论 文

耦合腔光力学系统的绝热理论及其计算方法

张旭, 张林*

陕西师范大学物理学与信息技术学院, 西安 710119

*E-mail: zhanglincn@snnu.edu.cn

收稿日期: 2014-11-05; 接受日期: 2015-02-02; 网络出版日期: 2015-03-10

国家自然科学基金项目 (批准号:11447025) 和教育部出国留学科研启动基金 (第 47 批教外司留 [2013]1792 号) 资助项目

摘要 本文从绝热理论的角度, 系统考察了广义耦合腔光力学系统的基本模型及其理论计算, 给出了耦合腔光力学系统的腔模公式及其多膜耦合问题的一般计算方法. 传统腔光力学模型的推导主要从麦克斯韦方程出发利用含时边界条件进行计算, 该方法不仅过程复杂, 而且缺少直观清晰的物理图像以及与其他类似系统的本质联系. 本文尽量采用普适的物理方法, 以光学薄膜耦合腔为代表, 仔细研究了单个、两个和多个薄膜耦合 Fabry-Pérot 腔内的绝热模式结构, 并在转移矩阵的基础上给出了多体耦合腔光力学系统的基本计算方法, 揭示了膜耦合系统内腔场透射率与薄膜振动模式间的调制关系, 为该类系统的研究提供了一个更为广阔的研究背景.

关键词 腔光力学, 绝热近似, 耦合腔膜系统, 转移矩阵法

PACS: 42.50.Pq, 42.50.Ct, 42.60.Da, 78.20.Ci, 05.45.Xt

doi: 10.1360/SSPMA2014-00422

近年来, 微观受限结构 (人工纳米微结构材料) 成为物理学最为感兴趣的研究对象之一, 在声学、微电子学、现代光学、超材料、表面等离子体、冷原子等研究领域, 都已发现了许多有趣的物理现象^[1]. 微观受限结构包括声子晶体^[2,3]、量子点阵列^[4]、超晶格薄膜结构^[5]、人造微阵列结构 (超材料)^[6]、光学微腔^[7] 或光学晶体^[8-10]、纳米电子微腔^[11,12]、波导阵列^[13] 等, 该类系统中所展现的奇异现象都和体系的某种高阶非线性效应存在紧密联系. 从微观结构上讲, 这些系统都利用了微腔结构中物质波或光波的相干叠加构造出很强的局域场模式, 从而增强了系统内非线性的耦合过程, 导致了許多不同的宏观物理效应, 比如量子点阵中的非线性隧穿现象、超晶

格中的电子 Bloch 振荡、微腔中强光场导致的拉曼光谱增强现象、金属腔表面等离子体的高次谐波振荡、波导阵列中的相干隧穿^[13] 等. 这些现象的本质都是利用了微结构中相干模式所形成的高强度局域场, 去增强系统内不同模式间的相互耦合, 激发了与高阶响应有关的非线性过程, 从而导致系统某些不同于常规的物理现象.

腔光力学系统也是这样的一类系统. 现代的光学微腔加工技术能制造出高反射率、低损耗的光学微腔, 注入其中的电磁波可以在微腔内建立很强的电磁场模式. 实验发现, 高强度的相干光场对腔体本身会产生很大的反作用力, 即腔中的场产生的光学力会导致约束它的腔体产生微小形变. 在一定条件下,

引用格式: 张旭, 张林. 耦合腔光力学系统的绝热理论及其计算方法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2015, 45: 044201

Zhang X, Zhang L. The cavity modes and the adiabatic theory in coupled cavity optomechanical systems (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2015, 45: 044201, doi: 10.1360/SSPMA2014-00422

腔体的形变会导致腔边界持续不断地机械振动^[14], 该现象的发现产生了一个全新的研究方向, 即腔光力学系统, 主要研究光场和机械振动相互耦合系统的经典和量子行为.

腔光力学系统本质上是一个介于微观和宏观之间的介观体系. 一方面, 机械振子本身由大量的原子构成 (典型数目有 10^{14} 个原子), 其振动是大量原子的集体行为, 具有经典性质; 另一方面, 机械振子可以做得非常小, 尺寸可以做到纳米量级, 质量可以达到纳克, 这样的振子与弱的量子光场耦合还会产生可以观测的量子行为, 所以腔光力学系统的出现立刻引起了研究者的极大兴趣. 腔光力学振子和单个原子不同, 它是介于微观与宏观分界点的纳米振子, 在这样的体系内研究经典和量子对应自然成为一个引人入胜的课题, 也就是“宏观”振子的量子效应将如何或怎样在系统中表现出来或被观测出来成为一个理论和实验领域里都比较感兴趣的问题.

为了研究宏观纳米振子的量子特性, 一个最为基本的前提就是需要把振子冷却到振动基态, 所以腔光力学系统的冷却首先成为腔光力学的研究热点. 目前利用光场对机械振子的冷却工作已经基本完成, 现在机械振子可以被光场完全冷却到振动基态^[15]. 但由于微观系统量子噪声和环境热噪声的影响, 纯粹观测到振子量子行为的实验目前还没有得到更有说服力的结果. 无论如何腔光力学系统的研究工作近年来大量涌现, 成为量子光学、纳米系统等交叉学科领域又一个研究热点.

