中弯曲波方程较为简单并容易进行实验研究,因此薄板弯曲波的变换方法也被广泛研究. 薄板弯曲波控制方程的一般形式也不满足坐标变换不变性, Farhat等人^[19,20]指出在假设应力满足冯·卡门形式(Von-Kármán Form)时,薄板中的弯曲波控制方程表达为双调合方程的形式,具有坐标变换不变性,故可以用坐标变换方法调控波的传播. 这一结果也得到了Stenger等人^[21]的实验验证. Colquitt等人^[22]则利用引入板中的面内内力,避免了由于弯曲波变换所需的非对称应力,建立了基于基尔霍夫-勒夫板(Kirchhoff-Love Plates)弯曲波的变换方法. Liu等人^[23]也给出了基尔霍夫-勒夫板的线性变换方法的材料参数变换关系. 薄膜的波动方程可退化为亥姆霍兹方程(Helmholtz Equation),因此满足坐标变换的不变性,可以通过变换方法对薄膜结构中的波传播进行控制设计. 针对索网结构的变换方法进行研究,探索其在该类结构中波传播的控制方法,可为大型网状天线的振动抑制提供新的思路,也是本文的主要目的.

本文将提出基于索网结构的变换方法,实现对索网结构中波传播的控制设计,并通过网状结构的压缩变换、白洞变换、鱼眼透镜等功能器件的设计验证方法的有效性. 论文首先将索网结构均匀化,建立相应均匀化的波动控制方程;然后根据均匀化后的连续波动方程,通过与薄膜比拟证明网状结构也具有坐标变换不变性,并利用坐标变换方法给出变换前后材料参数的对应规律;最后将材料参数的分布规律离散化,设计索网的微结构,进而实现索网结构中新颖波传播控制功能器件的设计,并通过数值仿真进行了验证.

1 索网结构均匀化方法

在研究波长远大于微结构尺寸的动态问题时,索网结构的响应可用相应连续化结构的响应近似描述. 因此可以采用均匀化方法把离散的索网结构等效成连续薄膜,通过连续方程对索网结构的变形、波动等行为进行准确描述,从而简化模型,减小计算量. 建立微结构等效连续模型的过程称为结构的均匀化(图1)^[24]. 对二维索网结构的出面振动问题,我们分别讨论微结构为矩形网格、三角形网格和六方网格的索网均匀化.

首先考察微结构为矩形网格的索网结构,如图2所示. 取出索网结构中的一个代表单元,即十字形绳索胞元,将十字形绳索结构简化成弹簧质量系统,把代表单元中每根绳的质量集中到结构节点上,集中质量之间由无质量的弹簧连接.

十字形弹簧质量系统中间集中质量出面运动方程可以写为

$$M \frac{\partial^2 u_{m,n}}{\partial t^2} = \frac{F_x}{l_x} (u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}) + \frac{F_y}{l_y} (u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}), \quad (1)$$

其中,角标 m, n 分别代表集中质量所在位置的行数和列数. 角标 x, y 分别代表 x, y 两个方向, $u_{m,n}$ 为第 (m, n) 个集中质量的出面位移, ρ_l 为绳索的线密度, F 为绳索的

图1 (网络版彩图)索网结构均匀化示意图
Figure 1 (Color online) Homogenization of net structure.

图2 (网络版彩图)矩形网格索网结构和胞元简化模型
Figure 2 (Color online) Rectangular grid net structure and simplified model of unit cell.

张紧力, l 为微结构中单根绳索长度, 同时也是相邻两个集中质量之间的距离. 由绳索的密度和长度可知每个集中质量为 $M = \rho_l l_x + \rho_b l_y$.

由于微结构尺寸很小, 将单胞中周围四个集中质量的位移通过中间集中质量位移进行泰勒展开至第二阶进行表示

$$u_{m \pm 1, n} = u(x \pm l, y; t) = u \pm l \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots, \quad (2)$$

$$u_{m, n \pm 1} = u(x, y \pm l; t) = u \pm l \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dots, \quad (3)$$

将式(2)和(3)代入运动方程(1)可得

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F l_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F l_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4)$$

最后, 两边同除集中质量覆盖的面积 $S = l_x l_y$, 均匀化的等效连续波动方程为

$$\left(\frac{\rho_{lx}}{l_y} + \frac{\rho_{ly}}{l_x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{F_x}{l_y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{F_y}{l_x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (5)$$

当 $F_x l_x \neq F_y l_y$ 时, 刚度在 x, y 方向表现为各向异性. 对于均匀正方网格 $l_x = l_y = l$, 以及张紧力 $F_x = F_y = F$ 时, 连续化波动方程简化为各向同性的波动方程

$$2\rho_l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad (6)$$

可以看出正方形网格均匀化波动方程的质量矩阵和刚度矩阵仅与绳索线密度和张紧力有关, 与网格尺寸无关.

