无穷维 Hamilton 算子的可逆性及其应用

吴德玉*, 阿拉坦仓

内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021

E-mail: wdy6288673@163.com, alatanca@imu.edu.cn

收稿日期: 2010-01-17; 接受日期: 2010-07-19; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10962004)、高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20070126002) 和内蒙古大学高层次人才引进科研启动基金 (批准号: Z20090103) 资助项目

摘要 本文研究了无穷维 Hamilton 算子的可逆性问题, 进而, 刻画了无穷维 Hamilton 算子的谱的分布, 并运用内部的逆紧性描述了无穷维 Hamilton 算子的逆紧性. 最后, 给出了无穷维 Hamilton 算子的可逆性问题在 Dirac 算子的可逆性问题中的应用.

关键词 无穷维 Hamilton 算子 Dirac 算子 逆紧 点谱 剩余谱 连续谱

MSC (2000) 主题分类 47B47

1 引言

以应用为目的或以物理、力学等科学中的问题为背景的偏微分方程求解问题的研究, 不仅是传统应用数学和力学的一个最主要的内容, 而且是当代数学和力学中的一个重要组成部分, 是理论与实际应用之间的一座重要桥梁^[1]. 20 世纪 60 年代, Arnold^[2], Magri^[3] 等学者为了研究连续统力学问题导出的偏微分方程, 诸如流体力学、弹性力学问题中的偏微分方程以及发展方程问题, 其中包括 KdV 方程、Maxwell 等方程, 引进了无穷维 Hamilton 正则系统的概念. 而此时, 以上偏微分方程的研究有了另一种新的研究方法, 即转化成无穷维 Hamilton 正则系统来研究. 比如, Kadomtsev-Petviashvili 方程

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6uu_{xx} + 6u_x u_x + 3u_{yy} - u_{tx} = 0$$

的一个无穷维 Hamilton 正则系统为

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix},$$

其中 $u = u(x, y, t)$, t 是时间变量,

$$U = \begin{bmatrix} u \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3\frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} & -6u \end{bmatrix}$$

并且称算子 $H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}$ 为无穷维 Hamilton 算子. 据我们所知, 通过研究线性算子的谱, 可以了解算子本身的结构, 进而能够刻画相应方程解的构造. 比如, 通过矩阵的特征值, 我们可以刻画这矩阵的不变子空间、写出它的标准形, 并且彻底弄清楚相应齐次或非齐次方程解的构造. 因此, 通过研究无穷维 Hamilton 算子, 能够刻画无穷维 Hamilton 正则系统的性质, 从而有助于解决以上应用偏微分方程的求解问题. 然而, 在线性算子谱问题中, 线性算子的可逆性问题尤为重要, 因为当系统对应的算子可逆时不仅能够保证解的存在性和唯一性问题, 而且对半解析法提供了强有力的保障. 此时, 偏微分方程可化为常微分方程. 因此研究无穷维 Hamilton 系统的一个很重要的途径是研究无穷维 Hamilton 算子的可逆性问题.

另一方面, 一般分块形式的无穷维 Hamilton 算子不一定是辛自伴的, 因此, 刻画它的谱的性质时会遇到很多困难. 然而, 当无穷维 Hamilton 算子可逆时必是辛自伴算子, 此时刻画它的谱的性质就会变得简单. 综合以上原因, 本文研究了无穷维 Hamilton 算子的可逆性问题, 给出了可逆的充分条件并刻画了谱的分布情况.

在本文, X 表示无穷维复 Hilbert 空间. 对于线性算子 T 而言, $\sigma_p(T)$, $\sigma_r(T)$, $\sigma_c(T)$, $\sigma(T)$, $\rho(T)$ 及 $\gamma(T)$ 分别表示点谱、剩余谱、连续谱、谱集、预解集及正则型域.

2 无穷维 Hamilton 算子的可逆性

定义 2.1 在 Hilbert 空间 $X \times X$ 中稠定闭线性算子 H 称为无穷维 Hamilton 算子, 如果 H 具有如下 2×2 分块形式

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix},$$

其中 A 是 X 中的稠定闭线性算子, B, C 是 X 中的自伴算子.

引理 2.1 设 S 是 Hilbert 空间 X 中的对称算子, 如果存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 $R(S - \lambda I) = X$, 则 S 是自伴算子.