根据前面的讨论可以发现, 其实腔光力学系统就是一个光场和振动耦合在一起的系统, 利用光子和声子的耦合作用, 可以在许多和腔有关的力学系统上实现声子和光子的相互操控, 从而实现不同的物理效应, 获得不同的实际应用. 关于该类系统的理论、实验和其他应用可参考相关文献 [16–18]. 下面我们将以腔膜耦合系统为代表, 考察该类系统一般的理论模型和研究方法.

1 腔模式和耦合腔模型

1.1 单振动 Fabry-Pérot 腔

典型的腔光力学系统是一个光学模式和一个机

械振子振动模式通过适当耦合组成的系统, 体系的 Hamiltonian 自然可以写为^[17]

$$\hat{H} = \hbar\omega_{\text{cav}}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_{\text{m}}\hat{b}^\dagger\hat{b}. \quad (1)$$

其中 $\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}$ 和 $\hat{b}^\dagger$, $\hat{b}$ 分别表示光腔场模式和振子振动模式的升降算符, ω_{cav} 和 ω_{m} 分别为光场模式和机械振动模式的频率. 腔光力学系统的微腔是用来构建强的局域场, 当光腔被外部输入的场驱动, 进入腔中的电磁场会建立稳定的腔模式, 这个腔场模式是由腔的形状和结构来决定的. 当腔体发生结构形变时, 其中的模式也会发生相应的改变, 我们采用一维腔 (如 x 方向) 来说明这个问题. 当腔的长度 x 发生微弱改变时, 腔内的模式频率也会随之发生改变, 即腔模频率总可以写为腔长形变的级数展开^[17,19,20]

$$\omega_{\text{cav}}(x) \approx \omega_{\text{cav}}(x_0) + \left. \frac{\partial \omega_{\text{cav}}}{\partial x} \right|_{x=x_0} (x-x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega_{\text{cav}}}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} (x-x_0)^2 + \cdots, \quad (2)$$

显然以上公式是普适的, 可以简单推广到高维腔中. 对于一般的光学微腔来讲 $\partial \omega_{\text{cav}} / \partial x \gg \partial^2 \omega_{\text{cav}} / \partial x^2$, 但如果将膜精确的放置在腔内模式频率 $\omega_{\text{cav}}(x_0)$ 的极值处, 那么其在该处的一阶导数 $\partial \omega_{\text{cav}} / \partial x = 0$, 此时二阶项就变得非常重要^[19,20]. 为了更好地理解 (2) 式, 我们用一维的 Fabry-Pérot 腔作为实例来说明它的具体含义. 如图 1(a) 是单个 Fabry-Pérot 腔, 它是腔光力学系统的典型结构, 腔经外场驱动后在腔内会形成很多共振的模式, 即驻波模, 其频率 (能量) 由下式决定

$$\omega_{\text{cav}}(L) = n \frac{\pi c}{L}, \quad (3)$$

其中 c 为光速, L 为腔长. 此式表明腔的共振模式由腔的长度决定, 模式频率是基模 $\pi c / L$ 的整数倍, n 则称为模式数.

如果腔的一端不固定, 其会离开平衡位置 L_0 发生形变, 腔长变为 $L = L_0 + x(t)$, 那么就有

$$\omega_{\text{cav}}(L) = n \frac{\pi c}{L_0 + x} \quad (4)$$

成立, 其中 x 为端镜离开平衡位置的位移. 虽然 (4) 式被经常使用, 但 (4) 式的成立并非是自明的, 必须

图 1 (网络版彩图)(a) 单 Fabry-Pérot 腔光力学系统; (b) 中间膜双腔光力学系统

Figure 1 (Color online) (a) The Fabry-Pérot cavity optomechanical system; (b) the membrane-in-the-middle cavity optomechanical system.

在一定条件下才能成立. 由于 x 现在是一个随时间变化的量, 一般情况下体系的腔模频率公式不再具有 (3) 式的形式. 但是幸运的是机械振子的振动 $x(t)$ 随时间的变化比起光场在微腔中的变化至少要慢 3 个数量级 (实验上可以达到相差 9 个数量级)^[19,21], 即机械振子振动的频率比光在腔中的振荡频率小很多, 这样光场内的模式频率将保持 (3) 式的形式不变. 而且随着腔长度的减小, 腔模式建立和调整的时间会更加迅速, 所以对于大振子高品质的微腔, 系统通常都满足所谓的绝热近似条件. 因此在绝热近似条件下, 腔中的模式或频率公式才会保持形式不变^[22]. 因而 (4) 式的成立必须满足动力学绝热近似条件.

在绝热近似的框架下, 如果振子的振动幅度很小, 即 $x \ll L_0$, 那么才有 (2) 式的 Taylor 展开结果

$$\omega_{\text{cav}} = n \frac{\pi c}{L_0} \frac{1}{1+x/L_0} = \omega_0 \left(1 - \frac{x}{L_0} + \frac{x^2}{L_0^2} + \dots \right). \quad (5)$$

其中 $n\pi c/L_0$ 是腔在平衡位置时的本征频率, 它是基频 $\pi c/L_0$ 的整数倍. 当我们对 (5) 式进行不同程度的截断, 就会得到腔光力学系统的不同理论模型. 如果只保留一次项, 这时光腔场的能量变为

$$\hbar \omega_{\text{cav}}(x) \hat{a}^\dagger \hat{a} \approx \hbar(\omega_0 - g_1 \hat{x}) \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (6)$$

