有限超可解群的新描述

李保军^{①*}, Alexander N SKIBA^②

^① 中国科学技术大学数学系, 合肥 230026

^② Department of Mathematics, Gomel State University of F. Skoring, Gomel 246028, Belarus

* E-mail: baojunli@mail.ustc.edu.cn

收稿日期: 2006-10-12; 接受日期: 2007-08-16

国家自然科学基金 (批准号: 10771180) 和中国科学技术大学研究生创新基金资助项目

摘要 设 A 为群 G 的一个子群且 X 为 G 的一个非空子集. 如果 A 在 G 内有一个补充 T 满足对 T 的任意子群 T_1 存在一个元素 $x \in X$, 使得 $AT_1^x = T_1^x A$, 则称 A 为 G 的 X -半置换子群. 在这一概念的基础上得到有限超可解群的一些新描述.

关键词 有限群 补充 2-极大子群 X -半置换 超可解群

MSC(2000) 主题分类 20D10

1 引言

本文中所有群都是有限的. 设 A 和 B 为群 G 的子群且 $\emptyset \neq X \subseteq G$. 如果 $AB = BA$, 那么 A 叫作与 B 置换的. 如果对于某个 $x \in X$ 有 $AB^x = B^x A$, 那么 A 叫作与 B 是 X -置换的^[1-5]. 沿用文献 [6] 中的说法, 我们称 A 是在 G 内 X -半置换的, 如果 A 与它在 G 内的某个补充的所有子群 X -置换. 文献 [6] 中给出了 X -半置换性的例子和一些应用. 本文利用 X -半置换子群得到群的超可解性的一些新判别准则.

我们的第 1 个结论是与 2-极大子群相联系的. 群 G 的一个子群 H 称作 2-极大子群, 如果 H 是 G 的某个极大子群的一个极大子群. 应用一个群 G 的 2-极大子群的某些信息来确定群的结构是有意义的. 在这个方向上的第 1 个结论是 Huppert^[7] 得到的, 他证明了如果一个群的所有 2-极大子群正规, 那么它是超可解的. 后来, Suzuki^[8] 和 Janko^[9] 得到了 2-极大子群幂零的非可解群的一个刻画. 在文献 [10] 中, Belonogov 得到了 2-极大子群幂零的可解群的一个刻画. 我们还注意到 Semenchuk 在文献 [11] 中给出了 2-极大子群为超可解的可解群的一个刻画. 在文献 [12] 中, Agrawal 证明了一个群 G 是超可解的, 如果它的所有 2-极大子群与它的 Sylow 子群置换. Poljakov^[13] 证明了每个 2-极大子群与所有极大子群置换的群的超可解性. 文献 [14] 给出了 2-极大子群与所有 3-极大子群置换的群的一个刻画. 近来, 郭文彬等^[2] 证明了一个群 G 是超可解的, 如果它的任意 2-极大子群与 G 的所有子群是 G -置换的.

本文证明了以下两个超可解群的新的描述定理:

定理 A 设 G 是一个群, $\Sigma_G = \{M \mid M \text{ 是 } G \text{ 的一个非准素指数的 2-极大子群且 } M/M_G \cap F(G/M_G) = 1\}$, $\Delta_G = \{M \mid M \text{ 是 } G \text{ 的一个非准素指数的 2-极大子群且 } \Phi(G) < M \cap F(G) < F(G)\}$, 则 G 是超可解的当且仅当以下条件成立:

- (a) Σ_G 的每个元素在 G 内是 $F(G)$ -半置换的;
- (b) 设 N 是 G 的任意正规子群. 如果 $\Delta_{G/N} \neq \emptyset$, 那么存在一个群 $M/N \in \Delta_{G/N}$, 使得 M/N 在 G/N 内是 $F(G/N)$ -半置换的.

定理 B 一个群 G 的所有非准素指数的 2-极大子群在 G 内是 $F(G)$ -半置换的, 当且仅当以下条件成立:

- (a) G 是超可解的;
- (b) 对任意元素 $p \in \pi(G)$, 如果 $\bar{P}$ 是 $\bar{G} = G/O_{p'}(G)$ 的 Sylow p -子群的一个极大子群, 那么 $N_{\bar{G}}(\bar{P})$ 在 $\bar{G}$ 内不是极大的.

近年来, 许多文章研究 Sylow 子群的极大子群或 2-极大子群与群的结构之间的关系 (如文献 [15]). 我们研究这样的群 G , 它的 Sylow 子群的某个子群在 G 内是 $F(G)$ -半置换的. 众所周知如果 G 是一个超可解群, 则对任意素数 p , $G/O_{p',p}(G)$ 是一个幂指数整除 $p-1$ 的交换群. 下面的定理表明在 G 的所有 Sylow 子群在 G 内是 $F(G)$ -半置换的附加条件下, 每个这样的商群是循环的.

定理 C 如果一个群 G 的每个 Sylow 子群在 G 内是 $F(G)$ -半置换的, 那么 G 是超可解的且对任意的素数 p , $G/O_{p',p}(G)$ 是一个阶整除 $p-1$ 的循环群.

文献 [6] 中证明了一个群 G 是超可解的当且仅当它的每个极大子群在 G 内是 $F(G)$ -半置换的. 对 Sylow 子群的极大子群, 我们有下面的相类似的结论:

定理 D 一个群 G 是超可解的当且仅当 G 的每个 Sylow 子群的任一在 G 内没有超可解补充的极大子群在 G 内是 $F(G)$ -半置换的.

一般地, 一个群 G 不必为超可解的, 即使它的 Sylow 子群的所有 2-极大子群是正规的. 例如 A_4 . 然而, 我们有

定理 E 设 G 是一个群且 p 是 $|G|$ 的最小素因子. 如果 G 是 A_4 -自由的且 G 的每个 Sylow p -子群的每个 2-极大子群在 G 内是 $O_{p',p}(G)$ -半置换的, 那么 G 是 p -幂零的.

2 预备知识

文中未交待的概念和符号是标准的, 读者可以参见文献 [16–18].

沿用文献 [6] 中记号, 我们用 $X(A)$ 表示 A 在 G 内的所有这样的补充 T 的集合, 其中 T 满足 A 与 T 的所有子群是 X -置换的.

下面的引理描述了 X -半置换子群的一般性质:

引理 2.1(文献 [6] 的引理 2.4) 设 A 和 X 是 G 的子群, 则下面的断言成立:

- (1) 如果 N 是 G 的一个置换子群且 A 在 G 内是 X -半置换的, 那么 NA 在 G 内是一个 X -半置换子群.
- (2) 如果 $N \trianglelefteq G$, A 在 G 内是 X -半置换的, $T \in X(A)$, 那么 AN/N 在 G/N 内是 XN/N -半置换的且 $TN/N \in (XN/N)(AN/N)$.

(3) 如果 A/N 在 G/N 内是 XN/N -半置换的, 且 $T/N \in (XN/N)(A/N)$, 那么 A 在 G 内是 X -半置换的且 $T \in X(A)$.

(4) 如果 A 在 G 内是 X -半置换的, $A \leq D \leq G$ 且 $X \leq D$, 那么 A 在 D 内是 X -半置换的.

(5) 如果 A 是 G 的一个极大子群, T 是 A 在 G 内的一个极小补充且 $T \in G(A)$, 那么对某个素数 p 有 $T = \langle a \rangle$ 是一个循环 p -群, 且 $a^p \in A$.

(6) 如果 $T \in X(A)$ 且 $A \leq N_G(X)$, 那么对所有 $x \in G$ 有 $T^x \in X(A)$.

(7) 如果 A 在 G 内是 X -半置换的且 $X \leq D$, 那么 A 在 G 内是 D -半置换的.

下面两个引理是众所周知的:

引理 2.2 设 A 和 B 是 G 的真子群且 $G = AB$, 则对所有 $x \in G$ 有 $G = AB^x$ 但 $G \neq AA^x$.

引理 2.3 设 A 和 B 是 G 的子群, 使得 $G = AB$. 那么以下说法正确:

(i) 分别存在 A, B 和 G 的 Sylow p -子群 A_p, B_p 和 G_p , 使得 $G_p = A_p B_p$.

(ii) 如果 G 是可解的, 那么对任意的素数集合 π , 分别存在 A, B 和 G 的 Hall π -子群 A_π, B_π 和 G_π , 使得 $G_\pi = A_\pi B_\pi$.

