非均匀介质中离散 Fisher-KPP 方程广义行波的稳定性和唯一性

献给钱敏教授 90 华诞

曹峰^{1*}, 沈文仙²

1. 南京航空航天大学数学系, 南京 210016;

2. Department of Mathematics and Statistics, Auburn University, Auburn 36849, USA

E-mail: fcdo@nuaa.edu.cn, wenxish@auburn.edu

收稿日期: 2017-06-02; 接受日期: 2017-08-17; 网络出版日期: 2017-09-27; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11201226) 资助项目

摘要 本文研究具有一般时间和空间依赖性离散 Fisher-KPP (Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov 简称为 KPP) 方程广义行波的稳定性和唯一性. 首先证明此类方程严格正整体解的存在性、唯一性和稳定性; 接着建立连接此唯一严格正整体解和平凡零解的广义行波的稳定性和唯一性. 应用广义行波的一般性稳定性和唯一性理论, 本文进而证明时间和空间周期介质中离散 Fisher-KPP 方程周期行波解的存在性、稳定性和唯一性, 以及时间非均匀介质中离散 Fisher-KPP 方程广义行波的存在性、稳定性和唯一性. 本文所建立的一般性稳定性和唯一性理论表明在很多情形下得到的广义行波在合适的扰动下是渐近稳定的.

关键词 非均匀介质 离散 Fisher-KPP 方程 广义行波 稳定性 唯一性

MSC (2010) 主题分类 35C07, 34K05, 34K60, 34A34, 34D20

1 引言

本文是为了探索下述离散 Fisher-KPP 方程广义行波的稳定性和唯一性:

$$\dot{u}_j(t) = d(t, j+1)(u_{j+1}(t) - u_j(t)) + d(t, j-1)(u_{j-1}(t) - u_j(t)) + u_j(t)f(t, j, u_j(t)), \quad (1.1)$$

其中 $j \in \mathbb{Z}$, $\inf_{j \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}} d(t, j) > 0$, 并且 $f(t, j, u)$ 是单稳的或者 Fisher-KPP 型. 更详细地, 假设

(H0) $f(t, j, u)$ 关于 $t \in \mathbb{R}$ 是局部 Hölder 连续的, 关于 $u \in \mathbb{R}$ 是 Lipschitz 连续的, 关于 $u \geq 0$ 是连续可微的. 此外, $f(t, j, u) = f(t, j, 0)$, $u \leq 0$; 存在某个 $M_0 > 0$ 使得 $f(t, j, u) < 0$, $u \geq M_0$; $f_u(t, j, u) < 0$, $u \geq 0$; 并且

$$\liminf_{t-s \rightarrow \infty} \frac{1}{t-s} \int_s^t \inf_{j \in \mathbb{Z}} f(\tau, j, 0) d\tau > 0. \quad (1.2)$$

英文引用格式: Cao F, Shen W X. Stability and uniqueness of generalized traveling waves of lattice Fisher-KPP equations in heterogeneous media (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1787-1808, doi: 10.1360/N012017-00116

$$\text{令 } l^\infty = \{u = \{u_i\}_{i \in \mathbb{Z}} : \sup_{i \in \mathbb{Z}} |u_i| < \infty\}, \text{ 模 } \|u\| = \|u\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{Z}} |u_i|, \text{ 令} \\ l^{\infty,+} = \{u \in l^\infty \mid u_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

由 (H0) 知, 对任意给定的 $u^0 \in l^\infty$ 和 $s \in \mathbb{R}$, (1.1) 有一个唯一的 (局部的) 解 $u(t; s, u^0) = \{u_i(t; s, u^0)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 满足 $u(s; s, u^0) = u^0$. 此外, 如果 $u^0 \in l^{\infty,+}$, 则 $u(t; s, u^0) = \{u_i(t; s, u^0)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 对所有的 $t \geq s$ 存在, 并且 $u(t; s, u^0) \in l^{\infty,+}$, $t \geq s$ (见引理 2.1).

方程 (1.1) 被用来模拟生物学和生态学中斑块环境中物种的种群动态 (参见文献 [1, 2]). 它是下述反应扩散方程的离散版本:

$$u_t = d(t, x)u_{xx} + uf(t, x, u). \quad (1.3)$$

当有机体的运动或者内部扩散在不同位置间随意发生时, 方程 (1.3) 被广泛用来模拟空间连续介质中物种的种群动态. 注意到, 由于生物学的原因, 我们仅对 (1.1) 的非负解感兴趣. 假设 $f(t, j, u) = f(t, j, 0)$ ($u \leq 0$) 只是为了方便起见, 对 (1.1) 的非负解没有影响.

(1.1) 和 (1.3) 的一个中心动力学问题是, 当初值是严格正的时或是一个类波函数时, 方程解是如何随时间的增加而发展的. 例如, 当 u^0 是严格正的 ($\inf_{i \in \mathbb{Z}} u_i^0 > 0$), 或者 u^0 是非负的并且是一个类波函数时 ($\sup_{i \geq I} u_i^0 \rightarrow 0$, $\inf_{i \leq -I} u_i^0 \rightarrow u_* > 0$, 当 $I \rightarrow \infty$ 时), 掌握 (1.1) 的解 $u(t; s, u^0)$ 随时间的发展是非常重要的. 后者是关于 (1.1) 和 (1.3) 的波传播动力学, 与当 $d(t, j) \equiv d$ 且 $f(t, j, u) \equiv f(u)$ 时 (分别地, 当 $d(t, x) \equiv d$ 且 $f(t, x, u) \equiv f(u)$ 时) (1.1) (分别地, (1.3)) 所谓的行波解密切相关.

关于 (1.3) 行波解的研究要追溯到 Fisher^[3] 和 Kolmogorov 等^[4] 在特殊情形 $d(t, x) = 1$ 和 $f(t, x, u) = 1 - u$ 下的讨论. 感谢 Fisher^[3] 和 Kolmogorov 等^[4] 的开创性工作, 当 f 满足 (H0) 时, (1.1) 和 (1.3) 一般被称为 Fisher 或者 KPP 方程. 在 Fisher 和 Kolmogorov 等工作的基础上, 时间和空间齐次介质中或者时间和/或空间周期介质中 Fisher 或者 KPP 型发展方程的行波解得到了广泛地研究. 关于齐次介质中 Fisher 或者 KPP 型反应扩散方程的研究可以参见文献 [5–10]; 关于周期介质中 Fisher 或者 KPP 型反应扩散方程的研究可以参见文献 [11–18]; 关于更一般的非均匀介质中 Fisher 或者 KPP 型反应扩散方程的研究可以参见文献 [19–25]. 接下来给出在周期介质或者非均匀介质中离散 Fisher 或者 KPP 方程行波解的简要回顾.

考虑 (1.1) 在齐次介质中的情形, 即当 $d(t, j) \equiv d$, $f(t, j, u) \equiv f(u)$ 时的情形. 由 (H0) 知, 存在唯一的 $u^+ > 0$ 使得对满足 $\inf_{j \in \mathbb{Z}} u_j^0 > 0$ 的任意 $u^0 \in l^\infty$, 有

$$\lim_{t-s \rightarrow \infty} \|u(t; s, u^0) - u^+\|_{l^\infty} = 0.$$

此时, (1.1) 的解 $\{u_j(t)\}$ 称为一个连接 $u = 0$ 和 $u = u^+$ 的行波解, 如果它是一个整体解 (即定义在 $t \in (-\infty, \infty)$ 上的解) 并且存在一个常数 c 和一个函数 $\Phi(\cdot)$ 使得

$$0 < u_j(t) = \Phi(j - ct) < u^+, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \Phi(z) = u^+, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z) = 0,$$

其中 c 和 $\Phi(\cdot)$ 分别称为行波解的波速和波形. 众所周知, 存在一个 $c^* > 0$ 使得当且仅当 $c \geq c^*$ 时, (1.1) 具有一个波速为 c 的行波解. 关于此类行波解的存在性, 可参见文献 [26–30]; 关于此类行波解的唯一性和稳定性, 可参见文献 [26, 27, 31].

如果 $d(t, j)$ 和 $f(t, j, u)$ 分别关于 t 和 j 具有周期 $T \in \mathbb{R}^+$ 和 $J \in \mathbb{Z}^+$, 那么由 (H0) 可知, (1.1) 存在唯一的正周期解 $u^+(t) = \{u_j^+(t)\}$ ($u_j^+(t) = u_j^+(t + T) = u_{j+J}^+(t)$), 使得对满足 $\inf_{j \in \mathbb{Z}} u_j^0 > 0$ 的任意 $u^0 \in l^\infty$, 有

$$\lim_{t-s \rightarrow \infty} \|u(t; s, u^0) - u^+(t)\|_{l^\infty} = 0.$$

(1.1) 的整体解 $\{u_j(t)\}$ 称为一个连接 $u = 0$ 和 $u = u^+$ 的周期行波解或者脉动波解, 如果存在一个常数 c (称为波速) 和一个函数 $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ (称为波形) 使得

$$0 < u_j(t) = \Phi(j - ct, t, j) < u_j^+(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x, t, j) = u_j^+(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x, t, j) = 0,$$

且

$$\Phi(\cdot, \cdot + T, \cdot) = \Phi(\cdot, \cdot, \cdot + J) = \Phi(\cdot, \cdot, \cdot).$$

关于周期行波解的存在性, 可参见文献 [28, 32], 当 $d(t, j)$ 和 $f(t, j, u)$ 不依赖于 t 且关于 j 具有周期性时, 周期行波解的唯一性和稳定性可参见文献 [33]. 我们注意到, 当 $d(t, j)$ 和 $f(t, j, u)$ 不依赖于 j 且关于 t 具有周期性时, (1.1) 周期行波解的存在性可由文献 [8, 34] 得到, 但是此时周期行波解的唯一性和稳定性却是公开问题. 我们同时注意到, 当 $d(t, j)$ 和 $f(t, j, u)$ 关于 t 和 j 同时具有周期性时, (1.1) 周期行波解的存在性可由文献 [14, 18] 得到, 但是此时周期行波解的唯一性和稳定性依然没有得到解决.

具有一般时间和/或空间依赖性的 Fisher-KPP 型方程波传播动力学的研究近期才得以发展, 由于更加贴近现实问题, 此项研究正吸引着人们越来越多的关注. 为了研究具有一般时间和/或空间依赖性的 Fisher-KPP 型方程的波传播动力学, 首先需要把经典行波解的定义作合理地延伸. 例如, 在文献 [25, 35] 中, 随机 KPP 方程和具有相当一般时间依赖性的 KPP 方程的随机行波解和一般性行波解的定义被引入. 在文献 [36, 37] 中, 具有一般空间和时间依赖性的 KPP 方程的一般性广义行波解的定义被引入.