当网格呈正三角形排布时, 每个节点将与六条绳索相连, 其中绳索长度为 l . 与正方网格相同, 首先将网状结构离散成弹簧质量系统, 如图3所示. 绳索质量集中到网格的节点上, 绳索简化为无质量的弹簧.

根据中间节点质量的受力给出其运动方程

$$\begin{aligned} M \frac{\partial^2 u_{m,n}}{\partial t^2} = & \frac{F}{l} (u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}) \\ & + \frac{F}{l} (u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}) \\ & + \frac{F}{l} (u_{m,n-1} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n+1}), \end{aligned} \quad (7)$$

此时集中质量的大小为 $M = 3\rho_l l$. 同样通过泰勒展开, 胞元周围六个节点位移可以表示成中间质量的泰勒展开形式

$$\begin{aligned} u(x+l, y) = & u(x, y) + l u_x(x, y) \\ & + \frac{1}{2!} l^2 u_{xx}(x, y) + \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} u(x-l, y) = & u(x, y) - l u_x(x, y) \\ & + \frac{1}{2!} l^2 u_{xx}(x, y) + \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u\left(x + \frac{l}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2}l\right) = & u(x, y) + \frac{l}{2} u_x(x, y) + \frac{\sqrt{3}}{2} l u_y(x, y) \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 u_{xx}(x, y) + \frac{\sqrt{3}l^2}{2} u_{xy}(x, y) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 u_{yy}(x, y) \right] + \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u\left(x - \frac{l}{2}, y - \frac{\sqrt{3}}{2}l\right) = & u(x, y) - \frac{l}{2} u_x(x, y) - \frac{\sqrt{3}}{2} l u_y(x, y) \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 u_{xx}(x, y) + \frac{\sqrt{3}l^2}{2} u_{xy}(x, y) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 u_{yy}(x, y) \right] + \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u\left(x + \frac{l}{2}, y - \frac{\sqrt{3}}{2}l\right) = & u(x, y) + \frac{l}{2} u_x(x, y) - \frac{\sqrt{3}}{2} l u_y(x, y) \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 u_{xx}(x, y) - \frac{\sqrt{3}l^2}{2} u_{xy}(x, y) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 u_{yy}(x, y) \right] + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

$$u\left(x - \frac{l}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2}l\right) = u(x, y) - \frac{l}{2}u_x(x, y) + \frac{\sqrt{3}}{2}lu_y(x, y) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 u_{xx}(x, y) - \frac{\sqrt{3}l^2}{2}u_{xy}(x, y) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 u_{yy}(x, y)\right] + \dots \quad (13)$$

将式(8)–(13)带入运动方程(7), 可得连续化的波动方程为

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{F}{l} \frac{3l^2}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]. \quad (14)$$

最后, 将集中质量均匀化为单胞面积下的等效密度. 每个集中质量覆盖的面积为 $S = \sqrt{3}l^2/2$, 在等式两边除以面积, 均匀化方程化为

$$2\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]. \quad (15)$$

与正方形网格相同, 正三角形网格等效连续方程为各向同性二阶波动方程, 连续化后的参数与索网张紧力、密度有关, 与网格尺寸无关.

对于六角形网格结构, 需取出六角网格的代表单元, 即Y型结构(图4), 将网状结构离散成弹簧质量系统, 绳索质量集中到节点上, 绳索简化为无质量的弹簧.

中间节点质量的运动方程为

$$M \frac{\partial^2 u_{m,n}}{\partial t^2} = \frac{F_2}{l_2} (u_{m+1,n-1} - u_{m,n}) + \frac{F_2}{l_2} (u_{m,n+1} - u_{m,n}) + \frac{F_1}{l_1} (u_{m,n-1} - u_{m,n}), \quad (16)$$