证明 由于 $R(S - \lambda I) = X$, 故对任意 $u \in D(S^*)$, 存在 $v \in D(S)$ 使得

$$(S - \lambda I)v = (S^* - \lambda I)u.$$

考虑到 $S \subset S^*$, 易得 $(S^* - \lambda I)(u - v) = 0$. 另一方面, $N(S^* - \lambda I) = R(S - \lambda I)^\perp = \{0\}$, 因此 $u = v$, 即 $S = S^*$. 结论证毕.

定理 2.2 设

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} : X \times X \rightarrow X \times X$$

是无穷维 Hamilton 算子, 如果存在 $M > 0$ 使得对任意 $[x, y]^T \in D(H)$, 有

$$|(By, y) + (Cx, x)| \geq M\|[x, y]^T\|^2,$$

则 $0 \in \gamma(H)$, 从而 $R(H)$ 是闭的.

证明 如果存在 $M > 0$ 使得对任意 $[x, y]^T \in D(H)$,

$$|(By, y) + (Cx, x)| \geq M\|[x, y]^T\|^2$$

成立, 则

$$|(J_1 H u, u)| = |(By, y) + (Cx, x) + 2i\operatorname{Im}(Ax, y)| \geq |(By, y) + (Cx, x)| \geq M\| [x, y]^T \|^2,$$

因此 $0 \in \gamma(J_1 H)$, 即 $0 \in \gamma(H)$ 并且 $R(H)$ 是闭的, 其中 $J_1 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$, $u = [x, y]^T \in D(H)$.

定理 2.3 设

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} : D(A) \times D(A^*) \rightarrow X \times X$$

是无穷维 Hamilton 算子, 如果存在 $M > 0$ 使得对任意 $[x, y]^T \in D(H)$, 有

$$|(By, y) + (Cx, x)| \geq M\| [x, y]^T \|^2$$

且 $0 \in \rho(A)$, 则 $0 \in \rho(H)$.

证明 考虑到 $D(A) \subset D(C)$, $D(A^*) \subset D(B)$ 且 $0 \in \rho(A)$, 易得

$$H = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1}B(A^*)^{-1} \\ (A^*)^{-1}CA^{-1} & -(A^*)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^* \end{bmatrix}.$$

又因为 $(A^{-1}B(A^*)^{-1})^* \supset A^{-1}B(A^*)^{-1}$ 并且 $D(A^{-1}B(A^*)^{-1}) = X$, 故 $(A^{-1}B(A^*)^{-1})^* = A^{-1}B(A^*)^{-1}$. 同理还有 $((A^*)^{-1}CA^{-1})^* = (A^*)^{-1}CA^{-1}$. 从而

$$H_1 = \begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1}B(A^*)^{-1} \\ (A^*)^{-1}CA^{-1} & -(A^*)^{-1} \end{bmatrix}$$

是全空间上定义的有界无穷维 Hamilton 算子, 从而满足

$$(J_2 H_1)^* = J_2 H_1. \quad (2.1)$$

其中 $J_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$. 另一方面, 由定理 2.2 可知 $0 \in \gamma(H)$, 因此 $0 \notin \sigma_p(H_1)$. 假定 $0 \in \sigma_r(H_1)$, 则由 (2.1) 式可得 $0 \in \sigma_p(H_1)$, 这与 $0 \in \sigma_r(H_1)$ 矛盾. 假定 $0 \in \sigma_c(H_1)$, 则存在序列 $\|u_n\| = \|[x_n, y_n]^T\| = 1, n = 1, 2, \dots$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$(H_1 u_n, u_n) \rightarrow 0,$$

即

$$A^{-1}x_n + A^{-1}B(A^*)^{-1}y_n \rightarrow \theta \text{ 且 } (A^*)^{-1}BA^{-1}x_n - (A^*)^{-1}y_n \rightarrow \theta,$$

第一式两边右侧与 y_n 做内积, 第二式两边左侧与 x_n 做内积并两式相加得:

$$(B(A^*)^{-1}y_n, (A^*)^{-1}y_n) + (CA^{-1}x_n, A^{-1}x_n) \rightarrow 0.$$

令 $A^{-1}x_n = f_n, (A^*)^{-1}y_n = g_n$, 则 $f_n \in D(C), g_n \in D(B)$ 且

$$(f_n, Cf_n) + (Bg_n, g_n) \rightarrow 0.$$

这与给定条件矛盾. 因此 $0 \in \rho(H_1)$, 即 $0 \in \rho(H)$.