注意到, 在 (H0) 的假设下, 由类似文献 [38, 定理 1.1] 的论证可得, 存在唯一的严格正整体解 $u^+(t) = \{u_j^+(t)\}$ ($\inf_{j \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}} u_j^+(t) > 0$), 使得对满足 $\inf_{j \in \mathbb{Z}} u_j^0 > 0$ 的任意 $u^0 \in l^\infty$ 和 $s \in \mathbb{R}$, 有 (见命题 2.1)

$$\lim_{t-s \rightarrow \infty} \|u(t; s, u^0) - u^+(t)\|_{l^\infty} = 0.$$

(1.1) 的整体解 $\{u_j(t)\}$ 称为一个连接 $u = 0$ 和 $u = u^+$ 的一般性行波解或者广义行波解, 如果存在一个波位置函数 $X(t) \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} |u_{j+X(t)}(t) - u_{j+X(t)}^+(t)| = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} u_{j+X(t)}(t) = 0$$

关于 $t \in \mathbb{R}$ 一致地成立. 易见, (1.1) 在不依赖于时间和空间的情形下的行波解和在周期依赖于时间和空间情形下的周期行波解都是广义行波解. 关于 (1.3) 的广义行波解可类似地定义.

非周期非均匀介质中 Fisher-KPP 型方程波传播动力学的研究工作非常少. 例如, 文献 [39–41] 证明了当一般性依赖于时间并且关于空间具有周期性时或者不依赖于时间但具有空间几乎周期 KPP 非线性项时 (1.3) 一般性广义行波的存在性. Zlatoš [42] 在一些特定的假设下 (参见文献 [42, (1.2)–(1.5)]), 建立了空间非齐次 Fisher-KPP 型反应扩散方程一般性广义行波的存在性. 在文献 [43] 中, 相当一般性地依赖时间和空间的 Fisher-KPP 型反应扩散方程广义行波的稳定性得到了研究. 对于空间离散 KPP 方程, 文献 [44] 研究了具有时间回复 KPP 非线性项 $f(t, u)$ 时 (1.1) 的空间传播速度. 在最新的文献 [38] 中, 本文的作者建立了一般性依赖时间的离散 Fisher-KPP 方程广义行波的存在性. 但是, 一般性依赖时间和/或空间的离散 Fisher-KPP 方程广义行波的稳定性和唯一性却鲜有研究.

本文的目的正是研究一般性非均匀介质中离散 Fisher-KPP 方程广义行波的稳定性和唯一性, 并且应用它得到系数关于 t 和 j 具有周期性时 (1.1) 周期行波解的存在性、稳定性和唯一性, 应用它得到具有空间齐次系数时 (1.1) 广义行波的存在性、稳定性和唯一性.

我们首先在第 2 节建立一个关于 (1.1) 广义行波稳定性和唯一性的一般性定理 (见定理 2.1). 应用此定理, 我们分别在第 3 和 4 节证明当 $d(t, j)$ 和 $f(t, j, u)$ 关于 t 和 j 具有周期性时 (1.1) 周期行波解的存在性、稳定性和唯一性 (见定理 3.1); 当 $d(t, j) \equiv d(t)$ 且 $f(t, j, u) \equiv f(t, h)$ 时 (1.1) 广义行波的存在性、稳定性和唯一性 (见定理 4.1). 我们将在其他地方研究更为一般的非均匀介质中 (1.1) 广义行波的存在性. 需要指出的是, 本文所建立的一般性稳定性和唯一性定理也可应用到这里所说的更为一般的非均匀介质中广义行波的稳定性和唯一性研究中.

2 一般性非均匀介质中广义行波的稳定性和唯一性

本节将研究 (1.1) 的广义行波的稳定性和唯一性.

首先, 我们有下面的命题:

命题 2.1 假设 (H0) 成立, 则存在唯一的严格正整体解 $u^+(t) = \{u_j^+(t)\}$ 使得对满足 $\inf_{j \in \mathbb{Z}} u_j^0 > 0$ 的任意 $u^0 \in l^\infty$, 有 $u(t; t_0, u^0)$ 对所有的 $t \geq t_0$ 存在, 并且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t + t_0; t_0, u^0) - u^+(t + t_0)\|_{l^\infty} = 0$$

关于 $t_0 \in \mathbb{R}$ 一致地成立.

本节主要的结果便是下述定理:

定理 2.1 假设 $u(t) = U(t, \cdot)$ 是 (1.1) 的一个广义行波, 并且其波位置函数 $X(t)$ 满足

$$\forall \tau > 0, \quad \sup_{t, s \in \mathbb{R}, |t-s| \leq \tau} |X(t) - X(s)| < \infty. \quad (2.1)$$

假设存在正的连续函数 $\phi(t, j)$ 和 $\phi_1(t, j)$ 使得

$$\liminf_{j \rightarrow -\infty} \phi(t, j) = \infty, \quad \liminf_{j \rightarrow -\infty} \phi_1(t, j) = \infty, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \phi(t, j) = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \phi_1(t, j) = 0, \quad (2.2)$$

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \frac{\phi(t, j + X(t))}{\phi_1(t, j + X(t))} = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\phi_1(t, j + X(t))}{\phi(t, j + X(t))} = 0 \quad (2.3)$$

以指数方式成立, 并且 (2.3) 中第二个极限关于 t 一致地成立;

$$d^* \phi(t, j) - d_1^* \phi_1(t, j) \leq U(t, j) \leq d^* \phi(t, j) + d_1^* \phi_1(t, j) \quad (2.4)$$

对某 $d^*, d_1^* > 0$ 和所有的 $t \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}$ 成立; 并且对任意给定的 $t_0 \in \mathbb{R}$ 和 $u^0 \in l^\infty$ ($u_j^0 \geq 0$), 如果

$$u_j^0 \geq d\phi(t_0, j) - d_1\phi_1(t_0, j) \quad (\text{分别地, } u_j^0 \leq d\phi(t_0, j) + d_1\phi_1(t_0, j))$$

对某 $0 < d < 2d^*, d_1 \gg 1$ 和所有的 $j \in \mathbb{Z}$ 成立, 则

$$u_j(t; t_0, u^0) \geq d\phi(t, j) - d_1\phi_1(t, j) \quad (\text{分别地, } u_j(t; t_0, u^0) \leq d\phi(t, j) + d_1\phi_1(t, j)) \quad (2.5)$$

对所有的 $t \geq t_0$ 和 $j \in \mathbb{Z}$ 成立. 那么下述结论成立:

(1) (稳定性) 广义行波 $u(t) = U(t, \cdot)$ 是渐近稳定的: 对任意的 $t_0 \in \mathbb{R}$ 和 $u^0 \in l^\infty$, 如果它们满足对所有的 $j \in \mathbb{Z}$ 有 $u_j^0 > 0$, 并且

$$\inf_{j \leq j_0} u_j^0 > 0, \quad \forall j_0 \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{u_j^0}{U(t_0, j)} = 1, \quad (2.6)$$

则成立

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \frac{u(t+t_0; t_0, u^0)}{U(t+t_0, \cdot)} - 1 \right\|_{l^\infty} = 0. \quad (2.7)$$

(2) (唯一性) 如果 $u(t) = V(t, \cdot)$ 也是 (1.1) 的一个广义行波, 并且满足

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{V(t, j+X(t))}{U(t, j+X(t))} = 1$$

关于 $t \in \mathbb{R}$ 一致地成立, 则 $V(t, \cdot) \equiv U(t, \cdot)$.

为了证明命题 2.1 和定理 2.1, 我们首先给出一些引理.

函数 $v(t, j)$ ($(t, j) \in [s, T) \times \mathbb{Z}$) 称为 (1.1) 的一个上解或者下解, 如果对任意给定的 $j \in \mathbb{Z}$, $v(t, j)$ 关于 $t \in [s, T)$ 是绝对连续的, 并且有

$$v_t(t, j) \geq d(t, j-1)(v(t, j-1) - v(t, j+1)) + d(t, j+1)(v(t, j+1) - v(t, j)) + v(t, j)f(t, j, v(t, j))$$

对几乎所有的 $t \in [s, T)$ 成立, 或者

$$v_t(t, j) \leq d(t, j-1)(v(t, j-1) - v(t, j)) + d(t, j+1)(v(t, j+1) - v(t, j)) + v(t, j)f(t, j, v(t, j))$$

对几乎所有的 $t \in [s, T)$ 成立. 对给定的 $u, v \in l^\infty$, 定义

$$u \leq (\geq) v, \quad \text{如果 } u_j \leq (\geq) v_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

引理 2.1 (比较原理) (1) 如果 $u_1(t, j)$ 和 $u_2(t, j)$ 分别是 $[s, T)$ 上 (1.1) 的有界下解和上解, 并且 $u_1(s, \cdot) \leq u_2(s, \cdot)$, 则有 $u_1(t, \cdot) \leq u_2(t, \cdot)$, $t \in [s, T)$.

(2) 假设 $u_1(t, j)$ 和 $u_2(t, j)$ 是有界的, 并且满足对任给的 $j \in \mathbb{Z}$, $u_1(t, j)$ 和 $u_2(t, j)$ 关于 $t \in [s, \infty)$ 是绝对连续的, 以及

$$\begin{aligned} & \partial_t u_2(t, j) - (d(t, j-1)u_2(t, j-1) + d(t, j+1)u_2(t, j+1) \\ & - (d(t, j-1) + d(t, j+1))u_2(t, j) + u_2(t, j)f(t, j, u_2(t, j))) \\ & > \partial_t u_1(t, j) - (d(t, j-1)u_1(t, j-1) + d(t, j+1)u_1(t, j+1) \\ & - (d(t, j-1) + d(t, j+1))u_1(t, j) + u_1(t, j)f(t, j, u_1(t, j))) \end{aligned}$$

对几乎所有的 $t > s$ 成立. 此外, 假设 $u_2(s, j) \geq u_1(s, j)$, 则有 $u_2(t, j) > u_1(t, j)$, $j \in \mathbb{Z}$, $t > s$.

(3) 如果 $u^0 \in l^{\infty, +}$, 则 $u(t; s, u^0)$ 存在, 并且有 $u(t; s, u^0) \geq 0$, $t \geq s$.

证明 可由类似文献 [38, 命题 2.1] 的论证得出. $\square$

引理 2.2 假设 $u^{0n}, u^0 \in l^{\infty, +}$ ($n = 1, 2, \dots$) 且 $\{\|u^{0n}\|\}$ 是有界的. 如果对任意的 $j \in \mathbb{Z}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $u_j^{0n} \rightarrow u_j^0$ 成立, 则对于每一个 $t > 0$ 和任意的 $j \in \mathbb{Z}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $u_j(s+t; s, u^{0n}) - u_j(s+t; s, u^0) \rightarrow 0$ 关于 $s \in \mathbb{R}$ 一致地成立.