其中, 水平弦长为 l_1 , 斜弦长为 l_2 , 两根斜弦夹角为 2θ . 根据节点力的平衡关系可得 $2F_2 \cos\theta = F_1$, 弹簧质量模型中每个集中质量的大小为 $M = \rho_1 l_1 / 2 + \rho_2 l_2$. 同样将胞元周围三个节点的位移用中间节点位移泰勒展开表示

$$u(x + l_1, y) = u(x, y) + l_1 u_x(x, y) + \frac{1}{2!} l_1^2 u_{xx}(x, y) + \dots, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} u(x - l_2 \cos\theta, y + l_2 \sin\theta) &= u(x, y) - l_2 \cos\theta u_x(x, y) + l_2 \sin\theta u_y(x, y) \\ &+ \frac{1}{2!} [(l_2 \cos\theta)^2 u_{xx}(x, y) - 2l_2^2 \sin\theta \cos\theta u_{xy}(x, y) \\ &+ (l_2 \sin\theta)^2 u_{yy}(x, y)] + \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &u(x - l_2 \cos\theta, y - l_2 \sin\theta) \\ &= u(x, y) - l_2 \cos\theta u_x(x, y) - l_2 \sin\theta u_y(x, y) \\ &+ \frac{1}{2!} [(l_2 \cos\theta)^2 u_{xx}(x, y) + 2l_2^2 \sin\theta \cos\theta u_{xy}(x, y) \\ &+ (l_2 \sin\theta)^2 u_{yy}(x, y)] + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

将式(17)–(19)带入运动方程(16), 可得

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{F_1}{2} \left[(l_1 + l_2 \cos\theta) u_{xx} + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} u_{yy} \right]. \quad (20)$$

当 $\theta = 60^\circ$, $l_1 = l_2 = l$, 则网格为正六边形, 每个集中质量覆盖的面积为 $S = 3\sqrt{3}l^2/4$, 上述方程化简为

$$2\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]. \quad (21)$$

可以看出, 正六边形网格均匀化后的波动方程为二阶各向同性波动方程, 连续化后的参数同样与网格

图3 (网络版彩图) 三角网格索网结构和胞元简化模型
Figure 3 (Color online) Triangle grid net structure and simplified model of unit cell.

图4 (网络版彩图) 六角形网格索网结构和胞元简化模型
Figure 4 (Color online) Hexagon grid net structure and simplified model of unit cell.

密度和绳张紧力有关,与网格尺寸无关.

从不同网格的索网结构连续化方程可以看出,虽然微结构形式不同,但连续化后的方程可以统一表示为

$$\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla u) = \rho \ddot{u}, \quad (22)$$

该连续化波动方程与薄膜结构的波动方程具有相同的形式. 控制方程中质量矩阵由材料参数和微观结构决定,刚度矩阵由绳索张紧力决定. 对于不同的网格构型,方程中质量、刚度矩阵不同,由表1给出.

2 索网结构波动控制设计的变换方法

根据均匀化的结果,对于二维索网结构的出面振动,其控制方程(式(22))具有坐标变换的形式不变性. 利用变换方法,可以通过对二维索网结构的材料参数设计实现对索网结构中波传播的控制.

根据控制方程,变换后的材料参数分别满足

$$\mathbf{K}' = \frac{\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\det \mathbf{A}}, \quad (23)$$

其中 $\mathbf{A}$ 为坐标变换的雅克比矩阵. 根据所需的波传播功能可以找到相应的变换,进而通过式(23)得到所需的材料参数的分布,再通过微结构设计实现所需的材料参数分布,即可实现对波传播的控制^[25]. 下面将考虑几种常见的变换方式,实现如压缩变换、白洞变换和鱼眼透镜等新颖的波传播方式,并通过数值计算进行验证.

2.1 压缩变换

压缩变换指使波在空间过程中实现对波长进行压缩(或拉伸)效果的一种变换,其变换关系为

表 1 不同网格结构均匀化后的质量和刚度矩阵
Table 1 Mass and stiffness matrixes for continuous models of different kinds of grid

网格形状	质量和刚度
矩形网格结构	$\rho = \rho_x / l_y + \rho_y / l_x, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} F_x / l_y & 0 \\ 0 & F_y / l_x \end{bmatrix}$
正方形网格结构	$\rho = 2\rho, K = F$
三角形网格结构	$\rho = 2\rho, K = F$
正六边形网格结构	$\rho = 2\rho, K = F$

$$x' = \alpha x, y' = y, \quad (24)$$

即波在变换后的空间传播时, x 方向波长变为之前的 α 倍, y 方向波长不变. 根据变换关系得到雅克比矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial x' / \partial x & \partial x' / \partial y \\ \partial y' / \partial x & \partial y' / \partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

将式(25)带入变换的材料参数表达式(23)可得

$$\mathbf{K}' = \begin{pmatrix} \frac{\alpha F_x}{l_y} & 0 \\ 0 & \frac{F_y}{\alpha l_x} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$\rho' = \rho / \alpha, \quad (27)$$

即在索网结构出面振动中,将绳索上 x 方向张紧力增大 α 倍, y 方向张紧力减小 α 倍,同时将绳索密度减小 α 倍即可实现上述变换.