引理 2.4 (文献 [19] 的定理 3) 设 A 和 B 是 G 的子群, 使得 $G \neq AB$ 且 $AB^x = B^x A$ 对所有 $x \in G$ 成立, 则 G 有一个真正规子群 N , 使得或者 $A \leq N$ 或者 $B \leq N$.

引理 2.5 (文献 [20] 的定理 3.4) 设 G 为一个群. 如果 $G = AB$, 其中 A 是 G 的一个超可解子群, B 是一个奇阶循环群, 那么 G 是可解的.

引理 2.6 (文献 [6] 的定理 1.2) 设 A 是群 G 的一个 Hall 子群. 假设 A 在 G 内是 $F(G)$ -半置换的并设 $T \in F(G)(A)$ 为 A 在 G 内的一个极小补充, 则 T 是 A 在 G 内的一个补.

引理 2.7 设 P 是 G 的一个 Sylow 2-子群. 如果 P 在 G 内是 $F(G)$ -半置换的, 那么 G 是可解的.

证明 事实上, 只需证明 G 有一个交换的极小正规子群. 假设这一点不成立, 则 $F(G) = 1$, 因此, 如果 L 是 G 的一个极小次正规子群, 那么 L 是一个非交换的单群. 设 $T \in F(G)(P)$ 是 P 在 G 内的一个极小补充, 则 P 与 T 的所有子群置换, 且因此由引理 2.6 有 T 是 G 的一个 Hall 子群. 因此 $L = (P \cap L)(T \cap L)$. 由 Feit-Thompson 定理, $P \cap L$ 是 L 的一个非平凡的 Sylow 2-子群, 此外, 由著名的 Burnside $\{p, q\}$ -定理, 对 T 的一个 Sylow 子群 Q 有 $Q \cap L \neq T \cap L$. 注意到对任意的 $a \in L$ 有 $(P \cap L)(Q \cap L)^a = (Q \cap L)^a(P \cap L)$. 事实上, 由引理 2.1(6), P 与 Q^a 置换且因此 $L \cap PQ^a = (P \cap L)(Q^a \cap L) = (P \cap L)(Q \cap L)^a = (Q \cap L)^a(P \cap L)$. 因为 $(P \cap L)(Q \cap L)^a \neq L$, 所以由引理 2.4 有 L 非单. 这一矛盾完成了引理的证明.

引理 2.8 设 p 是群 G 阶的极小素因子. 假设 G 是 A_4 -自由的且 L 是 G 的一个正规子群. 如果 G/L 是 p -幂零的且 $p^3 \nmid |L|$, 那么 G 是 p -幂零的.

证明 因为 G/L 是 p -幂零的, 故有 G/L 是 p' -闭的, 即 G/L 有一个正规的 Hall p' -子群. 令 M/L 是 G/L 的 Hall p' -子群, 则 $M \leq G$ 且 $p^3 \nmid |M|$, 因此 M 是 p -幂零的 (参见文献 [21, 10.1.9]). 因为 $M \leq G$ 且 $|G : M|$ 是一个 p -数, 所以 G 是 p -幂零的.

引理 2.9 (文献 [22] 的引理 2.23) 设 G 是一个群, p 和 q 是 $|G|$ 的两个不同素因子, P 是 G 的一个非循环 Sylow p -子群, 且 Q 是 G 的一个 Sylow q -子群. 如果 P 的所有极大子群 (1 除外) 在 G 内有一个 q -闭的补充, 那么 Q 在 G 内是正规的.

引理 2.10 假设 $G = HM$, 其中 $H \trianglelefteq G$, M 在 G 内 H -半置换. 如果 H 交换且 M 是超可解的, 那么 G 是超可解的.

证明 设 R 是 G 的一个极小正规子群, 则 $G/R = (HR/R)(MR/R)$, HR/R 是交换的且 MR/R 是超可解的. 由引理 2.1(2), 有 MR/R 在 G/R 内是 HR/R -半置换的, 因此, 由对 $|G|$ 的归纳, G/R 是超可解的. 如果 G 有另一极小正规子群或者 $R \subseteq \Phi(G)$, 那么 G 是超可解的, 因为所有超可解群的集合是一个饱和群系, 这使得 $R = C_G(R) = F(G)$ 且 $R = H$ 是 G 的唯一极小正规子群. 设 $|H| = p^\alpha$, 对某个 $p \in \mathbb{P}$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

假设 $T \in H(M)$ 是 M 在 G 内的一个极小补充, 则 T 是一个 p -群, 因为 $|G : M| = |H : (M \cap H)|$ 是一个 p -数且 T 是 M 在 G 内的一个极小补充. 设 P 是 T 的一个极大子群, 则由 T 的选择, 对某个 $x \in H$ 有 M 与 P^x 置换. 由引理 2.2 知 $G = MT = MT^x$, 因此 $|G : MP^x| = |MT^x : MP^x| = \frac{|M||T^x||M \cap P^x|}{|M||P^x||M \cap T^x|} = \frac{|T^x||M \cap P^x|}{|P^x||M \cap T^x|} = p|M \cap P^x|/|M \cap T^x|$. 显然, $M \cap P^x \subseteq M \cap T^x$. 因为由 T 的选择 MP^x 是 G 的一个真子群, 所以 $M \cap P^x = M \cap T^x$ 且 $|G : MP^x| = p$. 因此, 由 $|H : H \cap MP^x| = |HMP^x : MP^x| = |G : MP^x| = p$, 得到 $H \cap MP^x$ 在 H 内是极大的. 因为 $H \cap MP^x \trianglelefteq MP^x$ 且 H 是交换的, 故 $G = MH \subseteq N_G(H \cap MP^x)$, 即 $H \cap MP^x \trianglelefteq G$. H 在 G 内的极小正规性表明 $H \cap MP^x = 1$, 从而 H 是循环的. 由此得到 G 是超可解的.

3 定理 A 和 B 的证明

定理 A 的证明 1) 首先, 假设 (a) 与 (b) 都成立, 我们证明 G 是超可解的. 假设不然并令 G 是一个极小阶反例, 则

(1) G 不是一个非交换单群.

假设 G 是一个非交换单群, 则 $F(G) = 1$. 如果 G 的所有极大子群是超可解的, 那么 G 是可解的^[23]. 但这是不可能的, 因为 $F(G) = 1$, 因此 G 有一个非超可解的极大子群 M . 假设 M 在 G 内有非准素指数并设 T 为 M 的一个极大子群, 则 $T \neq 1$ 且 T 在 G 内也有非准素指数. 因此, 由假设, T 在 G 内是 $F(G)$ -半置换的, 由此得到 T 在 M 内是 $F(G)$ -半置换的. 由引理 2.1(5), $|M : T|$ 是一个素数. 这表明 M 的每个极大子群有素数指数, 因此, 由 Huppert 定理, M 是超可解的. 这一矛盾表明 $|G : M| = p^\alpha$, 对某个素数 p . 显然, M 有一个极大子群 T , 使得 $(p, |M : T|) = 1$ 并因此有 T 在 G 内是 $F(G)$ -半置换的. 于是, T 在 G 内存在一个极小补充 A , 使得 A 的每个子群与 T 置换, 因为 $F(G) = 1$. 设 A_1 是 A 的一个极大子群. 对任意元素 $x \in G$, 因为 $G = AT$, 故有 $x = at$ 对某个 $a \in A$ 和 $t \in T$. 因为 $T(A_1)^a = (A_1)^a T$, 所以 $((A_1)^a T)^t = (A_1)^{xt} T$ 是 G 的一个子群. 因为 A 是 T 在 G 内的一个极小补充, 所以由引理 2.2, $(A_1)^{xt} T \neq G$. 然而在这种情形下, 由引理 2.4, 知 G 有一个真正规子群, 矛盾.

(2) 对 G 的每个极小正规子群 N , 商群 G/N 是超可解的.

事实上, 设 M/N 是 G/N 的一个 2-极大子群, 使得 $M/N \in \Sigma_{G/N}$, 则 $|G : M|$ 不是一个素数的幂且 $M/M_G \cap F(G/M_G) \cong (M/N)/(M/N)_{G/N} \cap F((G/N)/(M/N)_{G/N}) = 1$. 因而 $M \in \Sigma_G$. 由条件, M 在 G 内是 $F(G)$ -半置换的, 并因此由引理 2.1(2) 有 M/N 在 G/N 内是 $F(G)N/N$ -半置换的. 因为 $F(G)N/N \leq F(G/N)$, 故有 M/N 在 G/N 内是 $F(G/N)$ -半置换的. 条件 b) 显然对 G/N 也成立. 因此, 由 G 的选择, 我们得到 G/N 是超可解的.