其中 $g_1 = \omega_0/L_0$, $\hat{x} = x_{\text{ZPF}}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)$, 而 x_{ZPF} 表示机械振子的零点涨落振幅. 所以系统的 Hamiltonian 可以

写为

$$\hat{H} = \hbar \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - \hbar G_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger). \quad (7)$$

这里的 $G_1 = g_1 x_{\text{ZPF}}$ 是真空光力学耦合强度, 它刻画了单个光子和单个声子之间耦合强度. 所以 (7) 式中的最后一项可看作是声子和光子的相互作用能, 其物理本质恰恰是来源于光场的辐射压力, 大小正比于腔场的强度. (7) 式给出的模型等同于两个玻色子系统的耦合模型^[23], 这样的模型在物理领域非常多, 如量子光学领域最著名的 JC 模型^[24]. 公式 (7) 在一定的旋波近似条件下可以给出完全相同的 JC 模型或参量放大模型^[17]. 基于相同的数学模型, 在光力学系统内诸如 Rabi 振荡、能级分裂、声子缀饰态以及振动的崩塌复活等现象也能相应地出现.

另一个值得注意的是, 绝热近似给出的系统模型式 (7) 与 Law 等人^[25] 用麦克斯韦方程组结合运动边界条件的计算结果完全一致, 但本方法比利用含时模式展开再进行单模近似的方法显得简单明了, 绝热近似的物理意义更加清晰, 而且该方法还可以简洁地给出其他具有实际意义的腔光力学系统模型.

根据前面的讨论, 一般情况下腔模式在高反射腔体的边界处场强最小, 被称为波节, 我们可以通过调整薄膜的空间位置, 让薄膜精确地处于腔场模式 $\omega_{\text{cav}}(x_0)$ 的波腹处, 使 $\omega'_{\text{cav}}(x_0) = 0$ ^[19,20], 此时就只有二次耦合作用. 因此我们就可以得到二阶截断的二次耦合腔光力学系统模型

$$\hat{H} = \hbar \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar G_2 \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger)^2. \quad (8)$$

而 $G_2 = \omega_0 x_{\text{ZPF}}^2 / L_0^2$ 表示声子和光子的二次耦合系数. 二次耦合是腔光力学系统中更高阶的非线性相互作用, 来源于腔内模式光场强度梯度, 其大小比起一次耦合来说至少小两个数量级^[19,20]. 但从 (8) 式可以看出, 等效的二次耦合为 $G_2 \hat{a}^\dagger \hat{a}$, 其正比于腔场的强度, 正是由于腔中高强度的光场使得这种高阶非线性效应会显著加强; 另外一个方面, 高阶耦合模型还存在一次耦合所缺少的非常重要的性质, 即二次耦合可以用来对振子的能量进行非破坏测量^[26], 还可以用来实现对声子的光压缩^[27].

当然结合一次和二次耦合作用, 光力学系统完

整的模型可以写为

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_m\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hbar G_1\hat{a}^\dagger\hat{a}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) + \hbar G_2\hat{a}^\dagger\hat{a}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)^2. \quad (9)$$

由于一次耦合对相位的敏感(即对腔镜位置敏感),而二次耦合与系统哈密顿(上式前三项)可对易,所以腔光力学系统可以利用一次和二次耦合的不同特性实现更为灵活的联合测量和光声子操控^[28],而且结合一次和二次耦合该系统还能表现出很多与单独一次或二次耦合都不同的动力学性质^[29,30].

1.2 双振动耦合腔: 中间膜系统

如图 1(b) 所示,如果在 Fabry-Pérot 腔中间放一个具有一定透射率 T 的光学薄膜,这样就形成了两个耦合的腔体,中间薄膜可以在平衡位置振动,就能构成所谓的中间膜光力学系统^[19,31]. 该系统 and 环形腔系统^[32,33]一样,都是腔光力学领域研究得比较多的系统. 根据简单的模共振条件(膜的物理参数参照所列文献^[19,20]),体系中的光场模式满足^[34]

$$\cot(kL_1) + \cot(kL_2) = 2\sqrt{\frac{1-T}{T}}, \quad (10)$$

根据 (10) 式,当图 1(b) 中所示的中间膜离开平衡位置 x 时,两边的腔长度发生改变,由绝热近似的条件可知 (10) 式依然成立

$$\cot[k(L_1+x)] + \cot[k(L_2-x)] = 2\sqrt{\frac{1-T}{T}}, \quad (11)$$

由 (11) 式所给的关系可以推导出腔内模式频率会出现两个分支,分别可写为

$$\omega_e(n, T, x) = 2n - \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \sqrt{T} + \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \left[\sqrt{1-T} \cos \left(\pi \omega_e \frac{d-2x}{L_1+L_2} \right) \right], \quad (12)$$

$$\omega_o(n, T, x) = (2n+1) - \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \sqrt{T} - \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \left[\sqrt{1-T} \cos \left(\pi \omega_o \frac{d-2x}{L_1+L_2} \right) \right]. \quad (13)$$

其中 ω_e 被称为偶 (Even) 模式,而 ω_o 称为奇 (Odd) 模式. 以上的奇偶模式的频率公式都是经过总体腔模频率 ω_0 标度过的,其中

$$\omega_0 = \frac{\pi c}{L_1+L_2}, \quad d = L_2 - L_1.$$

图 1(b) 中两端腔镜是固定的,所以腔的总长度 L_1+L_2 是一个常数,而 d 是两个腔的长度差. 当这个薄膜恰好处于中间 $d=0$, 即 $L_1=L_2=L$, 自然就能得到中间膜的模式频率公式(图 2(a)). 需要注意的是公式 (12) 和 (13) 是腔模频率的隐性公式,是一个关于 ω_e 或 ω_o 的超越方程,如果把公式看成是显式的函数,则会给出有偏差的模式频率随膜移动 x 的能级图^[35],尤其是对低模式数的腔场频率的影响.