2.2 白洞变换

对于如下形式的共形映射:

$$w = Cz^n, \quad (28)$$

其中 $z=x+iy$ 为变换前的空间, $w=x'+iy'$ 为变换后的空间, C 为任意非零常数. 假设变换前的空间为平直空间,当 n 取不同值时,可以将平直空间映射成不同形式的弯曲空间^[26].

当 $n \in (-\infty, 0)$ 时,变换将坐标无穷远点都映射到变换后坐标系的原点,可以实现波汇聚;当 $n \in (0, 1)$ 时,变换则使平直的空间坐标系下不经过原点的坐标线都避开坐标原点,因而实现使波发散. 根据 $n \in (-\infty, 0)$ 时的汇聚变换,人们已经提出了用于全方位全频段波吸收的“黑洞”装置^[26,27]. 对于 $n \in (0, 1)$ 时的发散变换由于其作用与“黑洞”相反,故称“白洞”变换,目前对于这种变换还没有相应的研究. 针对大型空间索网天线的振动控制问题,这种变换可以让网状天线外部受到的扰动避开结构的中心,有助于保护索网天线的中心工作区域.

在半径为 R 的区域选取 $n=1/2$ 的“白洞”变换关系 $w=z^{1/2}$,相应雅克比矩阵行列式为 $|J| = (R'/r)^2$,根据材料变换关系,形成“白洞”所需要的材料参数为

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K}, \quad \rho' = |J|^{-1} \rho \quad (29)$$

或

$$\mathbf{K}' = |\mathbf{J}| \mathbf{K}, \rho' = \rho. \quad (30)$$

式(29)和(30)中的两种变换形式的效果相同. 由于网状结构波动方程中的刚度由张紧力确定, 梯度变化的张紧力可能会导致网状结构的变形. 因此, 本文将选取通过改变绳索密度实现材料参数梯度变化的方式. 这时材料变换关系满足式(29), 即网状结构张紧力保持不变, 密度随半径的增加而增大.

2.3 鱼眼透镜

Maxwell鱼眼透镜是一种光学透镜, 可以实现圆形透镜区域内光从一点发射而聚焦到透镜的对称点的光学现象. Maxwell鱼眼透镜需要透镜中折射率满足 $n=n_0/(1+(r/R)^2)$. 本文将鱼眼透镜的变换关系应用到索网结构波传播的控制中.

在索网结构中, 折射率可以表达为 $n=v_0/v$, 其中 v_0 和 v 分别为变换前和变换后波在结构中传播的速度. 索网结构中的波速为 $v=\sqrt{(k/\rho)}$, 因此, 可以通过张紧力或密度调节折射率. 为使索网结构不产生变形, 令索网结构中所有绳索张紧力相同, 通过密度的改变调控结构中的折射率. 通过Maxwell鱼眼透镜的映射, 可以得到满足变换的索网结构材料参数变换关系为

$$\rho' = \rho_0 / (1 + (r/R)^2)^2, \mathbf{K}' = \mathbf{K}_0. \quad (31)$$

与白洞的变换相似, 这个变换关系设计的材料刚度不变, 而密度随半径而变化.

3 连续化模型的数值验证

为了验证均匀化方法的有效性, 本文将用有限元方法对四周固支的圆形索网结构及其等效后的圆形薄膜结构固有频率和模态进行计算, 通过对比固有频率和模态, 验证连续化模型的有效性. 薄膜结构的固有频率通过COMSOL中的PDE模块计算, 索网结构则采用有限元软件ANSYS模态分析模块计算结构的固有频率和模态, 其中绳索通过Link10单元构造, 张紧力通过单元的预应力加载. 材料参数设定如下, 索网结构由钢材组成, 弹性模量 $E=210$ GPa, 密度 $\rho=7850$ kg/m³, 绳索的初始应变 $\varepsilon=7.5 \times 10^{-4}$, 张紧力大小约为 $F=5$ N, 钢丝直径 $d=2 \times 10^{-4}$ m, 则绳索的线密度为 $\rho_f=2.46 \times 10^{-3}$ kg/m.