(3) G 有唯一极小正规子群 H 且 $\Phi(G) = 1$.

这可由 (2) 和所有超可解群的群类是一个饱和群系直接得到.

(4) G 是可解的.

由 (2), 只需证明 H 是可解的. 假设这一点不成立, 则由 (3) 有 $F(G) = 1$. 设 $H \leq M$, 这里 M 是 G 的一个极大子群. 由 (2), $|G : M| = p$ 是一个素数. 我们断言存在 M 的某个极大子群 T , 使得 $M = HT$ 且 $(|M : T|, p) = 1$. 事实上, 假设 p 整除 $|H|$ 并设 P 是 G 的一个 Sylow p -子群且包含 M 的某个 Sylow p -子群 M_p , 则 $H_p = H \cap P$ 是 H 的一个 Sylow p -子群, 因为 $H \trianglelefteq G$. 显然, $P \leq N = N_G(H_p)$. 由 Frattini 论断, $G = HN$, 因此 $M = M \cap HN = H(M \cap N)$. 因为 H 不是交换的, $N \neq G$, 因此 $M \cap N \neq M$. 设 T 是 M 的一个包含 $M \cap N$ 的极大子群, 则 $M = HT$ 且 $(|M : T|, p) = 1$, 因为 $M_p \leq M \cap N \leq T$. 现在假设 $(|H|, p) = 1$, 则因为 $H \not\leq \Phi(M)$, 所以存在 M 的一个极大子群 T , 使得 $M = HT$. 很明显 p 不整除 $|M : T| = |H|/|H \cap T|$, 因此我们的断言成立.

我们得到 T 是 G 的一个非准素指数的 2-极大子群且因为 $T \cap F(G) = F(G) = 1$, 有 $T \in \Sigma_G$. 由条件有 T 在 G 内是 $F(G)$ -半置换的. 由引理 2.1(4) 和 (5), 有 $|M : T| = q$ 对某个素数 $q \neq p$, 因此 $|G : T| = pq$. 设 A 是 T 的一个极小补充, 使得它的每个子群与 T 是 $F(G)$ -置换的, 则 $G = TA$ 且 $A \cap T \leq \Phi(A)$, 因此 A 是一个 $\{p, q\}$ -群. 设 A_p 是 A 的一个 Sylow p -子群. 因为 $F(G) = 1$, 所以 $TA_p = A_pT$. 设 $D = TA_p$, 则 $|G : D| = q$. 此外, 因为 $|G : M| = p$ 且 $M = HT$, 我们知道 $H \not\leq D$, 因此 $D_G = 1$. 考虑 G 在 D 的右陪集上的置换表示, 我们得到 G 同构与 q 次对称群 S_q 的某个子群. 由此有 D 是 G 的一个 Hall q' -子群且 $G = DZ_q$, 其中 Z_q 是一个 q 阶子群. 由于 D 的每个极大子群在 G 内有非准素指数并因此属于 Σ_G , 所以 D 的每个极大子群在 G 内是 $F(G)$ -半置换的, 并且因此, 由引理 2.1(4), 是在 D 内 $F(G)$ -半置换的, 从而由引理 2.1(5), D 的每个极大子群在 D 内有素数指数. 于是 D 超可解并因此由引理 2.5 有 G 是可解的. 这一矛盾完成了 (4) 的证明.

(5) $H = C_G(H) = F(G) = O_p(G)$, 对某个素数 $p \neq |H|$. 这可由 (2), (3) 和 (4) 直接得到.

(6) 最后的矛盾.

由于 (5), 我们有 G 的某个极大子群 E , 使得 $G = [H]E$ 且 $E_G = 1$. 由 (2), E 是超可解的, 因此 E 包含一个极大子群 E_1 , 使得 $|E : E_1| = q \neq p$. 现在由假设, E_1 在 G 内是 H -半置换的. 设 $T \in H(E_1)$ 是 E_1 在 G 内的一个极小补充. 用 r 表示 $|G|$ 的最大素因子.

假设 $r = p$, 则因为 G/H 是超可解的且 $O_p(G/H) = 1$, 我们知道 H 是 G 的一个 Sylow 子群. 显然, $H \leq T$. 设 H_1 是 H 的一个极大子群, 则对某个 $x \in H$ 有 $H_1^x E_1 = E_1 H_1^x$. 但 H 是交换的, 所以 $H_1^x E_1 = H_1 E_1$ 是 G 的一个子群, 因此 $H_1 = H \cap H_1 E_1 \trianglelefteq H_1 E_1$, 这意味着 $E_1 \leq N_G(H_1)$. 如果 E 有另一个极大子群 E_2 , 那么也有 $E_2 \leq N_G(H_1)$, 因此 $E = \langle E_1, E_2 \rangle \leq N_G(H_1)$. 这表明 $H_1 \trianglelefteq G$ 并且因此由 H 的极小性有 $H_1 = 1$, 所以 $|H| = p$, 从而 G 是超可解的. 这与 G 的选择是一个矛盾. 从而 E 仅有一个极大子群 E_1 并且因此 E 是循环的. 设 $A = H_1 E_1$. 显然, A 是 $E_1 H$ 的一个极大子群且 $A \in \Delta_G$. 因此, 由条件存在 G 的一个 2-极大子群 M , 使得 $M \in \Delta_G$ 且 M 在 G 内是 H -半置换的. 设 $R = M \cap H$. 因为 $M \in \Delta_G$, 故有 $1 \neq R \neq H$. 明显地, $R \trianglelefteq MH$, 所以 $G \neq MH$. 假设 $T \in H(M)$ 是 M 在 G 内的一个极小补充. 因为 E 是 G 的一个 Hall p' -子群且 G 是可解的, 由引理 2.3, 存在一个元素 $x \in G$, 使得 $E^x = (E^x \cap M)(E^x \cap T)$. 但是 E 是循环的且 $E^x \not\leq M$, 所以 $E^x \leq T$, 因此, 由条件存在一个元素 $y \in H$, 使得 ME^{xy} 是 G 的一个子群. 容易知道 R 是 ME^{xy} 的一个 Sylow

p -子群, 所以 $R \trianglelefteq ME^{xy}$. H 是交换的表明 $R \trianglelefteq G$. 但是由 R 的选择和 H 的极小性, 知这是不可能的. 矛盾表明 $p \neq r$.

因此, 不失一般性, 可以假设 $r = q$. 我们断言 E 的 Sylow q -子群 Q 的阶是 q 且 E/Q 是一个 p -群. 否则, E 有一个 p' -指数的极大子群 X 且 X 不是一个 q' -群. 事实上, 如果 E 不是一个 $\{p, q\}$ -群, 我们可以选择 X 是 E 的任意包含 E 的某个 Hall $\{p, q\}$ -子群的极大子群, 如果 $q^2 \mid |E|$, 那么对 E 的任意的极大子群 X , q 整除 $|X|$, 这是因为由 E 的超可解性有 $|E : X|$ 是素数. 明显地 $X \in \Sigma_G$ 并且因此 X 在 G 内是 H -半置换的. 由引理 2.1(4), X 在 XH 内也是 H -半置换的, 因此, 由引理 2.10, 我们知道 XH 是超可解的. 因而, XH 的唯一 Sylow q -子群在 XH 内是正规的并因此含于 $C_G(H) = H$. 这是一个矛盾. 因此, 我们可以假设 $|G| = p^\alpha q$, 对某个 $\alpha \in \mathbb{N}$, 并且因此 G 的一个 Sylow p -子群 G_p 也是 G 的极大子群. 设 P 是 G_p 的一个包含 E 的某个 Sylow p -子群的极大子群. 明显地, $P \in \Delta_G$, 因此 $\Delta_G \neq \emptyset$. 从而存在一个元素 $M \in \Delta_G$, 使得 M 在 G 内是 H -半置换的. 如果 M 不是一个 p -群, 那么 $q \mid |M|$. 因为 $|G| = p^\alpha q$, 所以 M 在 G 内的指数是一个 p -数. 这与 M 的选择矛盾, 所以 M 是一个 p -群. 因为 M 在 G 内是 2 -极大的, 所以存在 G 的某个极大子群 U , 使得 M 在 U 内是极大的. 如果 $H \not\subseteq U$, 那么 $H \cap U = 1$, 这是因为 $H \cap U \trianglelefteq HU = G$ 且 H 是 G 的极小正规子群, 因此 $F(G) \cap M = H \cap M = 1$. 这矛盾于 M 的选择, 所以 $H \leq U$. 因为 G/H 是超可解的, $|G : U|$ 是一个素数. 易知, M 在 U 内也是 H -半置换的. 由引理 2.1(4) 和 (5), M 在 U 内有素数指数并且因此 $|G : M| = pq$. 于是 M 是 G 的某个 Sylow p -子群 G_p 的极大子群, 且 $M \cap H$ 是 H 的一个极大子群, 因为由 M 的选择, $M \cap H < H$. 明显地, $G = MHQ$ 且 M 在 G 的每个补充必然包含 Q 某个共轭. 所以对某个 $x \in G$, MQ^x 是 G 的一个子群. 因为 $H \cap M = H \cap MQ^x \trianglelefteq MQ^x$ 且 H 是交换的, 我们有 $M \cap H \trianglelefteq G$. 这与 H 的极小性矛盾, 因此, 充分性成立.