定理 2.4 设

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} : D(C) \times D(B) \rightarrow X \times X$$

无穷维 Hamilton 算子, 如果存在 $M > 0$ 使得对任意 $[x, y]^T \in D(H)$, 有

$$|(By, y) + (Cx, x)| \geq M\|[x, y]^T\|^2$$

成立则 $0 \in \rho(H)$.

证明 易知

$$H = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C^{-1}A^*B^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & B^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}.$$

容易证明

$$H_2 = \begin{bmatrix} -C^{-1}A^*B^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & B^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$$

是全空间上定义的有界无穷维 Hamilton 算子, 并且满足

$$(J_2 H_2)^* = J_2 H_2. \quad (2.2)$$

由定理 2.2 可知 $0 \in \gamma(H)$, 因此, $0 \notin \sigma_p(H_2)$. 假定 $0 \in \sigma_r(H_2)$, 则由式 2.2 易得 $0 \in \sigma_p(H_2)$, 这与 $0 \in \sigma_r(H_2)$ 矛盾. 假定 $0 \in \sigma_c(H_2)$, 则存在序列 $\|u_n\| = \|[x_n, y_n]^T\| = 1, n = 1, 2, \dots$ 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$(H_2 u_n, u_n) \rightarrow 0.$$

即

$$-C^{-1}A^*B^{-1}x_n + C^{-1}y_n \rightarrow \theta \text{ 且 } B^{-1}x_n + B^{-1}AC^{-1}y_n \rightarrow \theta$$

第一式两边右侧与 y_n 做内积, 第二式两边左侧与 x_n 做内积并两式相加得:

$$(C^{-1}y_n, y_n) + (x_n, B^{-1}x_n) \rightarrow 0.$$

令 $B^{-1}x_n = f_n, C^{-1}y_n = g_n$, 则 $f_n \in D(B), g_n \in D(C)$ 且

$$(f_n, Bf_n) + (Cg_n, g_n) \rightarrow 0.$$

这与给定条件矛盾. 因此, $0 \in \rho(H_2)$, 即 $0 \in \rho(H)$.

推论 2.5 设

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} : D(H) \subset X \times X \rightarrow X \times X$$

是无穷维 Hamilton 算子且存在 $M > 0$ 使得对任意 $[x, y]^T \in D(H)$, 有

$$|(By, y) + (Cx, x)| \geq M\|[x, y]^T\|^2,$$

如果有

- (i) $0 \in \rho(A), D(A) \subset D(C), D(A^*) \subset D(B)$ 或者
- (ii) $D(C) \subset D(A), D(B) \subset D(A^*)$,

则

- (a) $(J_2H)^* = J_2H$ (即, 辛自伴);
- (b) $\sigma(H)$ 关于虚轴对称;
- (c) $\sigma_p(H) \cup \sigma_r(H)$ 关于虚轴对称;
- (d) $\sigma_c(H)$ 关于虚轴对称;
- (e) 算子 iH 相似与算子 $(iH)^*$.

证明 由于

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} : D(H) \subset X \times X \rightarrow X \times X$$

是无穷维 Hamilton 算子, 因此, $J_2H \subset (J_2H)^*$. 如果条件 (i) 或者条件 (ii) 成立, 则由定理 2.3 和定理 2.4 可知 $0 \in \rho(H)$, 再由引理 2.1, 即得 $(J_2H)^* = J_2H$, 即 $iH = J_3(iH)^*J_3$. 其中 $J_3 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$, $J_3^{-1} = J_3 = J_3^*$. 从而, 结论 (a), (b), (c), (d) 以及 (e) 立即可证.

推论 2.6 设

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} : D(H) \subset X \times X \rightarrow X \times X$$

是无穷维 Hamilton 算子, 如果存在 $M > 0$ 使得对任意 $[x, y]^T \in D(H)$, 有

$$|(By, y) + (Cx, x)| \geq M\|[x, y]^T\|^2,$$

则 $\{i\lambda : \lambda \in R\} \subset \gamma(H)$. 进一步, 如果 $D(C) \subset D(A), D(B) \subset D(A^*)$ 则 $\{i\lambda : \lambda \in R\} \subset \rho(H)$.