对于正方形网格, 根据均匀化的波动方程, 等效

参数与网格大小无关. 本文以三种不同大小的正方形网格结构为研究对象, 其中网格边长分别为 $l_1=0.01$ m, $l_2=0.005$ m和 $l_3=0.0025$ m.

根据正方形网格均匀化结果(式(6))得到均匀化的连续波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 10000 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (32)$$

计算半径 $R=0.1$ m的四周固支的圆形索网结构, 比较连续化模型与三种不同尺度正方形网格的索网结构固有频率和振动模态, 由表2给出.

可以看出, 连续化后模型振动的固有频率与原始索网结构的固有频率基本吻合. 网格尺寸对于连续化结果影响较小. 网格尺寸越小时, 连续化模型的固有频率越接近离散索网结构的固有频率. 同时, 固有频率阶数越低, 连续化模型的预测越接近于索网结构的固有频率. 提取结构振动的前四阶模态对比如图5所示. 由图中可以看出, 离散索网结构和等效连续化模型的前四阶模态基本相同.

当单胞网格为矩形时, 矩形网格结构的均匀化连续模型的等效刚度矩阵为各向异性的形式. 取材料参数与胞元为正方形网格结构相同, 令 $l_x=2$ mm, $l_y=6$ mm. 根据矩形网格均匀化结果(式(5))得到连续波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4998 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 14994 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (33)$$

计算半径 $R=110$ mm四周固支的圆形索网结构的固有频率和模态, 与均匀化连续模型作比较. 取前四阶固有频率, 连续化后的固有频率与索网结构的固有频率非常接近, 如表3所示.

表2 不同尺度正方形网格索网结构连续模型和离散模型前四阶固有频率比较

Table 2 First four nature frequencies of square grid continuous model and discrete models with different cell length

阶数	固有频率 (Hz)			
	连续模型	$l_1=0.01$ m	$l_2=0.005$ m	$l_3=0.0025$ m
1	382.74	410.12	395.29	388.74
2	609.84	665.93	635.92	622.37
3	609.84	665.93	635.92	622.37
4	817.38	876.48	846.08	830.98

图5 (网络版彩图)正方形网格索网连续模型和不同胞元尺度相应离散模型前四阶模态对比。(a)–(d)分别为连续模型, 0.01, 0.005和0.0025 m索网结构模型; (1)–(4)行分别为前四阶模态

Figure 5 (Color online) First four modals of continuous model and net structures with square grid cell with different cell lengths, columns (a)–(d) represent the continuous model, discrete model with 0.01, 0.005, 0.0025 m cell length respectively; rows (1)–(4) represent the four modals respectively.

表3 胞元为矩形索网连续模型和离散模型的前四阶固有频率比较

Table 3 First four nature frequencies of rectangular grid continuous model and discrete models

阶数	固有频率 (Hz)	
	索网结构	连续化模型
1	339.79	346.43
2	475.40	476.64
3	603.47	615.57
4	614.64	616.40

图6给出了矩形网格结构连续模型与离散索网结构前四阶模态的比较。可以看出, 两个模型除第二阶模态相反外, 其他模态基本一致。故索网结构的连续化模型能够在低频下准确描述该结构的振动特性。

4 变换方法的数值验证

在第2节中我们根据变换方法得到了使波沿特定路径传播所需的材料参数分布, 下面将材料参数连续分布离散化, 设计索网的微结构几何和材料参数, 使

图6 (网络版彩图)矩形网格索网结构连续模型和离散模型前四阶模态对比。(a), (c) 连续模型; (b), (d) 离散索网模型; (1)–(4)分别为前四阶模态

Figure 6 (Color online) First four modals of continuous model and net structures with rectangular grid cell. (a) and (c) represent the continuous model; (b) and (d) represent the discrete model; rows (1)–(4) represent the four modals respectively.