图 2(a) 计算了膜位置大范围变化时(实际上膜位置的变化 x 应该在 $x=0$ 附近小于 $\Delta\lambda$ 的范围内变化,其中 $\Delta\lambda$ 是腔模的自由光谱范围 FSR) 中间膜耦

图 2 (网络版彩图) 中间膜耦合腔内奇偶模式频率随膜位置的移动. (a) 最低的几个奇偶模式; (b) 一对相邻奇偶模式的能级交叉. 单膜透射率为 $T=0.3$

Figure 2 (Color online) The frequency shift of even and odd modes in the membrane-in-the-middle coupled cavity. (a) Several lower modes; (b) the energy gap between two odd and even modes. The transmission rate of the membrane is $T=0.3$.

合腔内奇偶模式频率的改变情况. 从图 2(a) 可以发现, 当体系模式数 n 很大的时候, 腔模频率随膜位置 x 的变化会趋近于余弦函数^[19]形式. 当然如果考虑到腔长度较大或腔是三维而不是一维的情形, 腔内模式将不再单一, 而是多个模式共存 (简并), 多模式共存的腔光力学系统的研究也是近年来人们关注的研究方向之一^[36,37].

中间膜系统中存在很多非常重要的现象. 首先是该系统具有明显的二次耦合作用, 它们之间相互作用能的大小等于图 2(b) 中的模式能级交叉点的能隙间隔. 当膜处于腔中央 ($x=0$) 时, 两边腔的能级是简并的, 那么两边的光场对薄膜的压力大小相等且方向相反, 所以一次耦合作用被抵消只剩下二次耦合作用, 从而使二次耦合成为至关重要的耦合, 其大小等于此位置处薄膜移动所产生的能级差. 其次, 当薄膜发生移动时, 一边的腔长减小能级上升, 另一边腔长则会增加能级降低, 那么简并的两个能级会由于薄膜移动而发生能级分裂 (图 2(b)), 这样的能级交叉系统经常被用来研究能级间的非绝热转移或所谓的朗道齐纳 (LZ) 隧穿现象^[38,39]. 如果能够适当地控制膜的振动将会使左面的光子更容易通过薄膜从而发生声子辅助隧穿现象或阻止光子通过则会发生光子阻塞现象^[40]. 除此之外, 利用声子控制光子隧穿过程与电磁感应透明 (EIT) 存在联系, 可以实现声致 EIT 现象^[41]. 当然还有二次耦合作用能够实现对声子振动的光压缩和对机械振子能量的非破坏测量, 这对直接测量微振子非经典振动和能量的量子化具有特殊的实际意义.

1.3 多振动耦合腔: 多层膜系统

对于腔内多层薄膜情况, 体系可以形成某种光学晶体结构^[10]. 对该类系统很多人都进行了相应的计算^[42], 我们在这里采用普适的散射转移矩阵的方法进行模式的计算和建构^[43]. 如图 3(a) 所示, 固定的高 Q 腔中平行放置有 N 个相同的光学薄膜 (其厚度比起光模式的波长可以忽略), 其平衡位置分别在 $x_j, j=1, 2, 3, \dots$ 处, 这时影响电磁场在腔内传播的体系介电函数可写为

图 3 (网络版彩图)(a) 多层薄膜组成的光学晶格系统; (b) Delta 势场的转移矩阵示意图

Figure 3 (Color online) (a) Phononic crystal system of a series of multi-layer membranes; (b) the Delta potential model for transfer matrix method.

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{2\zeta}{k} \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j) \right]. \quad (14)$$

其中 ε_0 为真空介电常数, 参数 ζ 与薄膜极化率有关, 它和薄膜的振幅透射率 t 和振幅反射率 r 的关系为

$$t = \frac{1}{1 - i\zeta}, \quad r = \frac{i\zeta}{1 - i\zeta}, \quad (15)$$

如果薄膜没有损耗, 则 ζ 为实数, 此时有能量守恒关系 $|r|^2 + |t|^2 = 1$, 从而 $\zeta = \sqrt{(1-T)/T}$, 其中 $T = |t|^2 = \frac{1}{1+\zeta^2}$ 为单层膜的透射率.