证明 对任意 $i\lambda, \lambda \in R$, 易证算子 $H - i\lambda$ 还是一个无穷维 Hamilton 算子. 又由给定条件可知, $0 \in \gamma(H - i\lambda)$, 从而即得 $\{i\lambda : \lambda \in R\} \subset \gamma(H)$. 如果 $D(C) \subset D(A), D(B) \subset D(A^*)$ 则由上面的结论可知 $0 \in \rho(H - i\lambda)$, 即 $\{i\lambda : \lambda \in R\} \subset \rho(H)$.

下面将举例说明以上结果的有效性.

例 2.1 考虑偏微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u = 0, & t > 0 \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \phi(x), \end{cases}$$

并把它导入 Hamilton 系统后得到 Hamilton 正则方程为

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & I \\ I & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix}.$$

令 $X = L^2[0, 1]$ 则在 $X \times X$ 中导出的无穷维 Hamilton 算子为

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & I \\ I & \frac{d}{dx} \end{bmatrix}.$$

其中 $D(A) = \{u \in X : u \text{ 绝对连续}, u' \in X, u(0) = u(1) = 0\}$. 容易证明, 0 不包含于算子 H 的近似点谱和剩余谱, 因此 $0 \in \rho(H)$, 即算子 H 可逆.

另一方面, 存在 $M > 0$ 使得对任意 $[x, y]^T \in D(H)$, 有

$$|(By, y) + (Cx, x)| \geq M\|[x, y]^T\|^2,$$

因此, 由定理 2.3 可知 $0 \in \rho(H)$. 从而结论成立.

3 无穷维 Hamilton 算子的逆紧性

定理 3.1 设

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} : D(C) \times D(B) \rightarrow X \times X$$

是无穷维 Hamilton 算子, 存在 $M > 0$ 使得对任意 $[x, y]^T \in D(H)$, 有

$$|(By, y) + (Cx, x)| \geq M\|[x, y]^T\|^2$$

成立且 B^{-1}, C^{-1} 是紧算子则 H^{-1} 存在且是紧算子.

证明 由于

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & AC^{-1} \\ -A^*B^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}.$$

由 $0 \in \rho(H)$ 可知 $R = \begin{bmatrix} I & AC^{-1} \\ -A^*B^{-1} & I \end{bmatrix}$ 是双射, 从而

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix} R^{-1},$$

即得 H^{-1} 是紧算子.

定理 3.2 设

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} : D(A) \times D(A^*) \rightarrow X \times X$$

是无穷维 Hamilton 算子, 如果存在 $M > 0$ 使得对任意 $[x, y]^T \in D(H)$, 有

$$|(By, y) + (Cx, x)| \geq M\|[x, y]^T\|^2$$

且 A^{-1} 是紧算子, 则 H^{-1} 存在且是紧算子.

证明 根据给定条件易得 $0 \in \rho(H)$ 并且

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & -(A^*)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & B(A^*)^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix},$$

其中 $S = (A^* + CA^{-1}B)(A^*)^{-1}$, S^{-1} 存在且全空间上有定义, 故 H^{-1} 存在且是紧算子.

4 Dirac 算子的可逆性问题中的应用

Dirac 算子在流体力学及电磁场论中具有重要应用. 下面将要给出无穷维 Hamilton 算子的可逆性问题在 Dirac 算子的可逆性问题中的应用.

定义 4.1 令

$$\mathfrak{D} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & D \end{bmatrix} : D(\mathfrak{D}) \subset X \times X \rightarrow X \times X$$

为稠定闭线性算子, 其中 A, B, D 稠定闭且 A, D 是自伴算子, 则称 $\mathfrak{D}$ 为 Dirac 算子.

定理 4.1 设

$$\mathfrak{D} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & D \end{bmatrix} : D(\mathfrak{D}) \subset X \times X \rightarrow X \times X$$

是 Dirac 算子.

(i) 如果 $D(A) \subset D(B^*), D(D) \subset D(B)$ 且存在 $M > 0$ 使得对任意 $[x, y]^T \in D(\mathfrak{D})$, 有

$$|(Dy, y) - (Ax, x)| \geq M\|[x, y]^T\|^2,$$

则 $0 \in \rho(\mathfrak{D})$. 进一步, 如果 A^{-1}, D^{-1} 是紧算子则 $\mathfrak{D}^{-1}$ 是紧的.