2) 现在证明必要性.

假设 G 是一个超可解群, 则 $G' \leq F(G)$. 首先由对 $|G|$ 的归纳证明对每个子群 $M \in \Sigma_G$ 和 M 在 G 内的任意极小补充 T , M 与 T 的所有子群 G' -置换. 事实上, 设 $M_G \neq 1$. 那么 TM_G/M_G 是 M/M_G 在 G/M_G 内的一个极小补充. 实际上, 如果 $T_0/M_G \leq TM_G/M_G$ 且 $(T_0/M_G)(M/M_G) = G/M_G$, 则 $T_0 = T_0 \cap M_G T = M_G(T_0 \cap T)$, 并因而有 $T_0 M = G = (T_0 \cap T)M$. 因此 $T \leq T_0$, 于是 $T_0/M_G = TM_G/M_G$ 是 M/M_G 在 G/M_G 内的一个极小补充. 所以, 对 T 的任意子群 T_1 , 由归纳, 子群 M/M_G 与 $T_1 M_G/M_G$ 是 $(G/M_G)'$ -置换的. 但是 $(G/M_G)' = G' M_G/M_G$, 所以 M 与 T_1 是 G' -置换的.

假设 $M_G = 1$, 则由 M 的选择, $F(G) \cap M = 1$. 因为 G 是超可解的, 我们可以假设 $|G : M| = pq$, 其中 $p > q$. 因此, 明显地, $|F(G)| \in \{p, q, pq\}$. 因为 G 是超可解的, 它有一个正规的 Sylow r -子群 G_r , 这里 r 是 $|G|$ 的最大素因子, 显然, $G_r \subseteq F(G)$, 所以 $|G_r| = p$, 因而 $|F(G)| = q$ 的情形是不可能的.

设 $|F(G)| = pq$, 则任意 $\{p, q\}$ -子群 A , 存在 $x \in O_p(G)$, 使得 $A^x M = M A^x$, 因此若 $O_p(G) \subseteq G'$, 则结论成立, 否则 M 是 G 的一个 Hall $\{p, q\}'$ -子群, 因此, $F(G)$ 是 G 的唯一 Hall $\{p, q\}$ -子群. 注意到因为 T 是 G 的一个 $\{p, q\}$ -子群, 所以 $T = F(G)$. 由 $|F(G)| = pq$, $F(G)$ 的任意子群在 G 内是正规的, 所以 M 与 T 的所有子群置换.

令 $|F(G)| = p$, 则 $G = [F(G)]E$, 对 G 的某个极大子群 E 且 $C_G(F(G)) = F(G)$, 因此

E 是一个循环 p' -群. 不失一般性, 可以假设 $M \subseteq E$. 我们证明 M 与 T 的任意子群 T_1 是 G' -置换的. 设 $P = T_1 \cap F(G)$. 因为 $|F(G)| = p$, $P = 1$ 或 $F(G)$, 因此在 G 内是正规的, 因为 $F(G)$ 是 G 的唯一 Sylow p -子群, P 是 T_1 的 Sylow p -子群或 T_1 是一个 p' -群. 设 A 是 T_1 的 Hall p' -子群, 则 $T_1 = PA$. 如果 $G' = 1$, 那么 G 是交换的, 因此 $MT_1 = T_1M$. 设 $G' \neq 1$. 因为 $|F(G)| = p$ 且由 G 的超可解性有 $G' \subseteq F(G)$, 所以 $G' = F(G)$. 于是存在某个元素 $x \in F(G) = G'$, 使得 $A^x \subseteq E$. 我们得到 $MT_1^x = MPA^x = PA^xM = T_1^xM$.

因而, M 与 T 的所有子群 G' -置换, 于是 M 在 G 内 G' -半置换. 因为 G 是超可解的, $G' \leq F(G)$, 所以, 由引理 2.1(7), (a) 成立.

现在证明 (b).

因为 G 是超可解的, 由引理 2.1(7), 只需证明对任意 $N \trianglelefteq G$, 如果 $\Delta_{G/N} \neq \emptyset$, 那么存在一个子群 $M/N \in \Delta_{G/N}$, 使得 M/N 在 G/N 内 $(G/N)'$ -半置换. 假设这一点不成立并设 G 是一个极小阶反例. 设 N 是 G 的一个非平凡正规子群且 $\Delta_{G/N} \neq \emptyset$, 则因为 G/N 仍是可解的, 由 G 的选择, 存在一个元素 $M/N \in \Delta_{G/N}$, 使得 M/N 在 G/N 内 $(G/N)'$ -半置换, 所以仅需考虑 $\Delta_G \neq \emptyset$ 的情形.

我们断言 $\Phi(G) = 1$. 假设 $\Phi(G) \neq 1$. 对任意元素 $M \in \Delta_G$, 有 $\Phi(G) \leq M$, 因此 $M/\Phi(G) \in \Delta_{G/\Phi(G)}$ 且 $\Delta_{G/\Phi(G)} \neq \emptyset$. 由 G 的选择, 存在一个元素 $T/\Phi(G) \in \Delta_{G/\Phi(G)}$, 使得 $T/\Phi(G)$ 在 $G/\Phi(G)$ 内 $(G/\Phi(G))'$ -半置换. 因为 $(G/\Phi(G))' = G'\Phi(G)/\Phi(G)$, 由引理 2.1(3), 有 T 在 G 内 G' -半置换. $T/\Phi(G) \in \Delta_{G/\Phi(G)}$ 还表明 $\Phi(G) < T \cap F(G) < F(G)$, 因此 $T \in \Delta_G$. 这是一个矛盾.

如果 $G' = 1$, 那么 G 是交换的, 因此 G 的任意子群是正规的, 从而在 G 内 G' -半置换. 设 $G' \neq 1$ 且 p 是 $|G'|$ 的极大素因子. 我们证明 G 的 Sylow p -子群 G_p 在 G 内是正规的. 设 $\pi = \{q \in \mathbb{P} \mid q > p\}$ 且 G_π 是 G 的一个 Hall π -子群, 则因为 G 是超可解的, 所以 $G_\pi \trianglelefteq G$. 因为 $\pi(G') \cap \pi = \emptyset$, 所以 $[G_\pi, G] \leq G_\pi \cap G' = 1$, 因此 $G_\pi \leq Z(G)$ 且有 $G_\pi G_p$ 是 p -闭的. 因为 G 是超可解的且 p 是 $|G/G_\pi|$ 极大的素因子, 所以有 $G_\pi G_p \trianglelefteq G$ 并且因而有 $G_p \text{ char } G_p G_\pi \trianglelefteq G$. 选择 L 为 G 的一个包含于 $G_p \cap G'$ 的极小正规子群, 显然, $|L| = p$. 因为 $L \not\subseteq \Phi(G) = 1$, 所以可以选择 E 为 L 在 G 内的一个补. 如果 G 是幂零的, 那么 G 是交换的, 因为 $\Phi(G) = 1$. 这意味着 G 的任意子群是正规的, 当然在 G 内是 G' -半置换的, 因此 G 不是幂零的. 设 E_p 是 E 的 Sylow p -子群, 则可以选择一个子群 M , 使得 M 是 E 的一个极大正规子群且 $|E:M| \neq p$, 因为 $E_p = E \cap G_p$ 在 E 内是正规的且 G 不是一个 p -群. 我们证明 M 在 G 内 G' -半置换. 事实上, 如果令 $T = LR$, 这里 R 是 M 在 E 内的一个极小补充, 那么 L 是 T 的 Sylow p -子群且 R 是一个循环 p' -群. 设 A 是 T 的任意子群. 如果 $L \leq A$, 那么, 因为 $ML \trianglelefteq G$, 所以有 $MA = MLA$ 是 G 的一个子群. 如果 $L \not\subseteq A$, 那么因为 $|L| = p$ 且 L 是 T 的唯一 Sylow p -子群, 故 A 是一个 p' -群. 由 Sylow 定理, 存在某个元素 $x \in L \leq G'$, 使得 $A^x \leq R \leq E$ 且因为 $M \trianglelefteq E$, 所以 $MA^x = A^xM$. 现在容易看到 M 在 G 内是 G' -半置换的. 显然, M 在 G 内的指数不是准素的且 $M \cap F(G) < F(G)$. 如果 $M \cap F(G) \neq 1$, 那么 $M \in \Delta_G$, 矛盾, 所以 $M \cap F(G) = 1$. 因为 M 的指数是 pq 对某个素数 $q \neq p$, 故有 $|F(G)| = p$ 或 pq . 如果 $|F(G)| = p$, 那么对 G 的任意子群 U , 有 $U \cap F(G) = 1$ 或 $U \cap F(G) = F(G)$, 因此 $\Delta_G = \emptyset$, 矛盾. 假设 $|F(G)| = pq$, 则 $1 \neq F(G) \cap E \trianglelefteq G$. 因为 $G_p \trianglelefteq G$, 故 $G_p \leq F(G)$, 因此 $G_p = L$ 且 E 是一个 p' -群. 于是, 可以选择 M 是 E 的一个包含 $F(G) \cap E$ 的极大正规子群, 因此 $M \in \Delta_G$.