公式 (14) 给出了一个关于光场的 Delta 型函数势场, 采用传递矩阵的方法可以很容易计算系统的光场传输过程对腔模式的限制. 如图 3(b) 所示有

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (16)$$

其中 M 为整个系统的总转移矩阵, 根据腔膜构型可写为

$$M = M_{d_0} M_{m_1} M_{d_1} M_{m_2} \cdots M_{m_N} M_{d_N}. \quad (17)$$

其中 d_j 为膜间距编号, m_j 为膜的编号. 如果计算得到了 M , 并假设光场从左边入射 ($D=0$), 那么系统的总透射率即为

$$T_N = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{1}{|M_{11}|^2}. \quad (18)$$

当膜间距 d_j 和膜 m_j 的性质都不同时, 由 (17) 式计算光场总的传播转移矩阵 M 较为复杂, 下面我们只计算图 3(b) 中所示的最简单但最常见的情形, 即所有的 N 个薄膜是全同的并且等间距排列. 那么此时 M 具体可写为

$$M = M_d(M_m M_d)^N \equiv M_d R^N.$$

上式中的矩阵

$$M_d = \begin{pmatrix} e^{-ikd} & 0 \\ 0 & e^{ikd} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

为光场自由传播转移矩阵, 而

$$M_m = \begin{pmatrix} 1 - i\zeta & -i\zeta \\ i\zeta & 1 + i\zeta \end{pmatrix}, \quad (20)$$

为薄膜的散射转移矩阵. 显然 $\det(M_m) = 1$ 表示无损耗膜的能量守恒条件, 而式中 $k = \omega/c$ 为腔中光场模式的波数. 引入矩阵 R 只是为了计算方便, 我们很容易发现 $\det(R) = 1$, 并且 R 的迹

$$\text{Tr}(R) = 2[\cos(kd) - \zeta \sin(kd)] \equiv 2\eta, \quad (21)$$

由上面 R 矩阵的性质可知, 其满足矩阵递推方程

$$R^2 = 2\eta R - I,$$

其中 I 为单位矩阵. 反复利用上面的公式, 就能得到

$$R^n = U_{n-1}(\eta)R - U_{n-2}(\eta)I, \quad (22)$$

上式中的 $U_n(\eta)$ 为车尼雪夫多项式 (Chebyshev Polynomials), 将其带入 (17) 式, 得到腔中多层薄膜总的散射矩阵 M 为

$$M = M_d R^N = \begin{bmatrix} U_{N-1}(\eta)(1 - i\zeta)e^{-i2kd} - U_{N-2}(\eta)e^{-ikd} & -iU_{N-1}(\eta)\zeta \\ iU_{N-1}(\eta)\zeta & U_{N-1}(\eta)(1 + i\zeta)e^{i2kd} - U_{N-2}(\eta)e^{ikd} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

根据车尼雪夫多项式的性质

$$U_{N-1}(\eta) \equiv U_{N-1}(\cos \theta) = \frac{\sin(N\theta)}{\sin \theta}, \quad (24)$$

可以把 (24) 式写得更为简洁. 利用以上公式, 我们就可以计算光场穿过多层薄膜的透射率及相关的物理量. 由 (18) 式, 多层薄膜总透射率为

$$T_N = \frac{1}{U_{N-1}^2(1 + \zeta^2) + U_{N-2}^2(\eta) - 2\eta U_{N-1}(\eta)U_{N-2}(\eta)}. \quad (25)$$

显然 $N = 1$ 时自然得到单层薄膜的透射公式 (15) 式.

图 4 计算了不同的单膜透射率 T 下双层膜、3 层和 40 层膜耦合腔的总透射系数随模参量 kd 的变化规律. 模参量 kd 表示腔模场从一个膜穿过到达下一个膜的光场自由程相位, 由腔模频率 $k = \omega/c$ 和膜间距 d 共同决定, 包含了腔模频率和多膜结构的双重信息. 图 4 最重要的特点是给出了腔模式的能带结构, 即只有满足一定模参量条件的腔模式才能从左向右在腔内传播, 而这个条件由模式的频率和光学薄膜排列间距的匹配关系来决定.

多层薄膜耦合腔的透射系数图 4(b) 揭示出当膜的个数 N 足够大时会形成腔模的连续导带和禁带, 而且 N 越大导带和禁带的边界就越清晰. 当然把薄膜看作是厚度为 0 的 Delta 函数是一种最粗略的近似计算, 这种近似不会导致完全的腔模禁带和导带 (总透射率不会完全等于 0 或 1). 如果采用更为精确的矩形势来代替 Delta 势, 用同样的方法则可以给出完全的禁带和导带.

如果我们假定左右两个固定的端镜都具有很高的反射率, 腔模式在边界处的约束条件是场强为零. 根据边界条件和传递矩阵 M 的形式, 在规则放置 N 个薄膜的高 Q 腔中, 其共振模式必须满足

$$U_N(\eta) \sin(kd) = 0, \quad (26)$$

其中 $\sin(kd) = 0$ 表示所有膜都处在波节处, 所有薄膜所感受的腔场强度都为零, 这显然是一个平凡特解. 因而一般情况下 (26) 式的解为 $U_N(\eta) = 0$, 结合 (24) 式可以给出

图 4 多层膜耦合腔的透射率随模式频率和膜间隔的变化. (a) 双层膜; (b) 3 层膜 (虚线) 和 40 层膜 (实线)

Figure 4 The transmission rate T_N versus kd . (a) Two membranes; (b) three membranes (dashed line) and 40 membranes (solid line).

$$\cos(kd) - \zeta \sin(kd) = \cos\left(\pi \frac{n}{N+1}\right),$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (27)$$

以上的公式是固体物理中 Delta 周期势场所熟知的共振模式公式, 其能级会构成 N 条一组的能带结构. 显然当 $N = 1$ 时自然退化到公式 (10) 所要求的腔模条件; 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 波数 $q = n \frac{\pi}{N+1}$ 将连续取值, 则由 (27) 式可以得到腔内模式的频率随波数 q 变化的能带色散图 (图 5(a)).