证明 由类似文献 [38, 命题 2.2] 的论证得出引理成立. $\square$

对于给定的 $u, v \in l^{\infty, +}$, 如果

$$\left\{ \alpha > 1 : \frac{1}{\alpha}v \leq u \leq \alpha v \right\} \neq \emptyset,$$

定义 $\rho(u, v)$ 为

$$\rho(u, v) := \inf \left\{ \ln \alpha : \alpha > 1, \frac{1}{\alpha} v \leq u \leq \alpha v \right\},$$

并且称 $\rho(u, v)$ 是 u 与 v 之间的部分度量.

引理 2.3 (部分度量) (1) 对给定的 $u^0, v^0 \in l^{\infty,+}$ ($u^0 \neq v^0$), 如果 $\rho(u^0, v^0)$ 是合理定义的, 则对每一个 $t > s$, $\rho(u(t; s, u_0), u(t; s, v_0))$ 也是合理定义的, 并且 $\rho(u(t; s, u_0), u(t; s, v_0))$ 关于 t 非增.

(2) 对满足 $\epsilon < M$ 和 $\sigma \leq \ln \frac{M}{\epsilon}$ 的任意 $\epsilon > 0$, $\sigma > 0$, $M > 0$ 和 $\tau > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对满足 $\epsilon \leq u_j^0 \leq M$, $\epsilon \leq v_j^0 \leq M$, $j \in \mathbb{Z}$ 和 $\rho(u^0, v^0) \geq \sigma$ 的任意 $u^0, v^0 \in l^{\infty,++}$, 成立

$$\rho(u(\tau + s; s, u^0), u(\tau + s; s, v^0)) \leq \rho(u^0, v^0) - \delta, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

(3) 假设 $u^1(t)$ 和 $u^2(t)$ 是 (1.1) 的两个不同的正整体解, 存在 $c(t) \in \mathbb{Z}$ 和 $\mu > 0$ 使得

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{u_{j+c(t)}^i(t)}{e^{-\mu j}} = 1$$

关于 t 一致地成立 ($i = 1, 2$), 并且对任意的 $j_0 \in \mathbb{Z}$, 有

$$\inf_{j \leq j_0, t \in \mathbb{R}} u_{j+c(t)}^i(t) > 0, \quad i = 1, 2,$$

则对任意的 $\tau > 0$ 和 $T \in \mathbb{R}$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$\rho(u^1(s + \tau), u^2(s + \tau)) < \rho(u^1(s), u^2(s)) - \delta, \quad s \leq T.$$

证明 可由类似文献 [38, 命题 2.3] 的论证得出. □

命题 2.1 的证明 可由类似文献 [38, 定理 1.1] 的论证得出. 下面给出证明的大纲.

考虑 (1.1) 在 0 点的线性化方程

$$\dot{v}_j = d(t, j-1)(v_{j-1}(t) - v_j(t)) + d(t, j+1)(v_{j+1}(t) - v_j(t)) + f(t, j, 0)v_j(t). \quad (2.8)$$

令 $v(t; s, v^0)$ 是 (2.8) 满足 $v(s; s, v^0) = v^0 \in l^\infty$ 的解, 则对任意的 $v^0 \in l^\infty$ ($v_j^0 \geq 0$), 有

$$v_j(t; s, v^0) \geq e^{\int_s^t \inf_{j \in \mathbb{Z}} f(\tau, j, 0) d\tau} \inf_{j \in \mathbb{Z}} v_j^0.$$

由 (H0), 我们可以找到 $\epsilon_0 > 0$ 和 $T > 0$ 使得

$$\frac{\int_s^{s+T} \inf_{j \in \mathbb{Z}} f(\tau, j, 0) d\tau}{T} > \epsilon_0, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

注意到对上述 $\epsilon_0 > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$ 使得

$$f(t, j, u) \geq \inf_{j \in \mathbb{Z}} f(t, j, 0) - \epsilon_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |u| \leq \delta_0.$$

由此可证得对 $0 < \delta \ll 1$, 有

$$u(t; s, v^\delta) \geq e^{\int_s^t \inf_{j \in \mathbb{Z}} f(\tau, j, 0) d\tau - \epsilon_0(t-s)} v^\delta, \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \in [s, s+T],$$

其中 $v_j^\delta = \delta$, $\forall j \in \mathbb{Z}$. 特别地,

$$u(s+T; s, v^\delta) \geq e^{\int_s^{s+T} \inf_{j \in \mathbb{Z}} f(\tau, j, 0) d\tau - \epsilon_0 T} v^\delta \geq v^\delta.$$

由归纳法, 有

$$u(t; s, v^\delta) \geq e^{\int_{s+nT}^t f(\tau, 0) d\tau - \epsilon_0(t-s-nT)} v^\delta, \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \in [s+nT, s+(n+1)T], \quad (2.9)$$

其中 $n = 0, 1, 2, \dots$

由 (H0), 有 $f(t, j, u) < 0, \forall t \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}, u \geq M_0$. 因此,

$$u(t; s, u^M) < u^M, \quad t > s, \quad (2.10)$$

其中 $M \geq M_0$ 且 $u_j^M = M, \forall j \in \mathbb{Z}$.

固定 $M \geq M_0$ 和 $0 < \delta \ll 1$. 令

$$u^n(t) = u(t; -nT, u^M), \quad t \geq -nT,$$

则有

$$u(t; -(n+1)T, v^\delta) < u^{n+1}(t) < u^n(t), \quad t \geq -nT.$$

令

$$u^+(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u^n(t),$$

则 $u^+(t)$ 是 (1.1) 的一个整体解. 由 (2.9) 可得

$$\inf_{j \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}} u_j^+(t) > 0. \quad (2.11)$$

因此, $u^+(t) = \{u_j^+(t)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 是 (1.1) 的一个严格正整体解. 由类似文献 [38, 定理 1.1] 的论证可得, 对满足 $\inf_{j \in \mathbb{Z}} u_j^0 > 0$ 的任意 $u^0 \in l^\infty$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t+s; s, u^0) - u^+(t+s)\|_{l^\infty} = 0$$

关于 $s \in \mathbb{R}$ 一致地成立. 命题由此得证. $\square$

定理 2.1 的证明 (1) 可由类似文献 [43, 定理 2.2] 的论证得出. 下面给出证明的大纲.

首先, 注意到, 对给定的满足 (2.6) 的 u^0 和 $t_0 \in \mathbb{R}$, 部分度量 $\rho(u^0, U(t_0, \cdot))$ 是合理定义的, 进而 $\rho(u(t, \cdot; t_0, u_0), U(t+t_0, \cdot))$ 对所有的 $t \geq 0$ 是合理定义的. 由引理 2.3, 为了证明 (2.7), 只需要证明对任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$\rho(u(t+t_0, \cdot; t_0, u^0), U(t+t_0, \cdot)) < \epsilon \quad (2.12)$$

对某个 $t > 0$ 成立.

其次, 假设存在 $\epsilon_0 > 0$ 使得

$$\rho(u(t+t_0, \cdot; t_0, u^0), U(t+t_0, \cdot)) \geq \epsilon_0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.13)$$

固定一个 $\tau > 0$. 我们断言, 如果 (2.13) 成立, 则存在 $\delta > 0$ 使得

$$\rho(u(\tau+s+t_0, \cdot; t_0, u^0), U(\tau+s+t_0, \cdot)) \leq \rho(u(s+t_0, \cdot; t_0, u^0), U(s+t_0, \cdot)) - \delta, \quad \forall s \geq 0. \quad (2.14)$$

事实上, 对任意的 $0 < \epsilon < \frac{\epsilon_0}{4+2\epsilon_0}$, 由 (2.2)、(2.3) 和 (2.6) 可知, 存在 $d_1 \gg d_1^*$ 使得

$$d^*(1-\epsilon)\phi(t_0, j) - d_1\phi_1(t_0, j) \leq u_j^0 \leq d^*(1+\epsilon)\phi(t_0, j) + d_1\phi_1(t_0, j).$$

由 (2.5) 可得

$$d^*(1-\epsilon)\phi(t, j) - d_1\phi_1(t, j) \leq u_j(t; t_0, u^0) \leq d^*(1+\epsilon)\phi(t, j) + d_1\phi_1(t, j), \quad \forall t \geq t_0.$$

由文献 [43, (4.5) 和 (4.6)] 中的论证, 对任意的 $s \geq 0$, 存在 $x_s (\geq X(t_0 + s))$ 使得

$$\sup_{s \geq 0, t \in [t_0 + s, t_0 + s + \tau]} |x_s - X(t)| < \infty \quad (2.15)$$

且

$$\frac{1}{1 + \epsilon_0/2} U(t, j) \leq u_j(t; t_0, u^0) \leq \left(1 + \frac{\epsilon_0}{2}\right) U(t, j), \quad \forall t \in [t_0 + s, t_0 + s + \tau], \quad j \geq x_s. \quad (2.16)$$

由类似文献 [43, (4.7)] 的论证, 我们可以证明

$$\inf_{s \geq 0, t \in [s + t_0, \tau + s + t_0], j \leq x_s} U(t, j) > 0. \quad (2.17)$$

对给定的 $s \geq 0$, 令

$$\rho(s + t_0) = \rho(u(s + t_0, \cdot; t_0, u^0), U(s + t_0, \cdot)).$$

由 (2.13) 有

$$\rho(t_0) \geq \rho(s + t_0) \geq \epsilon_0 \quad (2.18)$$

和

$$\frac{1}{e^{\rho(s+t_0)}} U(s + t_0, \cdot) \leq u(s + t_0, \cdot; t_0, u^0) \leq e^{\rho(s+t_0)} U(s + t_0, \cdot). \quad (2.19)$$

由 (2.19) 和引理 2.1 可得

$$u(t + s + t_0, \cdot; t_0, u^0) \leq u(t + s + t_0, \cdot; s + t_0, e^{\rho(s+t_0)} U(s + t_0, \cdot)), \quad t \geq 0.$$

令

$$\begin{aligned} \hat{u}_j(t) &= u_j(t + s + t_0; s + t_0, e^{\rho(s+t_0)} U(s + t_0, \cdot)), \\ \tilde{u}_j(t) &= e^{\rho(s+t_0)} u_j(t + s + t_0; s + t_0, U(s + t_0, \cdot)) (= e^{\rho(s+t_0)} U(t + s + t_0, j)), \\ \bar{u}_j(t) &= \tilde{u}_j(t) - \hat{u}_j(t), \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{u}_j(t) &= (\mathcal{A}\bar{u}(t))_j + \tilde{u}_j(t) f(t + s + t_0, j, U(t + s + t_0, j)) - \hat{u}_j(t) f(t + s + t_0, j, \hat{u}_j(t)) \\ &= (\mathcal{A}\bar{u}(t))_j + p(t, j) \bar{u}_j(t) + b(t, j), \end{aligned} \quad (2.20)$$