(b) 成立. 这一最后的矛盾完成了定理的证明.

定理 B 的证明 必要性的证明.

由定理 A, 为了证明 G 是超可解的, 我们只需证明对任意 G 的正规子群 N , 如定理 A 中所定义的 $\Delta_{G/N}$ 如果不是空集, 那么存在 $\Delta_{G/N}$ 中的元素是在 G/N 中 $F(G/N)$ -半置换的. 假设 $M/N \in \Delta_{G/N}$, 那么 M 是 G 中有非准素指数的 2-极大子群, 因此由命题假设, M 在 G 中 $F(G)$ -半置换. 因为 $F(G)N/N \leq F(G/N)$, 由引理 2.1(3) 和 (7) 有 M/N 在 G/N 内 $F(G/N)$ -半置换且因此由定理 A, G 是超可解的.

假设 $N_{\bar{G}}(\bar{P})$ 在 $\bar{G}$ 中极大. 因为 G 是超可解的, 所以 $\bar{G}$ 是超可解的且因此可以假设 $|\bar{G} : N_{\bar{G}}(\bar{P})| = q$, 对某个 $q \in \mathbb{P}$. 设 $\bar{H}$ 是 $N_{\bar{G}}(\bar{P})$ 的一个 Hall p' -子群且 $\bar{M} = \bar{P}\bar{H}$, 则 $\bar{M}$ 在 $\bar{G}$ 内是 2-极大的且 $|\bar{G} : \bar{M}| = pq$. 设 M 是 $\bar{M}$ 在 G 内的原像, 则 M 在 G 内是非准素指数的 2-极大子群且由假设有 M 在 G 内 $F(G)$ -半置换. 假设 T 是 M 在 G 内的一个极小补充且 T 的任意子群与 M 是 $F(G)$ -置换的. 设 Q 是 T 的一个 Sylow q -子群, 则由命题假设, 存在某个元素 $x \in F(G)$, 使得 MQ^x 是 G 的一个子群. 如果 $Q^x \leq M$, 那么 Q^x 在 T^x 内的补是 M 在 G 内的一个补充. 由引理 2.2, 这与 T 的极小性相矛盾, 因此 MQ^x 在 G 内是极大的且 $|G : MQ^x| = p$. 因为 $MQ^x < G$ 是超可解的, 所以 p 是 $|MQ^x/O_{p'}(G)|$ 和 $|G/O_{p'}(G)|$ 的极大素因子. 因为 $\bar{P}$ 是 $\bar{M}$ 的 Sylow p -子群, 所以 $\bar{P}$ 是 $MQ^x/O_{p'}(G)$ 的 Sylow p -子群, 因此 $\bar{P} \leq MQ^x/O_{p'}(G)$. 另一方面, 因为 $\bar{P}$ 是 $\bar{G}$ 的 Sylow p -子群的一个极大子群, 所以 $\bar{P}$ 是 $\bar{G}$ 的 Sylow p -子群的正规子群, 因而 $\bar{P}$ 正规于 $\bar{G}$. 这一矛盾表明 $N_{\bar{G}}(\bar{P})$ 不是 $\bar{G}$ 的极大子群.

充分性证明.

因为 G 是超可解的, $G' \leq F(G)$. 我们只需证明 G 的任意非准素指数的 2-极大子群在 G 内 G' -半置换. 令 M 是 G 的一个非准素指数的 2-极大子群. 因为 G 是超可解的, 所以我们可以假设 $|G : M| = pq$, 其中 $p, q \in \mathbb{P}$, 且不失一般性, 可以假设 $p > q$. 设 r 是 $|G|$ 的极大素因子. 如果 $p \neq r$, 那么 G 的 Sylow r -子群 R 含于 M . 很清楚, 命题假设对 G/R 也成立, 因此由对 $|G|$ 的归纳, 有 M/R 在 G/R 内 $(G/R)'$ -半置换, 从而由引理 2.1(3), 因为 $(G/R)' = G'R/R$, M 在 G 内 G' -半置换. 所以可以假设 $p = r$ 是 $|G|$ 的极大素因子. 因为 M 是超可解的, 所以 M 的 Sylow p -子群 P 正规的于 M (如果 M 是一个 p' -群, 那么我们设 $P = 1$). 我们用 G_p 表示 G 的唯一 Sylow p -子群. 显然, P 是 G_p 的极大子群, 因此 $P \leq G_p$. 于是, G 的极大子群 $G_p M$ 含于 P 的正规化子. 由条件 (b), 有 $P \leq G$. 设 A 是 G 的一个 p -子群, 则由 P 的极大性, $A \leq P$ 或 $AP = G_p$. 在前一种情形下, $A \leq P \leq M$ 且因此 $AM = MA$. 设 $AP = G_p$, 则 $AM = APM = G_p M = MG_p = MA$, 因此 G 的所有 p -子群与 M 置换. 令 $G_{p'}$ 是 G 的一个 Hall p' -子群包含 M 的某个 Hall p' -子群 $M_{p'}$, G_q 为 $G_{p'}$ 的一个 Sylow q -子群包含 $M_{p'}$ 的某个 Sylow q -子群 M_q . 我们证明 G_q 的任意子群 B 与 M 置换. 因为 $|G : M| = pq$, 所以有 M_q 在 G_q 内是极大的, 因此, $B \leq M_q$ 或 $BM_q = G_q$. 如果 $B \leq M_q$, 那么 $B \leq M$ 且因此 B 与 M 置换. 假设 $BM_q = G_q$, 则 $MB = PM_{p'}B = PG_{p'}$ 是 G 的一个子群且因此 B 与 M 置换. 设 T 是 M 在 G 内的一个极小补充, 则明显地, 由 T 的极小性, T 是一个 $\{p, q\}$ -群. 设 D 是 T 的一个子群, 则 $D = D_p D_q$, 这里 D_p 是 D 的一个 Sylow p -子群, D_q 是 D 的一个 Sylow q -子群. 我们证明存在一个元素 $x \in G'$, 使得 $D_q^x \leq G_q$. 由 Sylow 定理, 存在一个元素 $y \in G$, 使得 $D_q \leq G_q^y$. 因为 G/G' 是交换的, 所以有 $G'G_q = G'G_q^y$. 再由 Sylow 定理, 存在某个元素 $x \in G'$, 使得 $G_q = G_q^{yx}$ 且因此 $D_q^x \leq G_q^{yx} = G_q$. 于是, 由上面的证明, 有

$MD^x = MD_p^x D_q^x = D_p^x MD_q^x = D_p^x D_q^x M = D^x M$, 因此 M 在 G 内 G' -半置换. 这完成了定理的证明.

4 定理 C, D 和 E 的证明

定理 C 的证明 假设定理是错误的并设 G 是一个极小阶反例. 设 R 是 G 的一个 Sylow r -子群, 其中 r 是 $|G|$ 的最大素因子并设 $X = F(G)$. 首先证明 G 有一个交换的极小正规子群. 假设这一点不成立, 则 $X = 1$. 设 $T \in X(R)$ 且 Q 为 T 的一个 Sylow 子群, 则 $QR = RQ \neq G$ 且由引理 2.1(4), 命题假设对 QR 仍成立. 因此, 由 G 的选择, QR 是超可解的并因而有 $Q \leq N_G(R)$. 这说明 R 正规于 G , 矛盾, 因此 G 有一个交换的极小正规子群, 记为 L .