根据以上计算可以发现, 利用不同排列间距的薄膜, 可以简单控制模式在腔内的传播性质. 所以可控色散关系的存在使得腔内多膜系统可以用来对光场波包进行整形和处理, 开发适当的空间光调制器, 从而在相干控制中获得特殊的应用.

图 5 (网络版彩图)(a) 多层膜耦合腔中的模式能级的色散关系; (b) 透射率随 kd 和膜位置 x 的变化图. 单膜透射率 $T=0.6$

Figure 5 (Color online) (a) The dispersion relation of multi-layer membrane; (b) the transmission rate changes with kd and the membrane's position x . The transmission rate of a single membrane is $T = 0.6$.

当然我们更关心的是膜振动对耦合腔透射率的影响, 而利用 (25) 式给出的绝热透射公式只能得到薄膜同步运动时腔模的频率变化, 即每个薄膜的移动方向和大小都一样的公式. 为了说明一般问题的计算方法, 下面我们先考察一下 $N = 2$ 时的情形. 此时腔内只有两个光学薄膜, 根据耦合振子理论 (通过腔场耦合), 系统存在 2 种正则振动模式, 即同步和反同步振动, 一般振动则为两种模式的叠加. 假设膜振动幅度同步一致, 则根据透射率公式的计算结果, 同步振动模式并不改变腔内模式的透射率; 而反同步振动时透射率随膜位置 x 则会发生改变, 其变化与 (25) 式类似

$$T_2(x) = \frac{1}{1 + 4\zeta^2 \eta^2(x)}. \quad (28)$$

此时 (21) 式定义的参数 η 将依赖于膜位置 x

$$\eta(x) = \cos[k(d - 2x)] - \zeta \sin[k(d - 2x)]. \quad (29)$$

图 5(b) 给出了反同步振动情况下双层膜耦合腔透射率随膜位置 x 和腔模式参数 kd 的变化图. 图中显示膜的非同步振动对透射率有明显的调制, 并且对某个固定模式的调制存在多个透射率窗口.

根据以上的计算我们可以得出, 通过探测膜耦合系统的透射率不仅可以分辨膜在腔中的位置, 而且可以判断膜的不同振动模式, 这将是耦合腔光学系统测量的另外一种应用, 对透射率谱的详细解析还能给出高分辨率的耦合系统集体动力学特征.

一般情况下, 如果多个薄膜之间互相独立运动, 此时膜间距将不再是统一的 d , 不同膜的移动位移都会不同, 此时系统的透射率就不存在一个简单的解析公式. 对这样的体系就需要自洽地计算 N 个耦合的膜方程来进行数值求解^[44], 其中每一个膜的位置为 $x_j(t)$, 结合多个膜的耦合模型 (7) 和 (8) 或 (9) 式, 并考虑膜振动和光腔场的噪声和耗散作用, 可以自洽地对多个膜振子进行数值计算, 则振动膜之间的间距变为

$$d_j(t) = x_{j+1}(t) - x_j(t), \quad j = 1, 2, 3 \cdots N-1. \quad (30)$$

然后在绝热的条件下, 利用 (18) 式就可以对透射率进行完全的计算. 虽然 N 很大时, 数值计算有一定的复杂性, 但从前面的简单讨论可以非常清楚地发现, 膜的集体行为会决定光场总的透射率, 所以不同膜的集体行为 (如同步、反同步或某种集体模式) 会导致多膜耦合系统完全不同的透射行为.

在一般情况下, 如果薄膜之间存在某种特殊的集体运动模式 (这种集体运动可以看成光膜阵列的某种声波振动模式), 将会对多膜系统产生增透效应或光子阻塞效应, 这也是中间膜系统模型非常有价值的研究课题, 并且与其他周期微结构系统中的相应问题都有着密切的联系^[43].

2 其他耦合腔力学系统

以上方法从理论上来说是普适的, 不仅可以在腔光学系统上使用, 而且可以很容易推广到其他腔力学系统中, 如声学腔系统, 电场或磁场腔系统, 电子电路腔系统以及其他等效的腔场耦合系统中^[45], 显然在这些系统上也可以讨论类似的问题. 下面我们

们在电子电路系统内, 以电容腔做为力学耦合腔来说明这一方法在其他领域中的应用. 图 6 是一个把电场和力学振动耦合起来的体系^[17,46,47].

电路中微电容器的两个极板中有一个极板是可以上下振动的机械振子, 这种振动可以改变建立在电容器腔中的电场, 电场和外面的电路耦合起来得到的系统就是一个和腔光学系统类似的系统, 同样可以利用以上的绝热近似方法给出系统的动力学模型. 平板电容器系统电路的 Hamiltonian 为

$$H = \frac{\Phi^2}{2L} + \frac{1}{2}CV^2. \quad (31)$$

其中 Φ 为电感中的磁通量, L 为电感, C 为电容, V 为电容上的电压. 电路中平板电容器的电容为

$$C(d) = \frac{\epsilon S}{d},$$

其中 ϵ 为电容腔内介质的介电常数, S 为极板的面积, d 为腔的两个极板间的距离. 当极板间的距离在平衡位置 d_0 处发生改变时, 其变化可以自洽地来源于两极板间的静电引力, 也可以来自于外在的驱动, 总之此时这个振动的变化很慢而且幅度很小, 其必然满足绝热条件. 由此电容变为

$$C(x) = \frac{\epsilon S}{d_0 + x} = C_0 \left(1 - x' + x'^2 - \cdots \right). \quad (32)$$