其满足所需材料参数分布要求, 然后采用有限元法建立相应索网模型, 验证所设计波传播控制的有效性。

4.1 压缩变换

原始空间中材料参数设为模量 $E=3$ GPa, 密度为 $\rho=1.15\times 10^3$ kg/m³, 绳索横截面积为 $A=0.001$ m², 初始应变为 $\varepsilon=0.04$, 网格尺寸为 $0.1\text{ m}\times 0.1\text{ m}$ 。根据给定参数可得, 绳索线密度为 $\rho_f=1.15$ kg/m, 张紧力为 $F=1.2\times 10^5$ N。

根据压缩变换, 建立一个大小为 $40\text{ m}\times 20\text{ m}$ 的矩形连续索网模型, 前 $20\text{ m}\times 20\text{ m}$ 的索网区域使用变换前的材料参数, 后 $20\text{ m}\times 20\text{ m}$ 索网区域使用变换后的材料参数。取变换系数为 $\alpha=1/4$, 即变换后将 x 方向波长压缩为原波长的 $1/4$ 。变换后 x 方向刚度变为原刚度的 $1/4$ 倍, y 方向刚度变为原刚度的 4 倍, 绳索密度变为原来的 4 倍。

根据压缩变换所需的连续材料参数, 下面设计相应的微观结构, 然后通过ANSYS中Link10单元对所设计的功能进行验证。根据变换关系, 在变换区域保持网格尺寸不变, 将 x 方向初始应变变为原来的 $1/4$ 倍($\varepsilon'_x=0.01$), y 方向将初始应变变为原来的 4 倍($\varepsilon'_y=0.16$), 两个方向绳索密度增加为原始密度的 4 倍($\rho'=4.6\times 10^3$ kg/m³)。

固定网面上所有节点 x, y 方向的位移, z 方向自由, 考察在简谐激励作用下波在索网结构中的传播。在左边界上施加频率 $f=16.67$ Hz的出面位移满足 $w=0.005\sin(2\pi ft)$, 计算波沿矩形区域 x 方向的传播。分别取 $0.06, 0.18$ s的结果如图7所示, 可以看出平面波由前半区域传播到后半区域波长减小了 $1/4$, 实现了变换

图7 (网络版彩图)压缩变换下索网结构在0.06和0.18 s时的瞬态响应

Figure 7 (Color online) The transient response of net structure with compression transformation at time 0.06 and 0.18 s.

所设计的功能。

4.2 白洞变换

原始空间中材料参数设为模量 $E=240$ MPa, 密度为 $\rho=6\times 10^4$ kg/m³, 绳索横截面积 $A=0.001$ m², 绳索初始应变 $\varepsilon=0.004$, 网格尺寸 0.4 m $\times$ 0.4 m. 根据给定参数可得, 绳索线密度为 $\rho_l=60$ kg/m, 张紧力为 $F=960$ N.

根据“白洞”的变换关系, 分别使用COMSOL中的PDE模块和ANSYS中的Link10单元建立连续模型和离散的索网模型验证“白洞”设计的有效性. 设置半径为32 m的圆形区域, 变换后区域内的密度满足变换关系 $\rho' = (R'/r')^2 \rho$. 在水平距中心22 m处施加频率为1 Hz的简谐激励.

在连续模型中, 圆形区域边界使用吸波边界条件, 计算区域内的稳态响应. 结果如图8所示, 其中图8(a)和(b)分别为均匀膜和变换后非均匀膜内位移的稳态响应, (c)图为中线上位移的幅值. 对比图(a)和(b)可以看出, 通过改变材料参数分布后, 波被导向结构周边, 中间区域的波动幅值明显减缓, 波动幅值的变化从图(c)中可以更清晰地看出.

在离散索网模型中, 为实现梯度变化的密度, 将结构沿径向分为32层, 密度随层数增加而增大, 每层

图8 (网络版彩图) (a) 均匀膜位移场; (b) 根据“白洞”变换设计的非均匀膜的位移场; (c) 两种模型下沿场中线上的位移幅值对比

Figure 8 (Color online) (a) Displacement field of continuous model for homogeneous membrane; (b) displacement field of heterogeneous membrane designed by “white hole” transformation; (c) comparison of displacements along central line of the two models.

中绳索的密度为 $\rho=(N/32)^2 \times 6 \times 10^4$ kg/m³, 其中 N 为绳索所在的层数. 索网结构四周采用固支的边界条件, 施加时长为两个周期简谐激励, 计算索网结构在5 s内的时域位移响应, 如图9所示. 可以看到, 对于均匀的索网结构, 扰动由作用点均匀扩散, 进而在整个网状结构中传播; 而在利用变换设计的索网结构中, 扰动激发的波动避开圆形区域中心, 仅在结构周边传播, 对结构中部的影响较小.

4.3 鱼眼透镜

设定原始空间材料参数为模量 $E=6.2$ MPa, 密度 $\rho_0=1220$ kg/m³, 绳索横截面积为 $A=3.14 \times 10^{-8}$ m², 应变为 $\varepsilon=0.05$, 网格尺寸为5 mm $\times$ 5 mm. 则绳索线密度为 $\rho_l=3.83 \times 10^{-5}$ kg/m, 张紧力为 $F=9.73 \times 10^{-3}$ N.