其中

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\bar{u}(t))_j &= d(t, j-1)(\bar{u}_{j-1}(t) - \bar{u}_j(t)) + d(t, j+1)(\bar{u}_{j+1}(t) - \bar{u}_j(t)), \\ p(t, j) &= f(t + s + t_0, j, \hat{u}_j(t)) + \tilde{u}_j(t) \int_0^1 f_u(t + s + t_0, j, r\tilde{u}_j(t) + (1-r)\hat{u}_j(t)) dr, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(t, j) &= \tilde{u}_j(t)[f(t+s+t_0, j, U(t+s+t_0, j)) - f(t+s+t_0, j, \tilde{u}_j(t))] \\ &= \tilde{u}_j(t)[f(t+s+t_0, j, U(t+s+t_0, j)) - f(t+s+t_0, j, e^{\rho(s+t_0)}U(t+s+t_0, j))]. \end{aligned}$$

由 (H0) 和 (2.17) 知, 存在 $b_0 > 0$ 使得对任意的 $s \geq 0$, 有

$$\inf_{t \in [s+t_0, \tau+s+t_0], j \leq x_s} b(t, x) \geq b_0 > 0. \quad (2.21)$$

注意到

$$\bar{u}_{j-1}(t) \geq 0, \quad \bar{u}_{j+1}(t) \geq 0.$$

因此, 对 $j \leq x_s$, 有

$$\partial_t \bar{u}_j(t) \geq (-d(t, j-1) - d(t, j+1) + p(t, j))\bar{u}_j(t) + b_0.$$

这表明

$$\bar{u}_j(\tau) \geq \int_{s+t_0}^{\tau+s+t_0} e^{(-2d_{\sup}+p_{\inf})(\tau+s+t_0-r)} b_0 dr, \quad \forall j \leq x_s.$$

这与 (2.21) 一起可推出, 存在 $\delta_0 > 0$ 使得对任意的 $s \geq 0$, 有

$$\bar{u}_j(\tau) \geq \delta_0, \quad \forall j \leq x_s,$$

进而,

$$u_j(\tau+s+t_0; t_0, u_0) \leq e^{\rho(s+t_0)}U(t+s+t_0, j) - \delta_0, \quad \forall j \leq x_s. \quad (2.22)$$

由 (2.16) 和 (2.22) 知, 存在 $\delta_1 > 0$ 使得

$$u(\tau+s+t_0; t_0, u^0) \leq e^{\rho(s+t_0)-\delta_1}U(\tau+s+t_0, \cdot), \quad \forall s \geq 0.$$

类似地, 我们可以证明存在 $\delta_2 > 0$ 使得

$$\frac{1}{e^{\rho(s+t_0)-\delta_2}}U(\tau+s+t_0, \cdot) \leq u(\tau+s+t_0; t_0, u^0), \quad \forall s \geq 0.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 可知断言 (2.14) 成立.

现在证明由 (2.14) 可得出一个矛盾. 事实上, 假设 (2.14) 成立, 则有

$$\rho(u(n\tau+t_0; t_0, u^0), U(n\tau+t_0, \cdot)) \leq \rho(u(t_0; t_0, u^0), U(t_0, \cdot)) - n\delta, \quad \forall n \geq 0.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 可得 $\rho(u(n\tau+t_0; t_0, u^0), U(n\tau+t_0, \cdot)) \rightarrow -\infty$, 这是一个矛盾. 因此, (2.13) 不成立. 进而对任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$\rho(u(t+t_0; t_0, u^0), U(t+t_0, \cdot)) < \epsilon$$

对某个 $t > 0$ 成立. 这和引理 2.3 表明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(u(t+t_0, \cdot; t_0, u^0), U(t+t_0, \cdot)) = 0.$$

(1) 由此得证.

(2) 假设 $u_j(t) = V(t, j)$ 也是一个广义行波并且满足

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{V(t, j+X(t))}{U(t, j+X(t))} = 1$$

关于 t 一致地成立. 为了证明 $V(t, j) \equiv U(t, j)$, 只需要证明对任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$\rho(U(t, \cdot), V(t, \cdot)) < \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

假设存在 $\epsilon_0 > 0$ 和 $t_0 \in \mathbb{R}$ 使得

$$\rho(U(t_0, \cdot), V(t_0, \cdot)) \geq \epsilon_0, \quad (2.23)$$

则由引理 2.3 可得

$$\rho(U(t, \cdot), v(t, \cdot)) \geq \epsilon_0, \quad \forall t \leq t_0. \quad (2.24)$$

令 $\tau = 1$, $t_n = t_0 - n$. 注意到, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $J \in \mathbb{Z}^+$ 使得

$$(1 - \epsilon)U(t, j + X(t)) < V(t, j + X(t)) < (1 + \epsilon)U(t, j + X(t)), \quad \forall j \geq J, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.25)$$

和

$$\begin{cases} U(t, j + X(t)) \geq u^+(t, j + X(t)) - \epsilon, & \forall j \leq -J, \quad t \in \mathbb{R}, \\ U(t, j + X(t)) \leq \epsilon, & \forall j \geq J, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.26)$$

则 $X(t)$ 也是 $V(t, j)$ 的一个波位置函数. 由类似文献 [43, (4.7)] 中的论证, 我们可以证明

$$\inf_{t \in \mathbb{R}, j \leq J} U(t, j + X(t)) > 0, \quad \inf_{t \in \mathbb{R}, j \leq J} V(t, j + X(t)) > 0. \quad (2.27)$$

这表明存在 $\rho_0 > 0$ 使得

$$\rho(U(t, \cdot), V(t, \cdot)) \leq \rho_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.28)$$

由 (2.14) 和 (2.24)–(2.27) 中的论证可知, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$\rho(U(t_n + \tau, \cdot), V(t_n + \tau, \cdot)) \leq \rho(U(t_n, \cdot)) - \delta.$$

这表明

$$\rho(U(t_0, \cdot), V(t_0, \cdot)) \leq \rho(U(t_n, \cdot), V(t_n, \cdot)) - n\delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.29)$$

由 (2.28) 和 (2.29) 可得

$$\rho(U(t_0, \cdot), V(t_0, \cdot)) < 0,$$

这是一个矛盾. 因此假设 (2.23) 不成立, 进而 $\rho(U(t, \cdot), V(t, \cdot)) < \epsilon$ 对所有的 $\epsilon > 0$ 和所有的 $t \in \mathbb{R}$ 成立. 因此, $U(t, j) \equiv V(t, j)$. (2) 得以证明. $\square$

3 周期行波解的存在性、稳定性和唯一性

本节假设 $d(t + T, j) = d(t, j + J) = d(t, j)$ 和 $f(t + T, j, u) = f(t, j + J, u) = f(t, j, u)$, 并研究 (1.1) 的周期行波解的存在性、稳定性和唯一性.

为了陈述本节的主要结果, 首先给出两个命题. 对任意的 $\mu \in \mathbb{R}$, 考虑下述线性方程:

$$\dot{v}_j(t) = d(t, j - 1)(e^\mu v_{j-1}(t) - v_j(t)) + d(t, j + 1)(e^{-\mu} v_{j+1}(t) - v_j(t)) + f(t, j, 0)v_j(t). \quad (3.1)$$

注意到, 当 $\mu = 0$ 时, (3.1) 是 (1.1) 在 $u \equiv 0$ 的线性化方程.

命题 3.1 (1) 对任意的 $\mu \in \mathbb{R}$, 存在 $\lambda(\mu) \in \mathbb{R}$ 和满足 $\psi^\mu(t+T, j) = \psi^\mu(t, j+J) = \psi^\mu(t, j) > 0$, $\|\psi^\mu(0, \cdot)\|_{l^\infty} = 1$ 的 $\psi^\mu(t, j)$, 使得 $v_j(t) = e^{\lambda(\mu)t} \psi^\mu(t, j)$ 是 (3.1) 的一个解.

(2) 存在 $\mu^* > 0$ 使得

$$\frac{\lambda(\mu^*)}{\mu^*} = \inf_{\mu > 0} \frac{\lambda(\mu)}{\mu}, \quad \frac{\lambda(\mu)}{\mu} > \frac{\lambda(\mu^*)}{\mu^*}, \quad 0 < \mu < \mu^*.$$

证明 (1) 令

$$l_{\text{per}}^\infty = \{u \in l^\infty \mid u_{j+J} = u_j, \forall j \in \mathbb{Z}\}.$$

对给定的 $u, v \in l_{\text{per}}^\infty$, 定义

$$u \ll (\gg) v, \quad \text{如果 } u_j < (>) v_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

令 $\Phi(t, s)$ 是 (3.1) 的解算子, 即

$$\Phi(t, s)v^0 = v(t; s, v^0),$$

其中 $v(t; s, v^0)$ 是 (3.1) 满足 $v(s; s, v^0) = v^0 \in l^\infty$ 的解, 则有

$$\Phi(t, s)l_{\text{per}}^\infty \subset l_{\text{per}}^\infty, \quad \forall t \geq s,$$

并且对任意的 $v^0 \in (l^{\infty,+} \cap l_{\text{per}}^\infty) \setminus \{0\}$, 有

$$\Phi(t, s)v^0 \gg 0, \quad \forall t > s.$$

清楚的是, 对任意有界集 $E \subset l_{\text{per}}^\infty$, $\Phi(T, 0)E$ 是相对紧的. 因此, 由 Krein-Rutman 定理^[45] 可知, 谱半径 $r(\Phi(T, 0) \mid l_{\text{per}}^\infty)$ 是 $\Phi(T, 0) \mid l_{\text{per}}^\infty$ 的一个孤立代数简单特征值, 并且具有特征函数 $\psi^* \in l_{\text{per}}^\infty$ 满足 $\|\psi^*\|_{l^\infty} = 1$. 取

$$\lambda(\mu) = \frac{\ln r(\Phi(T, 0) \mid l_{\text{per}}^\infty)}{T}$$

和

$$\psi^\mu(t, \cdot) = e^{-\lambda(\mu)t} \Phi(t, 0)\psi^*.$$

可证得 (1).

(2) 注意到

$$\lambda(\mu) \geq d_{\min}(e^\mu - 1) + d_{\max}(e^{-\mu} - 1) + f_{\min},$$

其中 $d_{\min} = \inf_{j \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}} d(t, j)$, $d_{\max} = \sup_{j \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}} d(t, j)$, $f_{\min} = \inf_{j \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}} f(t, j, 0)$, 则有

$$\frac{\lambda(\mu)}{\mu} \geq \frac{d_{\min}(e^\mu - 1) + d_{\max}(e^{-\mu} - 1) + f_{\min}}{\mu} \rightarrow \infty, \quad \text{当 } \mu \rightarrow \infty \text{ 时}.$$

由 (1.2), 有

$$\frac{\lambda(\mu)}{\mu} \rightarrow \infty, \quad \text{当 } \mu \rightarrow 0^+ \text{ 时}.$$

(2) 由此得证. □

令

$$c^* = \frac{\lambda(\mu^*)}{\mu^*}.$$

则对任意的 $c > c^*$, 存在 $\mu \in (0, \mu^*)$ 使得

$$c = \frac{\lambda(\mu)}{\mu}.$$

对给定的 $c > c^*$, 令 $0 < \mu < \mu' < \min\{2\mu, \mu^*\}$ 使得 $c = \frac{\lambda(\mu)}{\mu}$ 且 $\frac{\lambda(\mu)}{\mu} > \frac{\lambda(\mu')}{\mu'} > c^*$.