我们现在证明 G 是超可解的. 由引理 2.1(3), 命题假设对 G/L 仍成立, 因此由 G 的选择 G/L 是超可解的. 因为所有超可解群的群类是一个饱和群系, 故可以假设 L 是 G 的唯一极小正规子群且 $\Phi(G) = 1$. 因为 L 是交换的, 所以 L 是一个 p -群, 对某个 $p \in \pi(G)$ 且 $F(G) = C_G(L) = L$. 设 L_1 是 L 的一个正规于 G_p 的极大子群, q 是不等于 p 的 $|G|$ 的任意素因子, 并设 G_q 是 G 的一个 Sylow q -子群. 因为 L_1 含于 G_q 的任意补充且 $L_1 \trianglelefteq L = F(G)$, $L_1 G_q$ 是 G 的一个子群. 因为 $L_1 = L \cap L_1 G_q \trianglelefteq L_1 G_q$, 所以 $q \nmid |G : N_G(L_1)|$. 由 q 选择的任意性和 $L_1 \trianglelefteq G_p$, 我们知道 $L_1 \trianglelefteq G$. 因此, 由 L 的极小性, 有 $L_1 = 1$ 及 $|L| = p$. 因此, G 是超可解的.

因为 G 超可解, 由文献 [17] 的定理 1.8.13, 对任意素数 q , $G/O_{q',q}(G)$ 是一个幂指数整除 $q-1$ 的交换群. 假设存在某个素数 p , 使得 $G/O_{p',p}(G)$ 不是循环的. 因为由引理 2.1(2), 命题假设对 G 的每个商群依然成立, 由 G 的选择, 对 G 的任一非平凡正规子群 R , $(G/R)/O_{p',p}(G/R)$ 是循环的. 设 E 是子群 $\Phi(G)$, $O_{p'}(G)$ 中的一个, 则 $O_{p',p}(G/E) = O_{p',p}(G)/E$. 因此, 如果 $E \neq 1$, 那么由 G 的选择, $G/O_{p',p}(G) \cong (G/E)/(O_{p',p}(G)/E) = (G/E)/O_{p',p}(G/E)$ 是循环的, 这矛盾于 p 的选择. 因此 $\Phi(G) = 1 = O_{p'}(G)$. 由此有 p 是 $|G|$ 的最大因子且 $P = O_{p',p}(G) = F(G)$ 是 G 的 Sylow p -子群. 因为 $\Phi(P) \leq \Phi(G) = 1$, 所以 P 是一个初等交换 p -群. 因此 $C = C_G(P) = P$ 且 P 不是循环的. 设 Q 是 P 的任意子群, r 是 $|G|$ 的任意不同于 p 的素因子且设 G_r 是 G 的一个 Sylow r -子群. 因为 Q 含于 G_r 的任意补充, 所以存在某个元素 $x \in F(G)$, 使得 $Q^x G_r$ 是 G 的一个子群, 因此 $Q G_r^{x^{-1}}$ 是 G 的一个子群. 因为 $Q = P \cap Q G_r^{x^{-1}} \trianglelefteq Q G_r^{x^{-1}}$, 所以有 $r \nmid |G : N_G(Q)|$. 由 r 的选择和 $Q \trianglelefteq P$, 有 $Q \trianglelefteq G$. 这说明 P 的任意子群是正规于 G 的. 设 x, y 是 P 的任二不同生成元. 如果 $C_G(x) \neq C_G(y)$, 那么, 不失一般性, 可以选择一个元素 $a \in C_G(x) \setminus C_G(y)$, 于是 $x^a = x$. 因为 P 的所有子群正规于 G , 我们可以假设 $y^a = y^\alpha$, 对某个 $\alpha \in \mathbb{N}$ 且 $1 < \alpha < q$. 明显地, $(xy)^a = xy^\alpha \notin \langle xy \rangle$, 因此 $a \notin N_G(\langle xy \rangle)$, 所以 $\langle xy \rangle$ 不正规于 G , 矛盾. 这说明 $C_G(x) = C_G(y) = C_G(P) = O_{p',p}(G)$ 且 $G/O_{p',p}(G) = G/C_G(x)$ 同构于 $\text{Aut}(\langle x \rangle)$ 的某个子群, 因此, $G/O_{p',p}(G)$ 是循环的. 这一矛盾完成了定理的证明.

定理 D 的证明 只需证明如果 G 的每个 Sylow 子群的任一极大子群或者在 G 内有超可解补充, 或者在 G 内 $F(G)$ -半置换, 则 G 是超可解的. 假设这一断言不成立并设 G 是一个极小阶反例. 令 $X = F(G)$, R 是 G 的一个 Sylow r -子群, 其中 r 是 $|G|$ 的最小素因子. 设 L 是 G 的一个极小正规子群, 则 G/L 是超可解的, 这是因为由引理 2.1(3) 和 (7) 及

$F(G)L/L \leq F(G/L)$, G/L 满足命题假设. 因为所有超可解群的群类是一个饱和群系, 所以 L 是 G 的唯一极小正规子群且 $\Phi(G) = 1$. 首先断言 G 是可解的. 事实上, 如果 R 是循环的或者 L 是交换的, 那么 G 是可解的. 现在假设 L 非交换的, 则 $X = F(G) = 1$ 且由引理 2.1(4), 命题假设对 G 的每个 Hall 子群仍成立, 因此, 由 G 的选择, G 的每个真 Hall 子群是超可解的. 假设 R 的某个极大子群 A 在 G 内 X -半置换, 并设 $T \in X(A)$ 是 A 在 G 内的一个极小补充. 因为 $X = 1$, 所以 A 与 T 的所有子群置换并因而有 $A \cap T \leq \Phi(T)$. 显然存在 T 的某个 Sylow r -子群 T_r , 使得 $R = AT_r$. 因此, $T/\Phi(T)$ 的任意 Sylow r -子群的阶是 r , 从而由文献 [21] 中的 10.1.9, 有 $T/\Phi(T)$ 是 r -幂零的. 这就得到 T 是 r -幂零的. 设 D 是 T 的一个 Hall r' -子群, 则由引理 2.7, $E = AD$ 是可解的. 因为 E 显然正规于 G , 所以 G 是可解的. 其次假设 R 的每个极大子群在 G 内有一个超可解的补充, 则由引理 2.9, G 是 p -闭的, 其中 p 是 $|G|$ 的最大素因子. 因此, 在这种情形下, G 也是可解的.

现在得到 L 是交换的且因此有 $X = L = C_G(L) = F(G) = O_p(G)$, 对某个素数 p . 如果 $|L| = p$, 那么 G 是超可解的, 因此 $|L| > p$. 令 q 是 $|G|$ 的最大素因子. 假设 $q = p$. 因为 G/L 是超可解的且 $L = O_p(G)$, L 是 G 的一个 Sylow p -子群. 设 L_1 是 L 的一个极大子群, T 是 L_1 在 G 内的某个补充, 则 $L = L \cap L_1 T = L_1(L \cap T)$, 因而 $L \cap T \neq 1$. 因为 L 是交换的, $L \cap T$ 正规于 G , 于是 $L \cap T = L$. 由此得到 $T = G$. 由假设, L_1 或者在 G 内 X -半置换或者在 G 内有一个超可解补充 T . 在前一种情形下, 设 E 是 $T \in X(L_1)$ 的一个 Hall p' -子群, 则 $L_1 E = E L_1$, $E L_1 \cap L = L_1$, 所以 L_1 正规于 G . 这矛盾于 L 的极小性. 在后一种情形下, $T = G$ 是超可解的, 这矛盾于 G 的选择, 因此, $q \neq p$. 令 P 和 Q 分别是 G 的一个 Sylow p -子群和一个 Sylow q -子群. 注意到 P 的每个包含 L 的极大子群 U 在 G 内有一个超可解补充. 事实上, 因为 $\Phi(G) = 1$, 所以存在 G 的一个极大子群 M , 使得 $G = [L]M$. $M \simeq G/L$ 就是 U 在 G 内的一个超可解补充. 假设 P 的每个不包含 L 的极大子群在 G 内有一个超可解补充, 则由引理 2.9 知 Q 正规于 G 并因而有 $Q \leq C_G(L) = L$, 矛盾. 因此 P 有一个极大子群 U , 使得 $P = LU$ 且 U 在 G 内 X -半置换. 令 E 是 $T \in X(U)$ 的一个 Hall 子群且 $a \in L$, 使得 $D = UE^a = E^a U$. 因为 $|L| > p$ 且 $|P : U| = p$, 所以 $D \cap L \neq 1$. $D \cap L$ 显然也是正规于 G 的且 $D \cap L \neq L$, 这和 L 的极小性矛盾. 定理证毕.