其中 $C_0 = \epsilon S/d_0$ 为固有电容, 而 $x' = x/d_0$ 是一个小量, 从而在这个系统上同样可以得到类似 (9) 式的具有腔力学耦合的理论模型

$$H \approx \frac{\Phi^2}{2L} + \frac{1}{2}C_0V^2(t) - \frac{1}{2}C_0V^2(t)x' + \frac{1}{2}C_0V^2(t)x'^2. \quad (33)$$

利用以上简单理论模型就可以研究低温下振动信号对电路的调制或反过来研究电信号对振动的控制. 其中 $V(t)$ 为两极板上所加的电压, 可以用来控制极板的振动, 而极板的振动又反作用于电路, 产生很多新的物理问题. 由于该系统和腔光学系统有本

图 6 平板电容器的 LC 耦合电路^[17]

Figure 6 The scheme LC circuit coupled by plane capacity^[17].

质的相似性, 所以该系统类似的问题 (如串、并联微电容器耦合阵列的电子隧穿或电导调制) 都可以从 (33) 式出发去进行与多膜耦合系统类似的理论研究.

3 结论

本文利用简单而直观的物理图像和绝热近似的处理方法, 对腔内膜耦合体系进行了系统的研究, 给出了研究耦合腔光力学系统以及其他类似体系的基本理论模型和方法. 基于腔光力学系统的一般物理特性, 即该类微观受限系统都是利用微结构中所建立的强场产生增强的非线性耦合来工作, 因此从更

广义的角度讨论了耦合腔光力学系统模型有关的物理问题. 本文所采用的理论方法是建立在绝热近似的基础上, 该方法体现了绝大多数量子器件工作的基本原理, 即利用宏观低频系统 (机械振子) 去控制微观高频系统 (腔场). 本文的研究结果表明, 绝热近似的方法能给出更为物理和普适的理论分析结果. 通过对膜耦合光学腔系统的简单计算, 揭示出腔光力学系统的物理性质和丰富的研究内容, 以及和其他领域类似系统的内在联系, 从更加物理的角度给出了腔光力学系统的理论模型和研究方法, 从而使耦合腔光力学系统的研究内容和方法可以非常简单而直观地推广到其他相关领域.

参考文献

- Walther H, Varcoe B T H, Englert B G, et al. Cavity quantum electrodynamics. *Rep Prog Phys*, 2006, 69: 1325–1382
- Maldovan M. Sound and heat revolutions in phononics. *Nature*, 2013, 503: 209–217
- Midtvedt D, Isacsson A, Croy A, et al. Nonlinear phononics using atomically thin membranes. *Nat Commun*, 2014, 5: 4838
- Juska G, Dimastrodonato V, Mereni L O, et al. Towards quantum dot arrays of entangled photon emitters. *Nat Photon*, 2013, 7: 527–531
- Wacker A. Semiconductor superlattices: A model system for nonlinear transport. *Phys Rep*, 2002, 357: 1–111
- Lapine M, Shadrivov I V, Kivshar Y S. Colloquium: Nonlinear metamaterials. *Rev Mod Phys*, 2014, 86: 1093–1123
- Ritsch H, Domokos P, Brennecke F, et al. Cold atoms in cavity-generated dynamical optical potentials. *Rev Mod Phys*, 2013, 85: 553–601
- Soljacic M, Joannopoulos J D. Enhancement of nonlinear effects using photonic crystals. *Nat Mater*, 2004, 3: 211–219
- Joannopoulos J D, Villeneuve P R, Fan S H. Photonic crystals: Putting a new twist on light. *Nature*, 1997, 386: 143–149
- Eichenfield M, Chan J, Camacho R M, et al. Optomechanical crystals. *Nature*, 2009, 462: 78–82
- Kauranen M, Zayats A V. Nonlinear plasmonics. *Nat Photon*, 2012, 6: 737–748
- Ren M X, Plum E, Xu J J, et al. Giant nonlinear optical activity in a plasmonic metamaterial. *Nat Commun*, 2012, 3: 833
- Christodoulides D N, Lederer F, Silberberg Y, et al. Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices. *Nature*, 2003, 424: 817–823
- Cho A. To physicists' surprise, a light touch sets tiny objects aquiver. *Science*, 2005, 309: 366
- Chan J, Alegre T P M, Safavi-Naeini A H, et al. Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state. *Nature*, 2011, 478: 89–92
- Aspelmeyer M, Kippenberg T J, Marquardt F. *Cavity Optomechanics: Nano- and Micromechanical Resonators Interacting with Light*. Berlin: Springer, 2014
- Aspelmeyer M, Kippenberg T J, Marquardt F. Cavity optomechanics. *Rev Mod Phys*, 2014, 86: 1391–1452
- Metcalfe M. Applications of cavity optomechanics. *Appl Phys Rev*, 2014, 1: 031105
- Thompson J D, Zwickl B M, Jayich A M, et al. Strong dispersive coupling of a high-finesse cavity to a micromechanical membrane. *Nature*, 2008, 452: 72–75
- Sankey J C, Yang C, Zwickl B M, et al. Strong and tunable nonlinear optomechanical coupling in a low-loss system. *Nat Phys*, 2010, 6: 707–712
- Holmes C A, Meaney C P, Milburn G J. Synchronization of many nanomechanical resonators coupled via a common cavity field. *Phys Rev E*, 2012, 85: 066203
- Griffiths D J. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2004
- Bhattacharya M, Shi H, Preble S. Coupled second-quantized oscillators. *Am J Phys*, 2013, 81: 267–273
- Walls D F, Milburn G J. *Quantum Optics*. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2008
- Law C K. Interaction between a moving mirror and radiation pressure: A Hamiltonian formulation. *Phys Rev A*, 1995, 51: 2537–2541
- Milburn J, Walls D F. Quantum nondemolition measurements via quadratic coupling. *Phys Rev A*, 1983, 28: 2065–2070