考虑 (1.1) 的空间平移方程

$$\dot{u}_j(t) = H(i)u_j(t) + u_j(t)f(t, j+i, u_j(t)), \quad (3.2)$$

其中, 对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, 有

$$H(i)u_j(t) = d(t, j+i+1)(u_{j+1}(t) - u_j(t)) + d(t, j+i-1)(u_{j-1}(t) - u_j(t)), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

令 $u(t, j; u_0, i)$ 是 (3.2) 满足 $u(0, j; u_0, i) = u_0(j)$ ($u_0 \in l^\infty$) 的解.

对给定的 $d, d_1 > 0$, 令

$$\underline{v}(t, j; i, d, d_1) = de^{-\mu(j-ct)}\psi^\mu(t, j+i) - d_1e^{-\mu'(j-ct)}\psi^{\mu'}(t, j+i).$$

观察到对给定的 $0 < b \ll 1$, 存在 $M > N > 0$ 使得

$$b\psi^0(t, j+i) \leq \underline{v}(t, j; i, d, d_1), \quad \forall N \leq j-ct \leq M. \quad (3.3)$$

令 $b > 0$ 和 $M > 0$ 使得 (3.3) 成立, 令

$$\underline{u}(t, j; i, d, d_1, b) = \begin{cases} \max\{b\psi^0(t, j+i), \underline{v}(t, j; i, d, d_1)\}, & j \leq M+ct, \\ \underline{v}(t, j; i, d, d_1), & j \geq M+ct. \end{cases} \quad (3.4)$$

命题 3.2 令 $0 < d \leq 2$.

(1) 对任意的 $i \in \mathbb{Z}$ 和 $\frac{d_1}{d} \gg 1$, 有 $\underline{v}(t, j; i, d, d_1)$ 是 (3.2) 的一个下解;

(2) 对任意的 $i \in \mathbb{Z}$ 和 $0 < b \ll 1$, 有 $u(t, j; i) := b\psi^0(t, j+i)$ 是 (3.2) 的一个下解;

(3) 对 $\frac{d_1}{d} \gg 1$ 和 $0 < b \ll 1$, 有 $u(t, j; \underline{u}(0, \cdot; i, d, d_1, b), i) \geq \underline{u}(t, j; i, d, d_1, b)$, $t \geq 0$.

证明 (1) 首先, 令 $\varphi = de^{-\mu(j-ct)}\psi^\mu(t, j+i)$ 和 $\varphi_1 = d_1e^{-\mu'(j-ct)}\psi^{\mu'}(t, j+i)$. 令

$$\bar{M} = d \max_{t \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}} \psi^\mu(t, j).$$

令 $L > 0$ 使得 $-f_u(j+i, u) \leq L$, $0 \leq u \leq \bar{M}$. 定义 d_0 为

$$d_0 = \max \left\{ \frac{\max_{t \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}} \psi^\mu(t, j)}{\min_{t \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}} \psi^{\mu'}(t, j)}, \frac{L \max_{t \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}} [\psi^\mu(t, j)]^2}{(\mu'c - \lambda(\mu')) \min_{t \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}} \psi^{\mu'}(t, j)} \right\}.$$

固定 $i \in \mathbb{Z}$. 我们证明当 $\frac{d_1}{d} \geq d_0$ 时, $\underline{v}(t, j; i, d, d_1)$ 是 (3.2) 的一个下解. 首先, 当 $(t, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ 且 $\underline{v}(t, j; i, d, d_1) \leq 0$ 时, 由 (H0), 有 $f(t, j+i, \underline{v}(t, j; i, d, d_1)) = f(t, j+i, 0)$. 因此,

$$\underline{v}_t - [H(i)\underline{v}(t, j; i, d, d_1) + \underline{v}(t, j; i, d, d_1)f(t, j+i, \underline{v}(t, j; i, d, d_1))] = -(\mu'c - \lambda(\mu'))\varphi_1 \leq 0.$$

其次, 当 $(t, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ 且 $\underline{v}(t, j; i, d, d_1) > 0$ 时, 由 $\frac{d_1}{d} \geq d_0$, 有 $j-ct \geq 0$, 则

$$\underline{v}(t, j; i, d, d_1) \leq de^{-\mu(j-ct)}\psi^\mu(t, j+i) \leq d\psi^\mu(t, j+i) \leq \bar{M}.$$

注意到, 对 $0 < y < \bar{M}$, 有

$$\begin{aligned} -(\mu'c - \lambda(\mu')) - f_u(t, j + i, y) \frac{(\varphi)^2}{\varphi_1} &\leq -(\mu'c - \lambda(\mu')) + L \frac{(\varphi)^2}{\varphi_1} \\ &= -(\mu'c - \lambda(\mu')) + \frac{Ld[\psi^\mu(t, j + i)]^2}{d_1 \psi^{\mu'}(t, j + i)} e^{(\mu' - 2\mu)(j - ct)} \\ &\leq -(\mu'c - \lambda(\mu')) + \frac{Ld \max_{t \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}} [\psi^\mu(t, j)]^2}{d_1 \min_{t \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}} \psi^{\mu'}(t, j)} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

因此, 当 $(t, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ 且 $\underline{v}(t, j; i, d, d_1) > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} v_t - [H(i)\underline{v}(t, j; i, d, d_1) + \underline{v}(t, j; i, d, d_1)f(t, j + i, \underline{v}(t, j; i, d, d_1))] \\ = (\mu c - \lambda(\mu))\varphi - (\mu'c - \lambda(\mu'))\varphi_1 + \underline{v}(t, j; i, d, d_1)f(t, j + i, 0) - \underline{v}(t, j; i, d, d_1)f(t, j + i, \underline{v}) \\ = -(\mu'c - \lambda(\mu'))\varphi_1 - f_u(t, j + i, y)(\varphi - \varphi_1)^2 \quad (\text{对某个 } y \in (0, \bar{M})) \\ \leq -(\mu'c - \lambda(\mu'))\varphi_1 - f_u(t, j + i, y)(\varphi)^2 \\ = \left[-(\mu'c - \lambda(\mu')) - f_u(t, j + i, y) \frac{(\varphi)^2}{\varphi_1} \right] \varphi_1 \\ \leq 0. \end{aligned}$$

(1) 由此得证.

(2) 固定 $i \in \mathbb{Z}$. 观察到

$$H(i)\psi^0(t, j + i) + f(t, j + i, 0)\psi^0(t, j + i) - \psi_t^0(t, j + i) = \lambda(0)\psi^0(t, j + i), \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

又观察到 $\max_{t \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}} \lambda(0)\psi^0(t, j + i) > 0$, 则有

$$\lambda(0)b\psi^0(t, j + i) \geq (f(t, j + i, 0) - f(t, j + i, b\psi^0(t, j + i)))b\psi^0(t, j + i), \quad \forall 0 < b \ll 1.$$

因此,

$$H(i)b\psi^0(t, j + i) + f(t, j + i, b\psi^0(t, j + i))b\psi^0(t, j + i) - b\psi_t^0(t, j + i) \geq 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad 0 < b \ll 1.$$

进而, 当 $0 < b \ll 1$ 时, $u(t, j; i) := b\psi^0(t, j + i)$ 是 (3.2) 的一个下解.

(3) 令 $\tilde{w}(t, j; i) = e^{Ct}(u(t, j; \underline{u}(0, \cdot; i, d, d_1, b), i) - \underline{v}(t, j; i, d, d_1))$, 其中 C 是某个正的常数, 我们将在后面确定它的值. 我们知道, $u(t, j; \underline{u}(0, \cdot; i, d, d_1, b), i)$ 是 (3.2) 的满足 $u(0, j; \underline{u}(0, \cdot; i, d, d_1, b), i) = \underline{u}(0, j; i, d, d_1, b)$ 的解. 因此,

$$\tilde{w}_t(t, j; i) \geq H(i)\tilde{w}(t, j; i) + (C + \tilde{a}(t, j; i))\tilde{w}(t, j; i),$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{a}(t, j; i) &= f(t, j + i, u(t, j; \underline{u}(0, \cdot; i, d, d_1, b), i)) \\ &\quad + \underline{v}(t, j; i, d, d_1) \int_0^1 f_u(t, j + i, \tau(u(t, j; \underline{u}(0, \cdot; i, d, d_1, b), i) - \underline{v}(t, j; i, d, d_1))) d\tau. \end{aligned}$$

进而有

$$\tilde{w}(t, j; i) \geq \tilde{w}(0, j; i) + \int_0^t [H(i)\tilde{w}(s, j; i) + (C + \tilde{a}(s, j; i))\tilde{w}(s, j; i)]ds, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (3.5)$$

类似地, 令 $\bar{w}(t, j; i) = e^{Ct}(u(t, j; \underline{u}(0, \cdot; i, d, d_1, b), i) - b\psi^0(t, j + i))$, 则有

$$\bar{w}(t, j; i) \geq \bar{w}(0, j; i) + \int_0^t [H(i)\bar{w}(s, j; i) + (C + \bar{a}(s, j; i))\bar{w}(s, j; i)]ds, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (3.6)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{a}(t, j; i) &= f(t, j + i, u(t, j; \underline{u}(0, \cdot; i, d, d_1, b), i)) \\ &\quad + b\psi^0(t, j + i) \int_0^1 f_u(t, j + i, \tau(u(t, j; \underline{u}(0, \cdot; i, d, d_1, b), i) - b\psi^0(t, j + i)))d\tau. \end{aligned}$$

令 $w(t, j; i) = e^{Ct}(u(t, j; \underline{u}(0, \cdot; i, d, d_1, b), i) - \underline{u}(t, j; i, d, d_1, b))$. 选取 $C > 0$ 使得 $C + \tilde{a}(s, j; i) > 0$ 且 $C + \bar{a}(s, j; i) > 0$. 注意到

$$w(t, j; i) = \begin{cases} \min\{\tilde{w}(t, j; i), \bar{w}(t, j; i)\}, & j \leq M + ct, \\ \tilde{w}(t, j; i), & j \geq M + ct. \end{cases}$$

由 (3.4)–(3.6), 可得

$$\tilde{w}(t, j; i) \geq w(0, j; i) + \int_0^t [H(i)w(s, j; i) + (C + \tilde{a}(s, j; i))w(s, j; i)]ds$$