定理 E 的证明 假设定理不真且 G 是一个极小阶反例. 设 $X = O_{p',p}(G)$. 我们通过以下步骤完成定理的证明:

(1) $O_{p'}(G) = 1$.

假设 $O_{p'}(G) \neq 1$. 由引理 2.1(2), 命题假设对 $G/O_{p'}(G)$ 仍成立, 因此, 由 G 的选择, 这个商群是 p -幂零的. 而这说明 G 是 p -幂零的, 矛盾. 因此 (1) 成立.

(2) $O_{p',p}(G) = O_p(G) = F(G)$ (这可由 (1) 直接得到).

(3) G 是可解的.

如果 G 不是可解的, 那么由著名的 Feit-Thompson 定理可知 $p = 2$. 假设 $F(G) \neq 1$. 如果 $p \in \pi(G/F(G))$, 那么 $G/F(G)$ 满足定理假设, 且因此由 G 的选择知 $G/F(G)$ 是 p -幂零的. 这就有 G 可解. 如果 $p \notin \pi(G/F(G))$, 那么 $G/F(G)$ 是奇阶的, 因此也是可解的. 因而这种情形下总有 G 是可解的, 所以可假设 $F(G) = 1$. 设 G_p 是 G 的一个 Sylow p -子群且 P 是 G_p 的一个 2-极大子群. 设 $T \in X(P)$ 且 Q 是 T 的一个 Sylow q -子群, 其中 $q \neq 2$. 因为 $|G : T| = |P : P \cap T|$, Q 是 G 的一个 Sylow q -子群. 由引理 2.1(6), 对所有 $x \in G$, $T^x \in X(P)$,

因此 P 与 G 的所有 Sylow q -子群置换. 于是, 如果 G_p 可由它的某些 2-极大子群生成, 那么 G_p 与 G 的所有 Sylow q -子群置换. 设 L 是 G 的一个极小次正规子群, 则 L 是一个非交换单群且因此 $L \neq (L \cap G_p)(L \cap Q)$. 此外, 对任意 $a \in L$ 有 $(L \cap G_p)(L \cap Q)^a = (L \cap Q)^a(L \cap G_p)$. 事实上, 因为 $G_p Q^a = Q^a G_p$, $L \cap G_p Q^a$ 是 G 的一个子群, 所以 $L \cap G_p Q^a = (L \cap G_p)(L \cap Q^a) = (L \cap G_p)(L \cap Q)^a = (L \cap Q)^a(L \cap G_p)$. 由引理 2.4 知 L 非单, 矛盾. 于是我们可以假设对 G_p 的所有 2-极大子群 $P_i (i=1, \dots, l)$ 有 $\langle P_1, \dots, P_l \rangle < G_p$. 设 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是 G_p 的一个极小生成元集. 如果 $n \geq 3$, 那么 $P_1 = \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-2} \rangle \Phi(G_p)$, $P_2 = \langle x_2, \dots, x_{n-1} \rangle \Phi(G_p)$ 和 $P_3 = \langle x_3, \dots, x_n \rangle \Phi(G_p)$ 是 G_p 的 3 个 2-极大子群且 $G_p = \langle P_1, P_2, P_3 \rangle$. 这是一个矛盾, 因此 $n \leq 2$. 如果 $n = 1$, 那么 G 有一个循环的 Sylow 2-子群, 因此 G 是可解的. 于是可以假设 $n = 2$. 如果 $\langle x_1 \rangle$ 和 $\langle x_2 \rangle$ 都不是 G_p 的极大子群, 那么存在 G_p 的 2-极大子群 P_1 和 P_2 , 满足 $\langle x_i \rangle \leq P_i (i = 1, 2)$, 因此 $G_p = \langle P_1, P_2 \rangle$, 矛盾, 从而可以假设 $\langle x_1 \rangle$ 在 G_p 内是极大的. 显然, $\langle x_1^p \rangle$ 是 G_p 的一个 2-极大子群. 由假设, 存在 G 的一个子群 T 满足 $G = \langle x_1^p \rangle T$ 且因为 $F(G) = 1$, $\langle x_1^p \rangle$ 与 T 的任意子群置换. 由引理 2.3, 存在 T 的一个 Sylow p -子群 T_p , 使得 $G_p = \langle x_1^p \rangle T_p$. 显然 $\langle x_1^p \rangle \leq \Phi(G_p)$, 所以 $G_p = T_p$. 这意味着 $\langle x_1^p \rangle \leq T_p \leq T$ 且因此 $G = T$. 于是 $\langle x_1^p \rangle$ 是 G 的一个置换子群. 因为有限群的每个置换子群是次正规的, 所以 $\langle x_1^p \rangle \leq O_p(G) = 1$, 因此 $|G_p| = 2^2$. 由引理 2.8, G 是 p -幂零的. 这一矛盾表明 G 是可解的.

(4) G 有唯一的极小正规子群 L 且 $L = C_G(L) = O_p(G)$, $\Phi(G) = 1$.

如果 $\Phi(G) \neq 1$, 那么, 因为 $\Phi(G)$ 不包含 G 的任意 Sylow 子群, 由 G 的选择, 有 $G/\Phi(G)$ 是 p -幂零的, 并且因为所有 p -幂零群的集合是一个饱和群系, 所以 G 是 p -幂零的. 设 L 是 G 的一个极小正规子群. 如果 L 是 G 的一个 Sylow p -子群, 那么 G/L 是一个 p' -群, 当然是 p -幂零的. 假设 L 不包含 G 的任意 Sylow p -子群, 那么由 G 的选择有 G/L 是 p -幂零的. 如果 G 有两个不同的极小正规子群 L 和 N , 那么 G/L 和 G/N 都是 p -幂零的, 因此 $G \cong G/L \cap N \lesssim G/L \times G/N$ 是 p -幂零的. 所以我们可以假设 G 有唯一的极小正规子群 L 且 $\Phi(G) = 1$. 如果 L 不是一个 p -群, 那么也有 G 是 p -幂零的, 因此 $L = C_G(L) = F(G) = O_p(G)$.

(5) $G = [L]M$, 其中 $p^3 \nmid |L|$ 且 M 是 p -幂零的.

因为 $L \not\leq \Phi(G) = 1$, L 在 G 中有一个补 M , 因此, $G = [L]M$ 且 $M \cong G/L$ 是 p -幂零的. 如果 $p^3 \nmid |L|$, 那么由引理 2.8, G 是 p -幂零的.

(6) 最后的矛盾.

设 M_p 是 M 的一个 Sylow p -子群, G_p 是 G 的一个包含 M_p 的 Sylow p -子群. 显然, $|G_p : M_p| = |L| \geq p^3$, 因此存在 G_p 的一个 2-极大子群 P , 使得 $M_p \leq P$ 且 $1 \neq L \cap P \neq L$. 因为 $L \trianglelefteq G$, 所以 $L \cap P \trianglelefteq P$. 因为 L 是交换的, 所以 $L \cap P \trianglelefteq L$, 因此 $L \cap P \trianglelefteq G_p$. 由定理假设, P 在 G 内 L -半置换, 因此存在 G 的一个子群 T , 使得 $G = PT$ 且对 T 的每个真子群 T_1 , 有 $PT_1^x < G$ 对某个 $x \in L$ 成立. 令 T_1 是 T 的某个 Hall p' -子群, 则 $L \cap P = L \cap PT_1^x \trianglelefteq PT_1^x$ 且因此 $T_1^x \leq N_G(L \cap P)$. 因为 $|G : T| = |PT : T|$ 是一个 p -数, 所以 T_1^x 也是 G 的一个 Hall p' -子群, 因此, $G = G_p T_1^x \leq N_G(L \cap P)$ 并由此有 $L \cap P \trianglelefteq G$. 但这是不可能的, 因为 L 是 G 的极小正规子群且 $1 \neq L \cap P \neq L$. 这一最后矛盾完成了定理的证明.