根据鱼眼透镜的变换关系, 分别使用COMSOL中的PDE模块和ANSYS中的Link10单元建立连续模型和离散的索网模型鱼眼透镜进行验证. 设定半径为0.1 m的圆形区域, 其中的材料参数满足变换关系 $\rho' = \rho_0 / (1 + (r/R)^2)^2$. 圆形区域周围采用固支边界

图9 (网络版彩图)均匀索网和“白洞”变换下索网结构在1, 3和5 s时位移的瞬态响应
Figure 9 (Color online) The transient responses of net structure without and with “white hole” transformation at time 1, 3 and 5 s.

条件, 在圆形区域据中心0.08 m处施加频率为200 Hz 振幅为0.001 m的位移激励。

在连续模型中, 结构的稳态响应如图10所示, 可以看到波源发出的波被聚焦到圆形区域内对称的另一点上, 实现了Maxwell鱼眼的聚焦效果。

在离散索网模型中, 为实现网状结构中密度的梯度变化, 将网状结构沿径向分为10层, 每层密度依照变换关系满足 $\rho' = 1220 / (1 + (N/10)^2)^2 \text{ kg/m}^3$, 其中 N 为层数。计算波在结构中的瞬态响应, 结果如图11所示。利用变换设计的非均匀索网结构内扰动激发的波被汇聚到与圆形区域内对称的点上, 结果与连续模型的结果一致, 实现了鱼眼透镜的聚焦效果。

5 结论

本文提出基于索网结构的坐标变换方法, 建立了不同胞元索网结构均匀化模型, 实现了索网结构中压

图10 (网络版彩图)鱼眼透镜连续模型的位移场分布
Figure 10 (Color online) Displacement field of continuous model with fisheye function.

图11 (网络版彩图)鱼眼透镜变换下索网结构在0.005, 0.01, 0.015和0.02 s时位移的瞬态响应
Figure 11 (Color online) The transient response of net structure designed with fisheye transformation at time 0.005, 0.01, 0.015 and 0.02 s.

缩变换、白洞变换、鱼眼透镜等新颖的波传播控制设计。通过将含有三角网格、矩形网格和六角网格胞元的索网结构均匀化为等效薄膜, 建立了可描述具有不同微结构的索网统一的控制方程, 其控制方程的刚度矩阵和质量矩阵仅由材料参数决定。通过有限元方法验证, 所提出的连续化模型能够在低频下准确描述网状结构的振动。基于连续化模型波动方程的坐标变换不变性, 采用坐标变换方法得到变换后材料参数的分布规律, 并通过设计索网的微结构, 实现了索网结构中新颖的可控波传播方式。该方法可为大型空间索网结构的振动控制提供新的思路。