对 $j \in \mathbb{Z}$ 成立, 以及

$$\bar{w}(t, j; i) \geq w(0, j; i) + \int_0^t [H(i)w(s, j; i) + (C + \bar{a}(s, j; i))w(s, j; i)]ds$$

对 $j \leq M + ct$ 成立. 因此,

$$w(t, j; i) \geq w(0, j; i) + \int_0^t [H(i)w(s, j; i) + (C + \tilde{a}(s, j; i))w(s, j; i)]ds, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

由引理 2.1 中的论证可知, $w(t, j; i) \geq 0$, $t \geq 0$, $j, i \in \mathbb{Z}$. 因此有

$$u(t, j; \underline{u}(0, \cdot; i, d, d_1, b), i) \geq \underline{u}(t, j; i, d, d_1, b), \quad t \geq 0, \quad j, i \in \mathbb{Z}.$$

证毕. □

令

$$\begin{aligned} \bar{v}(t, j; i, d, d_1) &= de^{-\mu(j-ct)}\psi^\mu(t, j + i) + d_1e^{-\mu'(j-ct)}\psi^{\mu'}(t, j + i), \\ \bar{u}(t, j; i, d, d_1) &= \min\{\bar{v}(t, j; i, d, d_1), u_{j+i}^+(t)\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

命题 3.3 (1) 对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, $d > 0$ 和 $d_1 \geq 0$, 有 $\bar{v}(t, j; i, d, d_1)$ 是 (3.2) 的一个上解;

(2) $u(t, j; \bar{u}(0, \cdot; i, d, d_1), i) \leq \bar{u}(t, j; i, d, d_1)$, $t \geq 0$.

证明 (1) 令 $\varphi = de^{-\mu(j-ct)}\psi^\mu(t, j + i)$ 和 $\varphi_1 = d_1e^{-\mu'(j-ct)}\psi^{\mu'}(t, j + i)$. 由直接计算, 有

$$\bar{v}_t - [H(i)\bar{v}(t, j; i, d, d_1) + \bar{v}(t, j; i, d, d_1)f(t, j + i, \bar{v}(t, j; i, d, d_1))]$$

$$\begin{aligned}
&\geq \bar{v}_t - [H(i)\bar{v}(t, j; i, d, d_1) + \bar{v}(t, j; i, d, d_1)f(t, j + i, 0)] \\
&= (\mu c - \lambda(\mu))\varphi + (\mu' c - \lambda(\mu'))\varphi_1 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

(2) 由比较原理, 有

$$u(t, j; \bar{u}(0, \cdot; i, d, d_1), i) \leq \bar{v}(t, j; i, d, d_1), \quad u(t, j; \bar{u}(0, \cdot; i, d, d_1), i) \leq u^+(t)$$

对 $t \geq 0$ 成立. (2) 由此得证. $\square$

令

$$\phi(t, j) = e^{-\mu(j-ct)}\psi^\mu(t, j), \quad \phi_1(t, j) = e^{-\mu'(j-ct)}\psi^{\mu'}(t, j).$$

命题 3.4 令 $0 < d \leq 2$. 对任意 $u^0 \in l^{\infty,+}$, 如果

$$u^0 \leq d\phi(t_0, \cdot) + d_1\phi_1(t_0, \cdot) \quad (\text{分别地, } u^0 \geq d\phi(t_0, \cdot) - d_1\phi_1(t_0, \cdot)),$$

则对 $\frac{d_1}{d} \gg 1$, 有

$$u(t; t_0, u^0) \leq d\phi(t, \cdot) + d_1\phi_1(t, \cdot) \quad (\text{分别地, } u(t; t_0, u^0) \geq d\phi(t, \cdot) - d_1\phi_1(t, \cdot))$$

对 $t \geq t_0$ 成立.

证明 由命题 3.2、3.3 和 $f_u(t, j, u) < 0$ ($u \geq 0$) 可得命题成立. $\square$

现在陈述本节的主要结果.

定理 3.1 考虑 (1.1), 假设 $d(t + T, j) = d(t, j + J) = d(t, j)$ 和 $f(t + T, j, u) = f(t, j + J, u) = f(t, j, u)$,

(1) (存在性) 对任意的 $c > c^*$, 存在一个具有速度 c 的周期行波解 $u_j(t) = U(t, j)$ 使得对某个 $d_1^* > 0$, 有

$$\phi(t, j) - d_1^*\phi_1(t, j) \leq U(t, j) \leq \phi(t, j) + d_1^*\phi_1(t, j). \quad (3.8)$$

(2) (稳定性) 对任意 $c > c^*$ 和满足

$$\inf_{j \leq j_0} u_j^0 > 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{u_j^0}{U(t_0, j)} = 1$$

的任意 $t_0 \in \mathbb{R}$ 和 $u^0 \in l^{\infty,+}$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u_j(t + t_0; t_0, u^0)}{U(t + t_0, j)} = 1$$

关于 $j \in \mathbb{Z}$ 一致地成立.

(3) (唯一性) 如果 $u_j(t) = V(j, t)$ 也是 (1.1) 的一个具有速度 c 的周期行波解, 并且满足

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{V(t, j + [ct])}{U(t, j + [ct])} = 1$$

关于 $t \in \mathbb{R}$ 一致地成立, 则有 $V(t, j) \equiv U(t, j)$.

为了证明周期行波解的存在性, 考虑下述 (3.2) 的空间连续版本:

$$\partial_t u(t, x) = H(z)u(t, x) + u(t, x)f(t, x + z, u(t, x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

其中

$$H(z)u(t, x) = d(t, x + z + 1)(u(t, x + 1) - u(t, x)) + d(t, x + z - 1)(u(t, x - 1) - u(t, x)),$$

且 $d(t, x) = d(t, j)$, $f(t, x, u) = f(t, j, u)$, $j \leq x < j + 1$. 令 $u(t, x; u_0, z)$ 是 (3.9) 的满足 $u(0, x; u_0, z) = u_0(x)$ 的解, 其中 $u_0 \in l^\infty(\mathbb{R}) = \{u = \{u(x)\}_{x \in \mathbb{R}} : \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)| < \infty\}$.

对满足 $j \leq x < j + 1$ ($j \in \mathbb{Z}$) 的 $x \in \mathbb{R}$ 和 $t \in \mathbb{R}$, 令 $u_x^+(t) = u_j^+(t)$, $\psi^\mu(t, x) = \psi^\mu(t, j)$ 和 $\psi^{\mu'}(t, x) = \psi^{\mu'}(t, j)$. 令

$$\begin{aligned} \underline{v}(t, x; z, d, d_1) &= de^{-\mu(x-ct)}\psi^\mu(t, x+z) - d_1e^{-\mu'(x-ct)}\psi^{\mu'}(t, x+z), \quad t, x, z \in \mathbb{R}, \\ \underline{u}(t, x; z, d, d_1, b) &= \begin{cases} \max\{b\psi^0(t, x+z), \underline{v}(t, x; z, d, d_1)\}, & x \leq M+ct, \\ \underline{v}(t, x; z, d, d_1), & x \geq M+ct \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

和

$$\begin{aligned} \bar{v}(t, x; z, d, d_1) &= de^{-\mu(x-ct)}\psi^\mu(t, x+z) + d_1e^{-\mu'(x-ct)}\psi^{\mu'}(t, x+z), \\ \bar{u}(t, x; z, d, d_1) &= \min\{\bar{v}(t, x; z, d, d_1), u_{x+z}^+(t)\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

由类似命题 3.2 和 3.3 中的论证可得, 对 $0 < d \leq 2$, $\frac{d_1}{d} \gg 1$ 和 $0 < b \ll 1$, 有

$$u(t, x; \underline{u}(0, \cdot; z, d, d_1, b), z) \geq \underline{u}(t, x; z, d, d_1, b), \quad u(t, x; \bar{u}(0, \cdot; z, d, d_1), z) \leq \bar{u}(t, x; z, d, d_1), \quad t \geq 0.$$

对固定的 $0 < d \leq 2$, $d_1 > 0$ ($\frac{d_1}{d} \gg 1$) 和 $0 < b \ll 1$, 令

$$\underline{u}(t, x; z) = \underline{u}(t, x; z, d, d_1, b), \quad \bar{u}(t, x; z) = \bar{u}(t, x; z, d, d_1).$$

命题 3.5 存在一个常数 C 使得对任意的 $0 < b \ll 1$ 和 $\frac{d_1}{d} \gg 1$, 有

$$\inf_{x \leq C, t \geq 0, z \in \mathbb{R}} u(t, x+ct; \bar{u}(0, \cdot; z), z) \geq \inf_{x \leq C, t \geq 0, z \in \mathbb{R}} u(t, x+ct; \underline{u}(0, \cdot; z), z) > 0. \quad (3.12)$$

证明 由 (3.4)、命题 3.2 和 3.3 可知, 对任意的 $t \geq 0$, 有

$$\underline{u}(t, x; z) \leq u(t, x; \underline{u}(0, \cdot; z), z) \leq u(t, x; \bar{u}(0, \cdot; z), z) \leq \bar{u}(t, x; z). \quad (3.13)$$

注意到

$$\begin{aligned} \underline{u}(t, x+ct; z) &= \max\{b\psi^0(t, x+ct+z), \underline{v}(t, x+ct; z, d, d_1)\} \quad (x \leq M) \\ &\geq b\psi^0(t, x+ct+z) \quad (x \leq M) \\ &\geq \inf_{t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}} b\psi^0(t, x) \\ &> 0. \end{aligned}$$

这与 (3.13) 一起可推出 (3.12). 证毕. □

引理 3.1 令

$$u^n(t, x, z) = u(t+nT, x+cnT; \bar{u}(0, \cdot; z-cnT), z-cnT),$$

$$u_n(t, x, z) = u(t + nT, x + cnT; \underline{u}(0, \cdot; z - cnT), z - cnT),$$

则对任意给定的有界区间 $I \subset \mathbb{R}$, 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N_0$, $t \in I$, $x, z \in \mathbb{R}$ 时, $u^n(t, x, z)$ 关于 n 非增, $u_n(t, x, z)$ 关于 n 非减.