5 注记、例子和结论的一些应用

1. 设 S_3 是三次对称群, α 是 S_3 上的一个 2 阶自同构. 设 $G = [S_3]\langle\alpha\rangle$, 则子群 $\langle\alpha\rangle$ 在 G

内不是 1-半置换的. 显然地, $G_3 = F(G)$, 因此子群 $\langle \alpha \rangle$ 在 G 内是 $F(G)$ -半置换的. 这个例子说明定理 A 中的 $F(G)$ -半置换性这一条件不能替换为置换性.

2. 设 $A = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = 1, ab = ba \rangle$, $B = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1, xy = yx \rangle$. 令 $G = [A]B$ 满足 $a^x = a, b^x = b^2$ 且 $a^y = a^2, b^y = b^2$. 显然, $M = [\langle ab \rangle]\langle y \rangle$ 是 G 的一个 2-极大子群且 $|G : M| = 6$ 不是准素的. 但是 M 在 G 内不是 $F(G)$ -半置换的. 这个例子表明在定理 A 的 Σ_G 中不能去掉 $M/M_G \cap F(G/M_G) = 1$ 这一要求.

3. 设 $G = A_4 \times Z_2$, 其中 Z_2 是一个 2 阶循环群, 则定理 A 中的条件 (a) 在 G 上成立. 但 G 不是超可解的, 所以条件 (b) 不能被删去. 进一步地, 条件 (b) 在 $N = 1$ 的情形下在 G 上成立, 因此我们也不能把 (b) 换为 “如果 $\Delta_G \neq \emptyset$, 那么存在 $M \in \Delta_G$, 使得 M 在 G 内 $F(G)$ -半置换”.

4. 应用定理 A 能证明下面的结论:

推论 5.1 一个群 G 是幂零的当且仅当 G 的每个非准素指数的 2-极大子群在 G 内 $F(G)$ -半置换, 且 G 的每个极小子群含于它的正规化子的超中心中.

证明 必要性是显然的. 为了证明充分性, 我们假设 G 的所有非准素指数的 2-极大子群在 G 内 $F(G)$ -半置换且 G 的每个极小子群含于它的正规化子的超中心中. 现在证明 G 是幂零的. 假设断言不成立. 设 H 是 G 的一个 Schmidt 子群, 也就是一个非幂零群, 它的所有真子群是幂零的, 则由文献 [17] 的定理 3.4.11, H 有以下性质:

- a) $|H| = p^\alpha q^\beta$, 这里 p 和 q 是不同的素数;
- b) $H = [H_p]H_q$, 其中 H_p 是 H 的一个正规 Sylow p -子群, H_q 是 H 的一个 Sylow q -子群;
- c) $H_p/\Phi(H_p)$ 是 H 的一个主因子;
- d) H_p 是 H 的使得商群幂零的最小正规子群;
- e) 如果 H_p 是交换的, 那么 $\Phi(H_p) = 1$.

应用定理 A 我们立即得到 G 是超可解的, 因此它的子群 H 也是超可解的. 于是 $|H_p/\Phi(H_p)| = p$. 由此得到 $|H_p| = p$ 且由假设有 $H_p \leq Z_\infty(H)$. 这就得到 H 是幂零的. 这一矛盾完成了证明.

5. 由定理 D 我们得到

推论 5.2^[24] 如果 G 的每个 Sylow 子群的任一在 G 内没有超可解补充的极大子群正规于 G , 那么 G 是超可解的.

推论 5.3^[25] 如果 G 的每个 Sylow 子群的任意极大子群正规于 G , 那么 G 是超可解的.

6. 由定理 E, 立即得到以下推论:

推论 5.4 如果一个群 G 是 A_4 -自由的且对所有 $p \in \pi(G)$, G 的 Sylow p -子群的每个 2-极大子群在 G 内 $F(G)$ -半置换, 那么 G 有一个超可解型的 Sylow 塔.

7. 一个群满足推论 5.4 的条件不必是超可解的. 譬如, 设 $G = [\langle a, b \rangle]\langle x \rangle$, 这里 $a^5 = b^5 = x^3 = 1, ab = ba$ 且 $a^x = ab, b^x = a^2b^3$, 则 G 是一个反例.

这个例子也说明定理 E 中的条件 “ p 是 G 阶的最小素因子” 不能替换为 “ $(p-1, |G|) = 1$ ”. 因此, 文献 [26] 中的引理 4.1 不正确.

8. 设 $G = [A]B$, 其中 $A = \langle x, y \mid x^7 = y^7 = 1, xy = yx \rangle$, $B = \langle a \mid a^6 = 1 \rangle$ 且 $x^a = x, y^a = y^3$. 显然, G 的每个有非准素指数的 2-极大子群在 G 内是 $F(G)$ -半置换的. 但是 A 的

极大子群 $\langle xy \rangle$ 不正规于 G , 因此, 定理 B 中的条件 (b) 不能替换为 “ $\bar{G} = G/O_{p'}(G)$ 的 Sylow p -子群的任意极大子群正规于 $\bar{G}$ ”.

致谢 作者诚挚地感谢审稿人提出的有帮助的评论和修改意见.

参考文献

- 1 Guo W, Shum K P, Skiba A N. G -covering systems of subgroups for the classes of p -supersoluble and p -nilpotent finite groups. *Sib Math J*, **45**(3): 75–92 (2004)
- 2 Guo W, Shum K P, Skiba A N. Conditionally permutable subgroups and supersolubility of finite groups. *Southeast Asian Bull Math*, **29**: 493–510 (2005)
- 3 Guo W, Shum K P, Skiba A N. Criteria of supersolubility for products of supersoluble groups. *Publ Math Debr*, **68**(3-4): 433–449 (2006)
- 4 Guo W, Shum K P, Skiba A N. X -permutable maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups. *Ukrain Matem J*, **58**(10): 1299–1309 (2006)
- 5 Guo W, Shum K P, Skiba A N. Schur-Zassenhaus theorem for X -permutable subgroups. *Algebr Colloq*, In press
- 6 Guo W, Shum K P, Skiba A N. X -semipermutable subgroups of finite groups, *J Algebra*, **315**: 31–41 (2007)
- 7 Huppert B. Normalteiler und maximale untergruppen endlicher gruppen. *Math Z*, **60**: 409–434 (1954)
- 8 Suzuki M. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order. *Proc Amer Math Soc*, **8**(4): 686–695 (1957)
- 9 Janko Z. Endliche gruppen mit lauter nilpotenten zwein-maximalen untergruppen. *Math Z*, **79**: 422–424 (1962)
- 10 Belonogov V A. Finite soluble groups with nilpotent 2-maximal subgroups, *Matem Zametki*, **3**(1): 21–32 (1968)
- 11 Semenchuk V N. Soluble groups with supersoluble second maximal subgroups. In: Problems in Algebra, Vol. 1. Minsk: Universitetskoe, 1985. 86–96
- 12 Agrawal R K. Generalized center and hypercenter of a finite group. *Proc Amer Math Soc*, **54**: 13–21 (1976)
- 13 Poljakov L J. Finite groups with permutable subgroups. In: Finite groups (Proc Gomel Sem), Minsk: Nauka i Tekhnika, 1966. 75–88
- 14 Legchekova H V, Skiba A N. Finite groups with partially permutable the second and third maximal subgroups. *Dokl Nats Akad Nauk Belarusi*, **50**(3): 1012–1017 (2006)
- 15 Skiba A N. Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups. *Proc F Scorina Gomel State Univ*, **3**(36): 12–31 (2006)
- 16 Doerk K, Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992
- 17 Guo W. The Theory of Classes of Groups. Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000
- 18 Huppert B. Endliche Gruppen I. Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1967
- 19 Kegel O H. Produkte nilpotenter Gruppen. *Arch Math*, **12**: 90–93 (1961)
- 20 Monakhov V S. Produkte of supersoluble and cyclic or primary groups. In: Finite Groups (Proc Gomel Sem, Gomel, 1975–1977) (Russian). Minsk: Nauka i Tekhnika, 1978. 50–63
- 21 Robinson D J S. A Course in the Thery of Groups. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1982
- 22 Skiba A N. On weakly π -permutable subgroups of finite groups. Gomel, Dec, 2005. Preprints/GGU im F Skoriny
- 23 Huppert B. Normalteiler und maximale untergruppen endlicher gruppen. *Math Z*, **60**: 409–434 (1954)
- 24 Guo W, Shum K P, Skiba A N. G -covering subgroup systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups. *Israel J Math*, **138**: 125–138 (2003)
- 25 Srinivasan S. Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups. *Israel J Math*, **35**: 210–214 (1990)
- 26 Wang Y. Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups c -supplemented. *J Algebra*, **224**: 467–478 (2000)