参考文献

- 1 Balas M. Feedback control of flexible systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 1978, 23: 673–679
- 2 Bontsema J, Curtain R F. A note on spillover and robustness for flexible systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 1988, 33: 567–569
- 3 Balas M J. Active control of flexible systems. *J Optim Theor Appl*, 1978, 25: 415–436
- 4 Braghin F, Cinquemani S, Resta F. A new approach to the synthesis of modal control laws in active structural vibration control. *J Vib Control*, 2013, 19: 163–182
- 5 Liu X X, Hu J. On the placement of actuators and sensors for flexible structures with closely spaced modes. *Sci China Tech Sci*, 2010, 53: 1973–1982
- 6 Liu X X, Hu J. Low order vibration control for structures with highly correlated close modes. *Sci China Tech Sci*, 2011, 54: 1855–1864
- 7 Pendry J B, Schurig D, Smith D R. Controlling electromagnetic fields. *Science*, 2006, 312: 1780–1782
- 8 Leonhardt U, Philbin T G. Transformation optics and the geometry of light. *Prog Opt*, 2009, 53: 69–152
- 9 Schurig D, Mock J J, Justice B J, et al. Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. *Science*, 2006, 314: 977–980
- 10 Chen H, Chan C T. Transformation media that rotate electromagnetic fields. *Appl Phys Lett*, 2007, 90: 241105
- 11 Chen H, Hou B, Chen S, et al. Design and experimental realization of a broadband transformation media field rotator at microwave frequencies. *Phys Rev Lett*, 2009, 102: 183903
- 12 Tsang M, Psaltis D. Magnifying perfect lens and superlens design by coordinate transformation. *Phys Rev B*, 2008, 77: 035122, arXiv: 0708.0262
- 13 Chen H, Zhang X, Luo X, et al. Reshaping the perfect electrical conductor cylinder arbitrarily. *New J Phys*, 2008, 10: 113016, arXiv: 0808.0536
- 14 Luo X, Yang T, Gu Y, et al. Conceal an entrance by means of superscatterer. *Appl Phys Lett*, 2009, 94: 223513, arXiv: 0809.1823
- 15 Chen H, Chan C T. Acoustic cloaking in three dimensions using acoustic metamaterials. *Appl Phys Lett*, 2007, 91: 183518
- 16 Hu J. Coordinate Transformations Method Based on Deformation View and Its Application to Invisibility Design (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2009. 73–84 [胡进. 基于变形视角的坐标变换方法及其在波隐身中的应用. 博士学位论文. 北京: 北京理工大学, 2009. 73–84]
- 17 Norris A N. Acoustic metafluids. *J Acoust Soc Am*, 2009, 125: 839–849, arXiv: 0808.3276
- 18 Milton G W, Briane M, Willis J R. On cloaking for elasticity and physical equations with a transformation invariant form. *New J Phys*, 2006, 8: 248–248
- 19 Farhat M, Guenneau S, Enoch S, et al. Cloaking bending waves propagating in thin elastic plates. *Phys Rev B*, 2009, 79: 033102
- 20 Farhat M, Guenneau S, Enoch S. Ultrabroadband elastic cloaking in thin plates. *Phys Rev Lett*, 2009, 103: 024301
- 21 Stenger N, Wilhelm M, Wegener M. Experiments on elastic cloaking in thin plates. *Phys Rev Lett*, 2012, 108: 014301
- 22 Colquitt D J, Brun M, Gei M, et al. Transformation elastodynamics and cloaking for flexural waves. *J Mech Phys Solids*, 2014, 72: 131–143, arXiv: 1401.7579
- 23 Liu Y, Ma Z, Su X. Linear transformation method to control flexural waves in thin plates. *J Acoust Soc Am*, 2016, 140: 1154–1161
- 24 Hu G K, Zheng Q S, Huang Z P. Micromechanics methods for effective elastic properties of composite materials (in Chinese). *Adv Mech*, 2001, 31: 361–393 [胡更开, 郑泉水, 黄筑平. 复合材料有效弹性性质分析方法. 力学进展, 2001, 31: 361–393]
- 25 Hu J, Liu X, Hu G. Constraint condition on transformation relation for generalized acoustics. *Wave Motion*, 2013, 50: 170–179
- 26 Chang Z, Hu G. Elastic wave omnidirectional absorbers designed by transformation method. *Appl Phys Lett*, 2012, 101: 054102
- 27 Zhou J, Cai X, Chang Z, et al. Experimental study on a broadband omnidirectional electromagnetic absorber. *J Opt*, 2011, 13: 085103

Wave control in net structure based on transformation method

ZHOU Jiao¹, ZHANG Kai^{1*}, PENG FuJun² & HU GengKai^{1*}

¹ School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

² Aerospace System Engineering in Shanghai, Shanghai 201108, China

Due to the features of large size, light weight, and highly deployable capacity, the net structure has been successfully used in large space developable antennas. Here we explore the possibility of wave control in net structure by utilizing coordinate transformation method. For low-frequency flexural wave, the net structure can be homogenized as a thin membrane with effective mass and stiffness. For the net structures with regular triangle, regular square and regular hexagon lattices, their effective mass matrix and stiffness matrix can be simplified to isotropic forms. The homogenized continuous model is verified by the comparison of natural frequencies with the corresponding net structures. As the homogenized governing wave equation keeps form invariance, the coordinate transformation method can be used to control the wave propagation in the net structure. Based on the compression, “white hole” and Maxwell fisheye transformation, the required effective material parameters distributions are obtained. According to the expression of the effective mass and stiffness, the distributions of geometry and material parameters are realized. Finally, wave propagations in the designed net structures are validated numerically by using finite element method. Our work provides a novel concept to the vibration suppression on net structure in engineering applications.

net structure, homogenization, transformation method, wave control

PACS: 46.70.Hg, 46.40.Cd, 46.40.-f, 62.30.+d

doi: [10.1360/SSPMA2017-00098](https://doi.org/10.1360/SSPMA2017-00098)