证明 观察到

$$\bar{u}(T, x + cT; z - cnT) = \bar{u}(0, x; z - c(n-1)T), \quad \forall n \geq 0.$$

因此, 对给定的 $t \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$ ($t + (n-1)T > 0$), 有

$$\begin{aligned} u^n(t, x, z) &= u(t + nT, x + cnT; \bar{u}(0, \cdot; z - cnT), z - cnT) \\ &= u(t + (n-1)T, x + cnT; u(T, \cdot; \bar{u}(0, \cdot; z - cnT), z - cnT), z - cnT) \\ &= u(t + (n-1)T, x + c(n-1)T; u(T, \cdot + cT; \bar{u}(0, \cdot; z - cnT), z - cnT), z - c(n-1)T) \\ &\leq u(t + (n-1)T, x + c(n-1)T; \bar{u}(T, \cdot + cT; z - cnT), z - c(n-1)T) \\ &= u(t + (n-1)T, x + c(n-1)T; \bar{u}(0, \cdot; z - c(n-1)T), z - c(n-1)T) \\ &= u^{n-1}(t, x, z). \end{aligned}$$

类似地, 我们可以证明对给定的 $t \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$ ($t + (n-1)T > 0$), 有 $u_n(t, x, z) \geq u_{n-1}(t, x, z)$. 证毕. $\square$

令

$$\begin{aligned} u^+(t, x, z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u^n(t, x, z), \\ u^-(t, x, z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t, x, z), \\ \Psi_0^\pm(x, z) &= u^\pm(0, x, z). \end{aligned}$$

引理 3.2 对每一个 $z \in \mathbb{R}$, 有 $u^\pm(t, x, z) = u(t, x; \Psi_0^\pm(\cdot, z), z)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. 进而 $u^\pm(t, x, z)$ 是 (3.9) 的整体解.

证明 我们证明 $u(t, x, z) = u^+(t, x, z)$ 情形. 注意到

$$\begin{aligned} u^n(t, x, z) &= u(t, x + cnT; u(nT, \cdot; \bar{u}(0, \cdot; z - cnT), z - cnT), z - cnT) \\ &= u(t, x; u(nT, \cdot + cnT; \bar{u}(0, \cdot; z - cnT), z - cnT), z) \\ &= u^n(0, x, z) + \int_0^t [H(z)u^n(\tau, x, z) + u^n(\tau, x, z)f(\tau, x + z, u^n(\tau, x, z))]d\tau, \end{aligned}$$

其中

$$H(z)u^n(t, x, z) = d(t, x + z + 1)(u^n(t, x + 1, z) - u^n(t, x, z)) + d(t, x + z - 1)(u^n(t, x - 1, z) - u^n(t, x, z)).$$

因此, 由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$u(t, x, z) = \Psi_0^+(x, z) + \int_0^t [H(z)u(\tau, x, z) + u(\tau, x, z)f(\tau, x + z, u(\tau, x, z))]d\tau.$$

这表明 $u(t, x, z) = u(t, x; \Psi_0^+(\cdot, z), z)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. 进而 $u(t, x, z)$ 是 (3.9) 的一个整体解. 证毕. $\square$

定理 3.1 的证明 (1) 注意到, 由文献 [14, 18] 知, 对任意的 $c \geq c^*$, (1.1) 有一个速度为 c 的周期行波解. 但是性质 (3.8) 却没有建立. 下面提供一个速度为 $c > c^*$ 且满足性质 (3.8) 的周期行波解存在性的证明, 这使得我们可以利用定理 2.1 来证明 (2) 和 (3).

令

$$\Psi^\pm(x, t, z) = u^\pm(t, x + ct, z - ct) (= u(t, x + ct; \Psi_0^\pm(\cdot, z - ct), z - ct)).$$

首先, $u(t, x; \Psi^\pm(\cdot, 0, z), z) = \Psi^\pm(x - ct, t, z + ct)$ 可直接由 $\Psi^\pm(x, t, z)$ 的定义得出. 其次, 我们证明

$$\lim_{x-ct \rightarrow \infty} \frac{\Psi^\pm(x - ct, t, z + ct)}{de^{-\mu(x-ct)}\psi^\mu(t, x + z)} = 1$$

关于 $t \in \mathbb{R}$ 和 $z \in \mathbb{R}$ 一致地成立, 这等价于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Psi^\pm(x, t, z)}{de^{-\mu x}\psi^\mu(t, x + z)} = 1 \quad (3.14)$$

关于 $t \in \mathbb{R}$ 和 $z \in \mathbb{R}$ 一致地成立. 注意到

$$\begin{aligned} \underline{v}(t, x; z, d, d_1) &= de^{-\mu(x-ct)}\psi^\mu(t, x + z) - d_1e^{-\mu'(x-ct)}\psi^{\mu'}(t, x + z) \\ &\leq u(t, x; \Psi^\pm(\cdot, 0, z), z) \\ &= \Psi^\pm(x - ct, t, z + ct) \\ &\leq \bar{v}(t, x; z, d, d_1) \\ &= de^{-\mu(x-ct)}\psi^\mu(t, x + z) + d_1e^{-\mu'(x-ct)}\psi^{\mu'}(t, x + z) \end{aligned} \quad (3.15)$$

对 $t \in \mathbb{R}$ 和 $x, z \in \mathbb{R}$ 成立, 则 (3.14) 可由 (3.15) 得出.

再者, 我们证明 $\Psi^\pm(x, t, z)$ 关于 t 和 z 的周期性. 注意到

$$\Psi^+(x, t, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(t + nT, x + cnT + ct; \bar{u}(0, \cdot; z - cnT - ct), z - cnT - ct),$$

则有

$$\begin{aligned} \Psi^+(x, T, z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u((n+1)T, x + c(n+1)T; \bar{u}(0, \cdot; z - c(n+1)T), z - c(n+1)T) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} u(nT, x + cnT; \bar{u}(0, \cdot; z - cnT), z - cnT) \\ &= \Psi^+(x, 0, z), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \Psi^+(x, t, z + J) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u(t + nT, x + cnT + ct; \bar{u}(0, \cdot; z + J - cnT - ct), z + J - cnT - ct) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} u(t + nT, x + cnT + ct; \bar{u}(0, \cdot; z - cnT - ct), z - cnT - ct) \\ &= \Psi^+(x, t, z). \end{aligned} \quad (3.17)$$

类似地, 有

$$\Psi^-(x, T, z) = \Psi^-(x, 0, z), \quad (3.18)$$

$$\Psi^-(x, t, z + J) = \Psi^-(x, t, z). \quad (3.19)$$

由命题 3.5 可知,

$$\inf_{x \leq C, t \geq 0, z \in \mathbb{R}} \Psi^{\pm}(x, t, z) > 0,$$

则由命题 2.1、引理 2.2 和 $\Psi^{\pm}(x, t, z)$ 关于 t 的周期性, 有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\Psi^{\pm}(x, t, z) - u_{x+z}^{\pm}(t)) = 0 \quad (3.20)$$

关于 $t \in \mathbb{R}$ 和 $z \in \mathbb{R}$ 一致地成立.

令

$$\Phi^{\pm}(x, t, z) = \Psi^{\pm}(x, t, z - x), \quad x, z \in \mathbb{R}.$$

由 (3.14) 和 (3.16)–(3.20) 可知, $\Phi^{\pm}(x, t, z)$ 生成速度为 c 且具有性质 (3.8) 的周期行波解.

(2) 由命题 3.4, (3.8) 和定理 2.1(1) 可得.

(3) 由 (3.8) 和定理 2.1(2) 可得. □

4 时间非均匀介质中广义行波的存在性、稳定性和唯一性

本节假设 $d(t, j) \equiv d(t)$ 和 $f(t, j, u) \equiv f(t, u)$, 并研究 (1.1) 的广义行波的存在性、稳定性和唯一性.

我们首先回忆文献 [38] 中建立的广义行波的一些结果.

定义

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\inf} &= \liminf_{t \geq s, t-s \rightarrow \infty} \frac{1}{t-s} \int_s^t f(\tau, 0) d\tau, & \bar{f}_{\sup} &= \limsup_{t \geq s, t-s \rightarrow \infty} \frac{1}{t-s} \int_s^t f(\tau, 0) d\tau, \\ \bar{f}_{\inf}^+ &= \liminf_{t \geq s \geq 0, t-s \rightarrow \infty} \frac{1}{t-s} \int_s^t f(\tau, 0) d\tau, & \bar{f}_{\sup}^+ &= \limsup_{t \geq s \geq 0, t-s \rightarrow \infty} \frac{1}{t-s} \int_s^t f(\tau, 0) d\tau. \end{aligned}$$

对给定的 $\mu > 0$, 令

$$c(t; \mu) = \frac{e^{-\mu} + e^{\mu} - 2 + f(t, 0)}{\mu}.$$

令

$$\tilde{c}_0^- := \inf_{\mu > 0} \frac{e^{-\mu} + e^{\mu} - 2 + \bar{f}_{\inf}}{\mu}.$$

由文献 [38, 引理 5.1] 可知, 存在唯一的 $\mu^* > 0$ 使得

$$\tilde{c}_0^- = \frac{e^{-\mu^*} + e^{\mu^*} - 2 + \bar{f}_{\inf}}{\mu^*},$$

并且对任意的 $\gamma > \tilde{c}_0^-$, 方程 $\gamma = \frac{e^{-\mu} + e^{\mu} - 2 + \bar{f}_{\inf}}{\mu}$ 关于 μ 有且仅有两个正解.

对任意 $\gamma > \tilde{c}_0^-$, 令 $0 < \mu < \mu^*$ 使得 $\frac{e^{-\mu} + e^{\mu} - 2 + \bar{f}_{\inf}}{\mu} = \gamma$. 令 $c(t) = c(t; \mu)$ 和

$$\phi(t, j) = e^{-\mu(j - \int_0^t c(\tau) d\tau)}.$$

令 $B(t) = -(e^{-\tilde{\mu}} + e^{\tilde{\mu}} - 2) + c(t)\tilde{\mu} - f(t, 0)$. 注意到

$$\bar{B}_{\inf} = -(e^{-\tilde{\mu}} + e^{\tilde{\mu}} - 2) + \gamma\tilde{\mu} - \bar{f}_{\inf} = \tilde{\mu} \left(\gamma - \frac{e^{-\tilde{\mu}} + e^{\tilde{\mu}} - 2 + \bar{f}_{\inf}}{\tilde{\mu}} \right),$$

因此可以选择 $\bar{\mu} \in (\mu, 2\mu)$ 使得 $\bar{B}_{\inf} > 0$. 由文献 [39, 引理 3.2] 知, 存在 $A \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 使得 $\text{essinf}_{t \in \mathbb{R}}(A' + B) > 0$. 令 $\phi_1(t, j) = e^{A(t) - \bar{\mu}(j - \int_0^t c(\tau) d\tau)}$.

命题 4.1 对给定的 $u^0 \in l^{\infty,+}$ 和 $t_0 \in \mathbb{R}$, 如果

$$u^0 \leq d\phi(t_0, \cdot) + d_1\phi_1(t_0, \cdot) \quad (\text{分别地, } u^0 \geq d\phi(t_0, \cdot) - d_1\phi_1(t_0, \cdot))$$

对 $0 < d \leq 2$ 和 $d_1 \gg 1$ 成立, 则

$$(t; t_0, u^0) \leq d\phi(t, \cdot) + d_1\phi_1(t, \cdot) \quad (\text{分别地, } u(t; t_0, u^0) \geq d\phi(t, \cdot) - d_1\phi_1(t, \cdot))$$

对所有的 $t \geq t_0$ 成立.