- 27 Nunnenkamp A, Børkje K, Harris J G E, et al. Cooling and squeezing via quadratic optomechanical coupling. *Phys Rev A*, 2010, 82: 021806
- 28 Vanner M R. Selective linear or quadratic optomechanical coupling via measurement. *Phys Rev X*, 2011, 1: 021011
- 29 Zhang L, Song Z D. Modification on static responses of a nano-oscillator by quadratic opto-mechanical couplings. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2014, 57: 880–886
- 30 Zhang L, Kong H Y. Self-sustained oscillation and harmonic generation in optomechanical systems with quadratic couplings. *Phys Rev A*, 2014, 89: 023847
- 31 Wilson D J, Regal C A, Papp S B, et al. Cavity optomechanics with stoichiometric SiN films. *Phys Rev Lett*, 2009, 103: 207204
- 32 Wiederhecker G S, Chen L, Gondarenko A, et al. Controlling photonic structures using optical forces. *Nature*, 2009, 462: 633–636
- 33 Zou C L, Dong C H, Cui J M, et al. Whispering gallery mode optical microresonators: Fundamentals and applications (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2012, 42: 1155–1175 [邹长铃, 董春华, 崔金明, 等. 回音壁模式光学微腔: 基础和应用. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2012, 42: 1155–1175]
- 34 Fader W J. Theory of two coupled lasers. *IEEE J Quantum Electron*, 1985, 21: 1838–1844
- 35 Bhattacharya M, Uys H, Meystre P. Optomechanical trapping and cooling of partially reflective mirrors. *Phys Rev A*, 2008, 77: 033819
- 36 Massel F, Chow S U, Pirkkalainen J-M, et al. Multimode circuit optomechanics near the quantum limit. *Nat Commun*, 2012, 3: 987
- 37 Zhu W, Wang Z H, Zhou D L. Multimode effects in cavity QED based on a one-dimensional cavity array. *Phys Rev A*, 2014, 90: 043828
- 38 Landau L D. Theory of energy transfer II. *Phys Z Sowjetunion*, 1932, 2: 19
- 39 Zener C. Non-adiabatic crossing of energy levels. *Proc R Soc Lond A*, 1932, 137: 696–702
- 40 Liao J Q, Nori F. Photon blockade in quadratically coupled optomechanical systems. *Phys Rev A*, 2013, 88: 023853
- 41 Huang S Y, Tsang M K. Electromagnetically induced transparency and optical memories in an optomechanical system with N membranes. *arXiv*: 1403.1340
- 42 Xu X W, Zhao Y J, Liu Y X. Entangled-state engineering of vibrational modes in a multimembrane optomechanical system. *Phys Rev A*, 2013, 88: 022325
- 43 Xuereb A, Genes C, Dantan A. Strong coupling and long-range collective interactions in optomechanical arrays. *Phys Rev Lett*, 2012, 109: 223601
- 44 Asbóth J K, Ritsch H, Domokos P. Optomechanical coupling in a one-dimensional optical lattice. *Phys Rev A*, 2008, 77: 063424
- 45 Poot M, van der Zant H S J. Mechanical systems in the quantum regime. *Phys Rep*, 2012, 511: 273–335
- 46 Teufel J D, Harlow J W, Regal C A, et al. Dynamical backaction of microwave fields on a nanomechanical oscillator. *Phys Rev Lett*, 2008, 101: 197203
- 47 Barzanjeh S, Abdi M, Milburn G J, et al. Reversible optical to microwave quantum interface. *Phys Rev Lett*, 2012, 109: 130503

The cavity modes and the adiabatic theory in coupled cavity optomechanical systems

ZHANG Xu & ZHANG Lin*

School of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China

Following a direct physical picture, this paper presents a simple but general study on the coupled cavity optomechanical system as well as some other similar systems based on the adiabatic approximation theory. The basic theoretical model and the relevant mathematical method are provided in this paper. The cavity optomechanics is a very quickly developing field and its basic theoretical model is an essential starting point to study the physical properties of the system. The traditional theoretical method to derive the model is based on the Maxwell equations with a moving cavity boundary condition. This method involves a complicated calculation procedure which lacks clear physical picture and misses general connections to other similar systems. This paper adopts the adiabatic theory and the transfer matrix method instead to investigate the coupled Fabry-Pérot cavities with the membrane-in-the-middle scheme, and gives a universal calculation on the cavity-mode frequency and the transmission rate modulating by the collective motion of the membranes. The method not only leads to the same model as that derived from Maxwell equations, but also presents a more general physical background to the study of cavity-coupled mechanical systems.

cavity optomechanics, adiabatic approximation, membrane-in-the-middle system, transfer matrix method

PACS: 42.50.Pq, 42.50.Ct, 42.60.Da, 78.20.Ci, 05.45.Xt

doi: 10.1360/SSPMA2014-00422