(ii) 如果 $0 \in \rho(B), D(A) \supset D(B^*), D(D) \supset D(B)$, 且存在 $M > 0$ 使得对任意 $[x, y]^T \in D(\mathfrak{D})$, 有

$$|(Dy, y) - (Ax, x)| \geq M\|[x, y]^T\|^2,$$

则 $0 \in \rho(\mathfrak{D})$. 如果 B^{-1} 是紧的则 $\mathfrak{D}^{-1}$ 是紧的.

(iii) 如果 $D(A) \subset D(B^*), D(D) \subset D(B)$ 且 $A, -D$ 是非负算子, 则由 $0 \in \rho(A) \cap \rho(D)$ 能够推出 $0 \in \rho(\mathfrak{D})$.

(iv) 如果 $A, -D$ 是非负算子时, 当 B, B^* 单射或者 A, D 单射时 $\mathfrak{D}$ 是单射.

证明 考虑到 $J_2 \mathfrak{D}$ 是无穷维 Hamilton 算子, 结论 (i), (ii), (iii), (iv) 立即可证, 其中 $J_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$.

致谢 作者衷心感谢审稿专家提出的宝贵审稿意见.

参考文献

- 1 谷超豪, 李大潜, 沈玮熙. 应用偏微分方程. 北京: 高等教育出版社, 1994
- 2 Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1978
- 3 Magri F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation. J Math Phys, 1978, 19: 1156-1162
- 4 Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1998
- 5 Tretter C. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. London: Imperial College Press, 2008
- 6 Langer H, Ran A C M, van de Rotten B A. Invariant subspaces of infinite dimensional Hamiltonians and Solutions of the corresponding Riccati equations. Oper Theory Adv Appl, 2001, 130: 235-254
- 7 Kurina G A. Invertibility of nonnegatively Hamiltonian operators in a Hilbert space. Differential Equations, 2001, 37: 880-882
- 8 Langer H, Langer M, Tretter C. Variational principles for eigenvalues of block operator matrices. Indiana Univ Math J, 2002, 51: 1427-1458
- 9 吴德玉, 阿拉坦仓. 非负 Hamilton 算子的可逆性. 数学年刊 A 辑, 2008, 29: 719-724
- 10 侯国林, 阿拉坦仓, 黄俊杰. Hilbert 空间线性二次最优控制问题中的一个算子的可逆性. 数学学报, 2007, 50: 473-480

- 11 Weidmann J. Linear Operators in Hilbert Spaces. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1980
- 12 Kato T. Perturbation theory for linear operators. (Second Corrected Printing of the Second edition.) Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo: Springer-Verlag, 1984
- 13 Azizov T Y, Dijksma A, Gridneva A V. On the boundness of Hamiltonian operators. Proc Amer Math Soc, 2002, 131: 563–576
- 14 Azizo T Y, Iokhvidov I S. Linear Operators in Spaces with an Indefinite Metric. New York: Wiley, 1989
- 15 Bognar J. Indefinite Inner Product Spaces. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1974
- 16 吴德玉, 阿拉坦仓. 无穷维 Hamilton 算子特征函数系的 Cauchy 主值意义下完备性. 中国科学 A 辑, 2008, 38: 904–912
- 17 黄俊杰, 阿拉坦仓, 范小英. 无穷维 Hamilton 算子的谱结构. 中国科学 A 辑, 2008, 38: 71–78
- 18 丁卫, 钱定边. 碰撞 Hamiltonian 系统的无穷小周期解. 中国科学 A 辑, 2010, 40: 563–574

Invertibility of infinite-dimensional Hamiltonian operator and its applications

WU DeYu & Alatan Cang

Abstract In this paper the invertibility of infinite-dimensional Hamiltonian operators which arise in infinite-dimensional Hamiltonian systems are studied. The results allow to illustrate the spectral properties of infinite dimensional Hamiltonian operators and characterize the compactness of inverse by applying its entries. In the end, applications to the invertibility of Dirac operators are given.

Keywords: infinite-dimensional Hamiltonian operator, Dirac operator, compact inverse, point spectrum
MSC(2000): 47B47