证明 由文献 [38, 引理 5.2] 中的论证和 $f_u(t, u) < 0$ ($u \geq 0$) 可得命题成立. $\square$

命题 4.2 对任意的 $\gamma > \tilde{c}_0^-$, 令 $0 < \mu < \mu^*$ 和 $c(t) = \frac{e^{-\mu} + e^{\mu-2} + f(t, 0)}{\mu}$ 使得 $\bar{c}_{\inf} = \gamma$, 则存在广义行波解 $u_j(t) = U(t, j)$ 使得 $\phi(t, j) - d_1^*\phi_1(t, j) \leq U(t, j) \leq \phi(t, j) + d_1^*\phi_1(t, j)$ 对某个 $d_1^* > 0$ 成立.

证明 由文献 [38, 定理 1.3] 中的论证可得命题成立. $\square$

定理 4.1 对任意 $\gamma > \tilde{c}_0^-$, 令 $0 < \mu < \mu^*$ 和 $c(t) = \frac{e^{-\mu} + e^{\mu-2} + f(t, 0)}{\mu}$ 满足 $\bar{c}_{\inf} = \gamma$. 令 $u_j(t) = U(t, j)$ 是命题 4.2 中的广义行波解.

(1) (稳定性) 对任意的 $u^0 \in l^{\infty,+}$ 和 $t_0 \in \mathbb{R}$, 如果满足

$$\inf_{j \leq j_0} u_j^0 > 0, \quad \forall j_0 \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{u_j^0}{U(t_0, j)} = 1,$$

则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u_j(t + t_0; t_0, u^0)}{U(t + t_0, j)} = 1$$

关于 $j \in \mathbb{Z}$ 一致地成立.

(2) (唯一性) 如果 $u_j(t) = V(t, j)$ 是 (1.1) 的一个广义行波解, 且满足

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{V(t, j + [\int_0^t c(\tau) d\tau])}{U(t, j + [\int_0^t c(\tau) d\tau])} = 1$$

关于 $t \in \mathbb{R}$ 一致地成立, 则有

$$V(t, j) \equiv U(t, j).$$

证明 (1) 由命题 4.1、4.2 和定理 2.1(1) 可得. (2) 由命题 4.1、4.2 和定理 2.1(2) 可得. $\square$

参考文献

- 1 Shigesada N, Kawasaki K. Biological Invasions: Theory and Practice. Oxford Series in Ecology and Evolution. Oxford: Oxford University Press, 1997
- 2 Shorrocks B, Swingland I R. Living in a Patch Environment. New York: Oxford University Press, 1990
- 3 Fisher R. The wave of advance of advantageous genes. Ann Eugenics, 1937, 7: 335–369
- 4 Kolmogorov A, Petrovsky I, Piskunov N. Study of the diffusion equation with growth of the quantity of matter and its application to a biology problem. Bjul Moskov Gos Univ, 1937, 1: 1–26
- 5 Aronson D G, Weinberger H F. Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation. In: Partial Differential Equations and Related Topics. Lecture Notes in Mathematics, vol. 446. Berlin: Springer, 1975, 5–49

- 6 Aronson D G, Weinberger H F. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics. *Adv Math*, 1978, 30: 33–76
- 7 Kametaka Y. On the nonlinear diffusion equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov type. *Osaka J Math*, 1976, 13: 11–66
- 8 Liang X, Zhao X Q. Asymptotic speeds of spread and traveling waves for monotone semiflows with applications. *Comm Pure Appl Math*, 2007, 60: 1–40
- 9 Sattinger D H. On the stability of waves of nonlinear parabolic systems. *Adv Math*, 1976, 22: 312–355
- 10 Uchiyama K. The behavior of solutions of some nonlinear diffusion equations for large time. *J Math Kyoto Univ*, 1978, 18: 453–508
- 11 Berestycki H, Hamel F, Nadinashvili N. The speed of propagation for KPP type problems: I—Periodic framework. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2005, 7: 172–213
- 12 Berestycki H, Hamel F, Roques L. Analysis of periodically fragmented environment model: II—Biological invasions and pulsating traveling fronts. *J Math Pures Appl* (9), 2005, 84: 1101–1146
- 13 Freidlin M, Gärtner J. On the propagation of concentration waves in periodic and random media. *Soviet Math Dokl*, 1979, 20: 1282–1286
- 14 Liang X, Zhao X Q. Spreading speeds and traveling waves for abstract monostable evolution systems. *J Funct Anal*, 2010, 259: 857–903
- 15 Nadin G. Traveling fronts in space-time periodic media. *J Math Pures Appl* (9), 2009, 92: 232–262
- 16 Nolen J, Rudd M, Xin J. Existence of KPP fronts in spatially-temporally periodic advection and variational principle for propagation speeds. *Dyn Partial Differ Equ*, 2005, 2: 1–24
- 17 Nolen J, Xin J. Existence of KPP type fronts in space-time periodic shear flows and a study of minimal speeds based on variational principle. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2005, 13: 1217–1234
- 18 Weinberger H F. On spreading speeds and traveling waves for growth and migration models in a periodic habitat. *J Math Biol*, 2002, 45: 511–548
- 19 Berestycki H, Hamel F, Nadinashvili N. The speed of propagation for KPP type problems: II—General domains. *J Amer Math Soc*, 2010, 23: 1–34
- 20 Berestycki H, Nadin G. Spreading speeds for one-dimensional monostable reaction-diffusion equations. *J Math Phys*, 2012, 53, 115619
- 21 Huang J H, Shen W. Speeds of spread and propagation for KPP models in time almost and space periodic media. *SIAM J Appl Dyn Syst*, 2009, 8: 790–821
- 22 Kong L, Shen W. Liouville type property and spreading speeds of KPP equations in periodic media with localized spatial inhomogeneity. *J Dynam Differential Equations*, 2014, 26: 181–215
- 23 Nolen J, Roquejoffre J M, Ryzhik L, et al. Existence and non-existence of Fisher-KPP transition fronts. *Arch Ration Mech Anal*, 2012, 203: 217–246
- 24 Shen W. Variational principle for spreading speeds and generalized propagating speeds in time almost periodic and space periodic KPP models. *Trans Amer Math Soc*, 2010, 362: 5125–5168
- 25 Shen W. Traveling waves in diffusive random media. *J Dynam Differential Equations*, 2004, 16: 1011–1060
- 26 Chen X, Guo J S. Existence and asymptotic stability of traveling waves of discrete quasilinear monostable equations. *J Differential Equations*, 2002, 184: 549–569
- 27 Chen X, Guo J S. Uniqueness and existence of traveling waves for discrete quasilinear monostable dynamics. *Math Ann*, 2003, 326: 123–146
- 28 Hudson W, Zinner B. Existence of traveling waves for a generalized discrete Fisher’s equation. *Comm Appl Nonlinear Anal*, 1994, 1: 23–46
- 29 Wu J, Zou X. Asymptotic and periodic boundary values problems of mixed PDEs and wave solutions of lattice differential equations. *J Differential Equations*, 1997, 135: 315–357
- 30 Zinner B, Harris G, Hudson W. Traveling wavefronts for the discrete Fisher’s equation. *J Differential Equations*, 1993, 105: 46–62
- 31 Ma S, Zhao X Q. Global asymptotic stability of minimal fronts in monostable lattice equations. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2008, 21: 259–275
- 32 Guo J S, Hamel F. Front propagation for discrete periodic monostable equations. *Math Ann*, 2006, 335: 489–525
- 33 Guo J S, Wu C C. Uniqueness and stability of traveling waves for periodic monostable lattice dynamical system. *J Differential Equations*, 2009, 246: 3818–3833
- 34 Weinberger H F. Long-time behavior of a class of biological models. *SIAM J Math Anal*, 1982, 13: 353–396
- 35 Shen W. Existence, uniqueness, and stability of generalized traveling waves in time dependent monostable equations.

- J Dynam Differential Equations, 2011, 23: 1–44
- 36 Berestycki H, Hamel F. Generalized travelling waves for reaction-diffusion equations. In: Perspectives in Nonlinear Partial Differential Equations. Providence: Amer Math Soc, 2007, 101–123
 - 37 Berestycki H, Hamel F. Generalized transition waves and their properties. Comm Pure Appl Math, 2012, 65: 592–648
 - 38 Cao F, Shen W. Spreading speeds and transition fronts of lattice KPP equations in time heterogeneous media. Discrete Contin Dyn Syst, 2017, 37: 4697–4727
 - 39 Nadin G, Rossi L. Propagation phenomena for time heterogeneous KPP reaction-diffusion equations. J Math Pures Appl (9), 2012, 98: 633–653
 - 40 Nadin G, Rossi L. Transition waves for Fisher-KPP equations with general time-heterogeneous and space-periodic coefficients. Anal PDE, 2015, 8: 1351–1377
 - 41 Nadin G, Rossi L. Generalized transition fronts for one-dimensional almost periodic Fisher-KPP equations. Arch Ration Mech Anal, 2017, 223: 1239–1267
 - 42 Zlatoš A. Transition fronts in inhomogeneous Fisher-KPP reaction-diffusion equations. J Math Pures Appl (9), 2012, 98: 89–102
 - 43 Shen W. Stability of transition waves and positive entire solutions of Fisher-KPP equations with time and space dependence. Nonlinearity, 2017, 30: 3466–3491
 - 44 Shen W. Spreading and generalized propagating speeds of discrete KPP models in time varying environments. Front Math China, 2009, 4: 523–562
 - 45 Hirsch M W, Smith H. Monotone dynamical systems. In: Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations, vol. 2. Amsterdam: Elsevier, 2005, 239–357

Stability and uniqueness of generalized traveling waves of lattice Fisher-KPP equations in heterogeneous media

CAO Feng & SHEN WenXian

Abstract In this paper, we investigate the stability and uniqueness of generalized traveling wave solutions of lattice Fisher-KPP equations with general time and space dependence. We first show the existence, uniqueness, and stability of strictly positive entire solutions of such equations. Next, we show the stability and uniqueness of generalized traveling waves connecting the unique strictly positive entire solution and the trivial solution zero. Applying the general stability and uniqueness theorem, we then prove the existence, stability and uniqueness of periodic traveling wave solutions of lattice Fisher-KPP equations in time and space periodic media, and the existence, stability and uniqueness of generalized traveling wave solutions of lattice Fisher-KPP equations in time heterogeneous media. The general stability and uniqueness results established in this paper imply that the generalized traveling waves obtained in many cases are asymptotically stable under well-fitted perturbation.

Keywords heterogeneous media, lattice Fisher-KPP equations, generalized traveling waves, stability, uniqueness

MSC(2010) 35C07, 34K05, 34K60, 34A34, 34D20

doi: 10.1360/N012017-00116